数理解析研究所講究録
559巻 1985年 148-161

作用素の分数巾に値をとる関数の滑らかさとその応用

大阪大理　　八木厚志(Atsushi Yagi)

1. 序

XをHilbert空間、$A(\cdot)$を区間$[0,T]$で定義されたXの線型(ω, M)型作用素に値をとる関数とする$(0 \leq \omega < \pi)$。幾かの興味ある場合において、$A(t)$の定義域$\mathcal{D}(A(t))$はtと共に変わるにもかかわらず、十分小さい$0<\theta<1$に対して分数巾$A(t)^\theta$の定義域$\mathcal{D}(A(t)^\theta)$はtについて一定となることがある。我々は、この様な場合の関数$A(\cdot)^\theta$の変数tについての滑らかさについて関心がある。というのは、線型発展方程式論において、係数作用素$A(t)$の定義域が時間変数tと共に変わる場合に、この様な分数巾$A(t)^\theta$の定義域が一定であることを、$A(t)^\theta$のtについての適当な滑らかさを示すことによって利用することは非常に有用な方法の一つだからである(詳しくは、4節を参照)。

2. 作用素の純虚数巾

この節では、準備として、有界な逆を持つ線型 (ω, M) 型作用素 A についてその純虚数巾 A^{iy} が有界となるための条件について述べる。[9, *Théorème* 𝔄] によれば、以下の 3 条件は互いに同値である：

(I) A^{iy} $(-\infty < y < +\infty)$ は X の有界作用素

(II) すべての $0<\theta<1$ について

$$\mathcal{D}(A^{\theta}) = [\mathcal{D}(A), X]_{1-\theta}, \qquad \mathcal{D}(A^{*\theta}) = [\mathcal{D}(A^*), X]_{1-\theta}$$

(III) すべての $0<\theta<1$ について

$$\left\{\int_0^\infty \lambda^{1-2\theta} \| A^{\theta}(\lambda+A)^{-1} f\|_X^2 \, d\lambda\right\}^{1/2} \leq M_\theta \|f\|_X, \quad f \in X$$

$$\left\{\int_0^\infty \lambda^{1-2\theta} \| A^{*\theta}(\lambda+A^*)^{-1} g\|_X^2 \, d\lambda\right\}^{1/2} \leq M_\theta^* \|g\|_X, \quad g \in X 。$$

この結果より直ちに：

定理 2.1. 極大単調作用素 A は、上の条件 (I), (II), (III) を満たす。

もっと一般に、[9, *Théorème* 𝔅] より次のことが得られる：

定理 2.2. A について、ある $0<\gamma<1$ が存在してすべての $0<\theta<\gamma$ に対して、$\mathcal{D}(A^{\theta}) = \mathcal{D}(A^{*\theta})$ あるいは $[\mathcal{D}(A), X]_{1-\theta} = [\mathcal{D}(A^*), X]_{1-\theta}$ が成り立てば、A は条件 (I), (II), (III) を満たす。

Aが極大単調ならば、すべての $0<\theta<1/2$ に対して $\mathcal{D}(A^{\theta})=\mathcal{D}(A^{*\theta})$ となることが知られている（[13, 第2章, 予備定理 3.8] 参照）。

例 2.3. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を有界領域、$A(x;D)$ を Ω 上の $2m$ 階適正楕円型作用素、$\{B_j(x';D)\}_{1\leq j\leq m}$ を正規境界条件とする。$H^0(\Omega)$ の線型作用素 A を

$$\begin{cases}\mathcal{D}(A)=\{u\in H^{2m}(\Omega);\ B_j(x';D)u\,|_{\partial\Omega}=0\ ,\ 1\leq j\leq m\}\\ Au=A(x;D)u\end{cases}$$

と定義する。A^*も同様に、共役境界条件 $\{C_j(x';D)\}_{1\leq j\leq m}$ を用いると

$$\begin{cases}\mathcal{D}(A^*)=\{v\in H^{2m}(\Omega);\ C_j(x';D)v\,|_{\partial\Omega}=0\ ,\ 1\leq j\leq m\}\\ A^*v=A(x;D)^*v\end{cases}$$

と表わされる。しかるに、[11, *Chap.* 4, *Théorème* 14.4] によれば、任意の $0<\theta<1/4m$ に対して

$$[\mathcal{D}(A),H^0(\Omega)]_{1-\theta}=[\mathcal{D}(A^*),H^0(\Omega)]_{1-\theta}=H^{2m\theta}(\Omega)$$

であるから、したがって、定理 2.2 の仮定が成立する。$1/4m\leq\theta<1$ に対する補間空間は、P. Grisvard [1] によって特徴付けられた。彼の結果と (II) を合わせることにより、すべての $0<\theta<1$ に対して

$$\mathcal{D}(A^{\theta}) = \{ u \in H^{2m\theta}(\Omega) ;\ B_j(x';D)u|_{\partial\Omega} = 0 ,\ m_j < 2m\theta - 1/2$$

$$\text{かつ}\ B_j(x';D)u \in \overset{0}{H}_{-1/2}(\Omega) ,\ m_j = 2m\theta - 1/2 \ \}$$

であることも分かる。$\mathcal{D}(A^{*\theta})$ についても同様。

例 2.4. V を $H^{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ の一つの関数とする。$1/4 < \alpha < 3/4$ とすると、$^\forall k > 0$ に対して $^\exists C_\alpha(k)$

$$\| Vu \|_{2(\alpha-1)} \leq k \| u \|_{2\alpha} + C_\alpha(k) \| u \|_0 \qquad u \in H^{2\alpha}(\mathbb{R}^3)$$

が成立する。したがって、特に $V \in \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^3), H^{-1}(\mathbb{R}^3))$ となることに注意すると、$H^0(\mathbb{R}^3)$ の作用素 H

$$\begin{cases} \mathcal{D}(H) = \{ u \in H^1(\mathbb{R}^3) ;\ -\Delta u + Vu \in H^0(\mathbb{R}^3) \} \\ Hu = -\Delta u + Vu + \beta u \end{cases}$$

が定義される。この H に関しては

$$\mathcal{D}(H^{\theta}) = \mathcal{D}(H^{*\theta}) = H^{2\theta}(\mathbb{R}^3) \quad , 0 < \theta < 3/4$$

となることが示される。よって、同様に定理 2.2 の仮定が成立する。

3. $A(\cdot)^{\theta}$ の滑らかさ

$[0,T]$ を閉区間、$A(\cdot)$ を $[0,T]$ で定義された有界な逆を持つ X の (ω, M) 型作用素に値をとる関数とする。本節では、$\mathcal{D}(A(t)^{\theta})$ がある $0<\theta<1$ に対して t について無関係となるための条件、及び $A(t)^{\theta}$ が t についての関数として滑らかにな

るための条件について述べる。

定理 3.1. (Hölder 連続性) 次の条件が満たされているとする：

i) 各 t について、$A(t)^{iy}$ $(-\infty < y < +\infty)$ は X の有界作用素

ii) $A(\cdot)^{-1} \in \mathcal{E}([0,T]; \mathcal{L}_s(X))$

iii) $0 < {}^\exists h < 1$, $0 < {}^\exists \alpha_k < 1$ $(k = 1, \cdots, l)$

$$|(\{A(t)^{-1} - A(s)^{-1}\} f, g)| \leq N |t-s|^h \sum_{k=1}^{l} \|A(s)^{\alpha_k - 1} f\|_X \|A(t)^{* -\alpha_k} g\|_X$$

$$f, g \in X , \quad 0 \leq s, t \leq T.$$

この時、任意の $0 < \theta < \mathrm{Min}\{\alpha_k ; 1 \leq k \leq l\}$ について $\mathcal{D}(A(t)^\theta) \equiv X_\theta$ は t に無関係な Hilbert 空間 X_θ となる。さらに、$A(\cdot)^\theta$ は Hölder 連続：$A(\cdot)^\theta \in \mathcal{E}^h([0,T]; \mathcal{L}(X_\theta, X))$ となる。

定理 3.2. (微分可能性) 次の条件が満たされているとする：

i) 各 t について、$A(t)^{iy}$ $(-\infty < y < +\infty)$ は X の有界作用素

ii) $A(\cdot)^{-1} \in \mathcal{E}^1([0,T]; \mathcal{L}_s(X))$

iii) $0 < {}^\exists \alpha_k < 1$ $(k = 1, \cdots, l)$

$$|(dA(t)^{-1}/dt \; f, g)| \leq N \sum_{k=1}^{l} \|A(t)^{\alpha_k - 1} f\|_X \|A(t)^{* -\alpha_k} g\|_X$$

$$f, g \in X , \quad 0 \leq t \leq T.$$

この時、任意の $0<\theta<\mathrm{Min}\{\alpha_k ; 1\leq k\leq l\}$ について $\mathcal{D}(A(t)^\theta)\equiv X_\theta$ は t について無関係となる。さらに、$A(\cdot)^\theta$ は強連続微分可能：$A(\cdot)^\theta\in\mathcal{E}^1([0,T];\mathcal{L}_s(X_\theta,X))$ となる。

これらの定理の証明は [10] 参照。

例 3.3. $0\leq t\leq T$ として、各 t ごとに例 2.3 と同様に適正楕円型作用素 $A(t,x;D)=\sum_{|\alpha|\leq 2m}a_\alpha(t,x)D^\alpha$ 及び正規境界条件 $B_j(t,x';D)=\sum_{|\beta|\leq m_j}b_{j\beta}(t,x')D^\beta\quad(1\leq j\leq m)$ を考える。これらによって定義される $H^0(\Omega)$ の作用素を $A(t)$ とすると、例 2.3 により $0<\theta<\gamma_B$、ただし

$$\gamma_B=[\mathrm{Min}\{m_j ; 1\leq j\leq m,\ m_j\neq 0\}+1/2]/2m,$$

に対して $\mathcal{D}(A(t)^\theta)\equiv H_\theta$ となるが、さらに

$$a_\alpha\in\mathcal{E}^k([0,T];\mathcal{D}(\bar\Omega))\qquad|\alpha|\leq 2m$$

$$b_{j\beta}\in\mathcal{E}^k([0,T];\mathcal{D}(\partial\Omega))\qquad|\beta|\leq m_j$$

$0<k\leq 1$ を仮定すれば、任意の $0<\theta<\gamma_B$ に対して

$0<k<1$ の時は $\quad A(\cdot)^\theta\in\mathcal{E}^k([0,T];\mathcal{L}(H_\theta,H^0(\Omega)))$

$k=1$ の時は $\quad A(\cdot)^\theta\in\mathcal{E}^1([0,T];\mathcal{L}_s(H_\theta,H^0(\Omega)))$

を得る。

例 3.4. $V\in\mathcal{E}^k([0,T];H^{-1/2}(\mathbb{R}^3))\ (0<k\leq 1)$ とする。各 t ごとに例 2.4 と同様に $H^0(\mathbb{R}^3)$ の作用素 $H(t)$ が定義されて $0<\theta<3/4$ に対して $\mathcal{D}(H(t)^\theta)\equiv H^{2\theta}(\mathbb{R}^3)$ となる

が、さらに

$0 < h < 1$ の時は　$H(\cdot)^{\theta} \in \mathscr{E}^{h}([0,T];\mathscr{L}(H^{2\theta}(\mathbb{R}^3),H^0(\mathbb{R}^3)))$

$h = 1$ の時は　$H(\cdot)^{\theta} \in \mathscr{E}^{1}([0,T];\mathscr{L}_s(H^{2\theta}(\mathbb{R}^3),H^0(\mathbb{R}^3)))$

となることを得る。

4. 発展方程式

定義域が時間変数と共に変わる作用素を係数作用素に持つ線型発展方程式を考える。ある適当な $0 < \theta < 1$ について $\mathcal{D}(A(t)^{\theta})$ が一定という条件の下でこれらの方程式を解くことができる。

I. 一階の方程式　　X を Hilbert 空間、

$$(E_1) \qquad du/dt + A(t)u = f(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

を X の中の1階発展方程式とする。

定理4.1. 次の条件が満たされているとする：

i) 各 $A(t)$ は $(\pi/2\,,1)$ 型、有界な逆を持つ

ii) $\mathcal{D}(A(t)^{1/2}) \equiv V$ は t に無関係、さらに

$A(\cdot)^{-1/2} \in \mathscr{E}^{1}([0,T];\mathscr{L}_s(X,V)) \cap \mathscr{E}^{2}([0,T];\mathscr{L}_s(V,X))$

iii) $\mathcal{D}(A(t)^{*1/2}) \equiv W$ は t に無関係、さらに

$A(\cdot)^{*-1/2} \in \mathscr{E}^{1}([0,T];\mathscr{L}_s(X,W))$ 。

この時、(E_1) に対する発展作用素 $U(t,s) \in \mathscr{L}(X)$ $(0 \leq s \leq t \leq T)$ が一意的に存在する。

証明は[10]を参照。

II. 放物型方程式　　XをBanach空間、

(P)　$du/dt + A(t)u = f(t)$, $0 \leq t \leq T$

をXの中の放物型発展方程式とする。この方程式に対しては次のT. Kato [2]による結果がある。

定理4.2. 次の条件が満たされているとする：

i) 各$A(t)$は(ω, M)型$(0 \leq \omega < \pi/2)$、有界な逆を持つ

ii) $1/\theta$が自然数であるようなあるθに対して、$\mathcal{D}(A(t)^{\theta})$は$t$に無関係、さらに、ある$h > 1-\theta$に対して

$$A(\cdot)^{-\theta} \in \mathcal{C}^{h}([0,T]; \mathcal{L}(X, X_{\theta}))$$

ただし、$\mathcal{D}(A(t)^{\theta}) \equiv X_{\theta}$。

この時、(P)に対する発展作用素$U(t,s) \in \mathcal{L}(X)$ $(0 \leq s \leq t \leq T)$が一意的に存在する。

III. 二階の方程式　　XをHilbert空間、

(E_2)　$d^2u/dt^2 + A(t)u = f(t)$, $0 \leq t \leq T$

をXの中の2階発展方程式とする。$v_0 = iA(t)^{1/2}u$, $v_1 = du/dt$と未知関数を変換すると、次のHilbert空間Yの中の1階方程式

$$(\mathcal{E}_1)\quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} + \mathcal{A}(t)\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} + \mathcal{B}(t)\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = F(t) \quad , 0 \leq t \leq T$$

が得られる。ただし、

$$Y = \begin{matrix} X \\ \times \\ X \end{matrix} \quad , \quad \mathcal{A}(t) = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & A(t)^{1/2} \\ A(t)^{1/2} & 0 \end{pmatrix} , \mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} A(t)^{1/2}\, dA(t)^{-1/2}/dt & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad 。$$

定理4.3. 次の条件が満たされているとする：

i) 各 $A(t)$ は (ω, M) 型 $(0 \leq \omega < \pi)$、有界な逆を持つ

ii) $\pm i A(t)^{1/2}$, $0 \leq t \leq T$, は X 上安定

iii) $\mathcal{D}(A(t)^{1/2}) \equiv V$ は t に無関係、さらに

$A(\cdot)^{-1/2} \in \mathcal{E}^1([0,T]; \mathcal{L}_s(X,V)) \cap \mathcal{E}^2([0,T]; \mathcal{L}_s(V))$ 。

この時、$(\mathcal{E}_1)$ に対する（したがって (E_2) に対する）発展作用素 $\mathcal{U}(t,s) \in \mathcal{L}(Y)$ $(0 \leq s \leq t \leq T)$ が一意的に存在する。

証明は[10]を参照。

5. Cauchy 問題

前節の結果を、以下の偏微分方程式の Cauchy 問題に応用する。

I. 放物型方程式

$$\begin{cases} \partial u/\partial t + \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(t,x) D^\alpha u = f(t,x) & , \quad (0,T] \times \Omega \\ \sum_{|\beta|\leq m_j} b_{j\beta}(t,x') D^\beta u = 0 & , \quad (0,T] \times \partial\Omega \quad , \quad 1 \leq j \leq m \\ u(0,x) = u_0(x) & , \quad \Omega \end{cases}$$

を考える。以下の a) ~ d) を仮定すると、定理4.2 の条件 i), ii) が満たされ、したがって基本解が構成される：

a) $\sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(t,x) D^\alpha$ は強楕円型

b) $\{\sum_{|\beta|\leq m_j} b_{j\beta}(t,x') D^\beta\}_{1\leq j\leq m}$ は正規境界条件

（仮定 a) より、$0 \leq {}^\exists\omega < \pi/2$　$\arg \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(t,x)\xi^\alpha \notin [\omega, 2\pi-\omega]$ ）

c) すべての $\omega \leq \theta \leq 2\pi-\omega$ に対して [13, 第3章, 定理 8.1] で述べられている条件が成立

d) $h > 1-\theta$ に対し

$$a_\alpha \in \mathcal{E}^h([0,T]\,;\,\mathcal{D}(\bar{\Omega})) \qquad |\alpha| \leq 2m$$

$$b_{j\beta} \in \mathcal{E}^h([0,T]\,;\,\mathcal{D}(\partial\Omega)) \qquad |\beta| \leq m_j \;, \; 1 \leq j \leq m$$

ここで、θ は l を $l > \gamma_B^{-1}$ となる最小自然数としたときの l の逆数である。

II. 双曲型方程式

$$\begin{cases} \partial^2 u/\partial t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) D_i D_j u + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) D_i u + \\ a(t,x) u = f(t,x) \quad , \qquad [0,T] \times \Omega \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x') D_i u + b(t,x') u = 0 , & [0,T] \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) , \quad \partial u/\partial t\,(0,x) = u_1(x) , & \Omega \end{array}\right.$$

を考える。以下の a)〜g) を仮定すると、定理4.3の条件 i), ii) iii) が満たされ、したがって $L^2(\Omega)$ での基本解が構成できる：

a) $a_{ij}, a_i, a \in \mathcal{E}^2([0,T]; \mathcal{D}(\bar{\Omega}))$, $1 \leq i, j \leq n$

b) $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$

c) $\exists\, \delta > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqq \delta |\xi|^2$

d) $b_i, b \in \mathcal{E}^2([0,T]; \mathcal{D}(\partial\Omega))$, $1 \leq i \leq n$

e) $\sum_{i=1}^{n} b_i \nu_i \neq 0 \qquad 0 \leq t \leq T$, $x' \in \partial\Omega$

（ここで、$\nu(x') = (\nu_1(x'), \cdots, \nu_n(x'))$ は $x' \in \partial\Omega$ における外向き法線ベクトルを表わす。）

f) $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\, b_i \eta_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \nu_i \eta_j$, $0 \leq t \leq T$, $x' \in \partial\Omega$, $\eta \perp \nu(x')$

g) $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, b_i \eta_i < \sqrt{\left(\sum_{i,j} a_{ij}\nu_i\nu_j\right)\left(\sum_{i,j} a_{ij}\eta_i\eta_j\right) - \left(\sum_{i,j} a_{ij}\nu_i\eta_j\right)^2}$,

$0 \leq t \leq T$, $x' \in \partial\Omega$, $\eta \neq 0$, $\eta \perp \nu(x')$ 。

III. Schrödinger 方程式

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial u/\partial t + i(-\Delta + V(t,x) + \beta) u = f(t,x), & [0,T] \times \mathbb{R}^3 \\ u(0,x) = u_0(x) , & \mathbb{R}^3 \end{array}\right.$$

を考える。以下の仮定 a), b) の下に、定理4.1の条件 i), ii), iii) が満たされ、したがって $L^2(\mathbb{R}^3)$ での基本解が構成できる：

a) $V \in \mathcal{E}^2([0,T]; H^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$

b) $\operatorname{Im} V(t,\cdot) \leq 0 \quad , \quad 0 \leq t \leq T$。

参考文献

[1] P. Grisvard, Caractérisation de quelques espaces d'interpolation, Arch. Rat. Mech. Anal. 25 (1967), 40-63.

[2] T. Kato, Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces, Nagoya Math. J. 5 (1961), 93-125.

[3] J. Kisyński, Sur les opérateurs de Green des problèmes de Cauchy abstraits, Studia Math. 23 (1964), 285-328.

[4] J.L. Lions, Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, J. Math. Soc. Japan 14 (1962), 233-241.

[5] S. Miyatake, A sharp form of the existence theorem for hyperbolic mixed problems of second order, J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), 199-223.

[6] R. Seeley, Norms and domains of the complex powers A_B^z, Amer. J. Math. 93 (1971), 299-309.

[7] R. Seeley, Interpolation in L^p with boundary conditions, Studia Math. 44 (1972), 47-60.

[8] A. Yagi, Differentiability of families of the fractional powers of self-adjoint operators associated with sesquilinear forms, Osaka J. Math. 20 (1983), 265-284.

[9] A. Yagi, Coïncidence entre des espaces d'interpolation et des domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, C.R. Acad. Sc. Paris, 299, Série I, n° 6 (1984), 173-176.

[10] A. Yagi, Regularity of functions on an interval with values in the space of fractional powers of operators and its applications, to appear.

[11] J.L. Lions et E. Magenes, "Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications I, II" Dunod, Paris, 1968.

[12] B. Simon, "Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms," Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[13] 田辺広城，“発展方程式，”岩波書店，1975．