

プラズマ肉じ：め研究にあらわれる  
双曲型線形発展方程式

電気通信大学 牛島照夫 (Teruo Ushijima)

要旨

プラズマ肉じ：め研究においてひろく受け入れられている基本的な数理モデルとして、磁気流体系 (Magnetohydrodynamic system, MHD 系) がある。この系はプラズマの大局的挙動を良く記述していると考えられている。この系で電気抵抗が 0 のものを理想 MHD 系という。適当な未知関数の組をとれば、理想 MHD 系は保存則の形にあらわれる非線型双曲型発展系である。時間に依存せず、速度が 0 である MHD 系の解を静止平衡解という。静止平衡解が線形的に安定であるか否かを同じ基準としての線形安定理論は、Bernstein et al. [1] などによって物理としては確立されたものになっており、この基準にもとづき多くの解析的ならびに数値的な研究がなされている。

本稿では、この線形安定理論で主役を果たす、数学的には

や、古典的ではないと思われる双曲型線形発展方程式を紹介し、しかるべき条件を静止平衡解がみたしているならば、この方程式はプラズマ領域上での  $L^2$  空間における定作用素係数の二階の常微分方程式の初期値問題として考察できることを述べる。

### 1. 理想MHD系と静止平衡解.

このモデルでは、プラズマは空間内の有界領域  $\Omega_p$  全体に広がっている一成分流体と考える。そこで以下の方程式系によって記述されることを考える。

$$(1) \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} v,$$

$$(2) \rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla P + J \times B,$$

$$(3) \frac{D}{Dt} (P\rho^{-\gamma}) = 0,$$

$$(4) \frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot} E,$$

$$(5) \operatorname{div} B = 0,$$

$$(6) \operatorname{rot} B = \mu J,$$

$$(7) E + v \times B = 0.$$

スカラー関数  $\rho$ , ベクトル関数  $v$  は、それぞれ、プラズマの密度、速度をあらわす。スカラー関数  $P$  は圧力、ベクトル関数  $B$ ,  $E$ ,  $J$  は、それぞれ、磁束密度、電場、電流密度である。慣習的に  $B$  は磁場とよばれている。  $\mu$  は真空の

透磁率,  $\gamma$  は比熱比をあらわす正定数である。質量微分:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla), \quad \nabla = \text{grad} \quad \text{を用い, } \times \text{ は通常のベクトルの外積である。}$$

(1) は質量保存則であり, (2) の運動方程式の力の項は流体の粘性を考慮せずに圧力勾配と電磁場の相互作用による  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  を主要項とする。(3) は断熱条件の式である。

(4) はマクスウェル方程式を構成するファラデーの電磁誘導の法則であり, (5) は単極磁場の不存在を示す。

(6) はアンペールの電流磁気関係の法則:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H}$$

において電気変位  $\mathbf{D}$  の時間変化が注目している肉じ: 観測の特徴的な時間には比べて無視出来るものとし, 構成法則:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

を代入して得たものである。(7) は, オームの法則であつて, 有限抵抗の場合は, ローレンツ力  $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  に対して

$$\eta \mathbf{J} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

によつて電流  $\mathbf{J}$  が定まるのであるが, 理想系であることより電気抵抗  $\eta$  は 0 である。

(6) を (2) に, (7) を (4) に代入して,

$$(2) \quad \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla P + \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B},$$

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot } (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

結局、プラズマ領域  $\Omega_p$  における支配方程式系は (1), (2), (3), (4), (5) となる。

プラズマ領域  $\Omega_p$  の肉包は有界領域  $\Omega$  に完全に含まれているとする。  $\Omega_p$  と  $\Omega$  の境界  $P$  をそれぞれ、  $P_p$  と  $P$  とあらわす。  $P$  は完全電気伝導度をもっているものとする。  $\Omega_v = \Omega - \overline{\Omega_p}$  を真空領域と考える。以下では、  $\Omega_p, \Omega_v, \Omega$  は全て連結しているものとする。(図1参照)。

真空領域  $\Omega_v$  では、

$$(8) \quad \rho = P = 0, \quad v = J = 0,$$

$$(4)_v \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\text{rot} E,$$

$$(5)_v \quad \text{div} B = 0,$$

$$(6)_v \quad \text{rot} B = 0,$$

が成立していると考え、境界  $P$  では

$$(9) \quad n \times E = 0,$$

又は、

$$(10) \quad (B, n) = 0$$

を与える。  $n$  は  $P$  の各点における外向き単位法線である。

プラズマ境界  $P_p$  では、

$$(10)_{p,v} \quad (B_p, n) = (B_v, n) = 0,$$

$$(11) \quad (E_p + v_p \times B_p) \times n = (E_v + v_p \times B_v) \times n,$$

$$(12) \quad P_p + \frac{1}{2\mu} B_p^2 = \frac{1}{2\mu} B_v^2$$

の三条件が成り立っているものとする。ここで添字  $p$  と  $v$  は、それぞれ、プラズマ領域側からと真空領域側からの境界値をあらわす。(10) と (10) $_{p,v}$  は、 $P$  と  $P_p$  がいわゆる磁気面であることを要請している。(11) は、プラズマの動きに沿って測った電界の接平面成分の連続性を要請している。(12) は圧力平衡の式とよばれており、線形化問題が非古典的付境界値問題にたどる源にたどっている。

(1) ~ (12) をみたす解で、速度が 0 で時間に依存しないものを静止平衡解という。 $\{p, v (=0), P, J, B, E\}$  が平衡解であるとする。  $\{P, J, B\}$  は

$$(13) \begin{cases} \nabla P = J \times B, \operatorname{div} B = 0, \operatorname{rot} B = \mu J & \text{in } \Omega_p, \\ P = 0, \operatorname{div} B = 0, \operatorname{rot} B = 0 & \text{in } \Omega_v, \\ (B, n) = 0 & \text{on } T_{p \cap P}, \\ P_p + \frac{1}{2\mu} B_p^2 = \frac{1}{2\mu} B_v^2 & \text{on } T_p \end{cases}$$

をみたすものとして記述される。

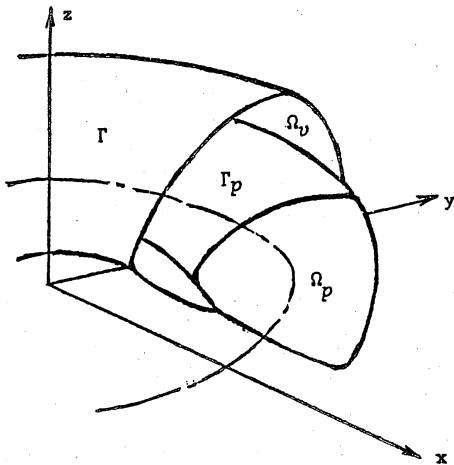


図1. トーラス状  
プラズマ肉じりめの模式図

## 2. 線形化MHD方程式の発見的導出.

静止平衡解  $\{ \rho, v=0, P, J, B, E \}$  が与えられる  
 としよう。  $\{ P, J, B \}$  は, (1.3) と  $\kappa=1$  としている。  
 この解の近くで次の形をした理想MHD系の解  $\{ \tilde{\rho}, \tilde{v},$   
 $\tilde{P}, \tilde{J}, \tilde{B}, \tilde{E} \}$  が存在したと考える。

$$(1) \begin{cases} \tilde{\rho} = \rho + \varepsilon \rho_1, & \tilde{v} = \varepsilon v_1, & \tilde{P} = P + \varepsilon P_1, \\ \tilde{J} = J + \varepsilon J_1, & \tilde{B} = B + \varepsilon B_1, & \tilde{E} = E + \varepsilon E_1, \end{cases}$$

ここで  $\varepsilon$  は十分小さい実のパラメータである。プラズマ領域  
 $\Omega_p$  は、変換:

$$(2) \quad \tilde{r}(t, r) = r + \varepsilon \xi(t, r)$$

によって  $\tilde{\Omega}_p$  にうつされると考える。(1) と (1.1),  
 (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) に形式的に代入する。  
 その方程式系を  $\varepsilon$  の中で整理し,  $\varepsilon$  の一次の項の係数と比較  
 することによって  $\{ \rho_1, v_1, P_1, J_1, B_1 \}$  に関する次の  
 線形系が得られる。

$$(3) \begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_1) = 0, \\ \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + J \times B_1 + J_1 \times B, \\ \frac{\partial P_1}{\partial t} + (v_1, \nabla) P + \gamma P \operatorname{div} v_1 = 0, \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} = \operatorname{rot}(v_1 \times B), \\ \operatorname{div} B_1 = 0. \end{cases}$$

これは, 各時刻  $t$  で  $\Omega_p \cap \tilde{\Omega}_p$  における方程式と考える

るべきである。こゝでは、(3)が、全ての時刻  $t = \tau$  について  $\Omega_p$  で成立するものとする。初期条件として、

$$(4) \quad \xi(0, r) = 0, \quad r \in \Omega_p.$$

および

$$(5) \quad p_1(0, r) = \bar{P}_1(0, r) = 0, \quad B_1(0, r) = 0 \\ J_1(0, r) = 0, \quad r \in \Omega_p$$

を要請する。

$$(6) \quad v(t, r(t, r_0)) = \frac{d}{dt} \tilde{r}(t, r_0) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \xi(t, r_0).$$

であり、ライプニッツ-展開可能とすれば、

$$v(t, r(t, r_0)) = \varepsilon v_1(t, r_0) + O(\varepsilon^2)$$

と仮定するから (6) より、

$$(7) \quad v_1(t, r) = \frac{\partial}{\partial t} \xi(t, r), \quad t > 0, \quad r \in \Omega_p$$

の成立を認めよう。(7)を(3)に代入し初期条件(4)

(5)を考慮して、

$$(8) \quad \begin{cases} p_1 = -\operatorname{div}(p \xi), \\ p \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} B \times B + \operatorname{rot} B_1 \times B), \\ p_1 = -(\xi, \nabla) p - \delta p \operatorname{div} \xi, \\ B_1 = \operatorname{rot}(\xi \times B) \end{cases}$$

が  $\Omega_p$  で成立しているものとする。

真空領域  $\Omega_v$  では、 $\tilde{B}$  と  $\tilde{E}$  を (1.4)<sub>v</sub>, (1.5)<sub>v</sub>, (1.6)<sub>v</sub> に代入して、 $\varepsilon$  の一次の係数を比較して、

$$(9) \begin{cases} \frac{\partial B_1}{\partial t} = -\operatorname{rot} E_1, \\ \operatorname{div} B_1 = 0, \\ \operatorname{rot} B_1 = 0 \end{cases}$$

が成立しているものと考える。さらに次の性質(10)をみたす  $B_1$  のベクトルポテンシャル  $\alpha$  が存在すると考える。

$$(10) \begin{cases} B_1 = \operatorname{rot} \alpha, & E_1 = -\frac{\partial \alpha}{\partial t} & \text{in } \Omega_V, \\ n \times \alpha(0, \mathcal{P}) = 0, & & \mathcal{P} \in \Gamma_P. \end{cases}$$

(9) の方程式をみたすために

$$(11) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \alpha = 0 \quad \text{in } \Omega_V,$$

を要請し, (1.10) をみたすために

$$(12) \quad n \times \alpha = 0 \quad \text{on } \mathcal{P}.$$

を要請する。

接続条件(1.11)に対応する条件を導出しよう。

$$(1.7) \quad \tilde{E} + \tilde{v} \times \tilde{B} = 0 \quad \text{in } \tilde{\Omega}_P$$

より,  $\tilde{E}$  の1次の項の係数比較により

$$(13) \quad E_{1P} + v_1 \times B_P = 0 \quad \text{in } \overline{\Omega}_P$$

であると考える。(1.11)の両辺に  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{B}$  を代入することにより

$$(14) \quad n \times (E_{1P} + v_1 \times B_P) = n \times (E_{1V} + v_1 \times B_V) \quad \text{on } \mathcal{P}$$

であると考える。(14)の左辺に(13), 右辺に(10)の方程式と(7)を代入することにより。



$$\begin{aligned}
0 &= n \times \left( -\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \times B_v \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (n \times (-\alpha + \xi \times B_v)) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (-n \times \alpha + (n, B_v) \xi - (n, \xi) B_v).
\end{aligned}$$

(1.10)<sub>v</sub> により.

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial t} (n \times \alpha + (n, \xi) B_v) = 0 \quad \text{on } T_p.$$

(5) の初期条件が  $T_p$  上でも成立するとし, (10) の第3式をあわせ使えば, (15) より.

$$(16) \quad n \times \alpha = -(n, \xi) B_v \quad \text{on } T_p$$

となる。この(16)を(1.11)から遺伝した接続条件と見なそう。

接続条件(1.12)に対応する条件は次のようにして導かれる。 $\mathcal{N}_0$  を  $T_p$  の点とする。 $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t, \mathcal{N}_0) = \mathcal{N}_0 + \varepsilon \xi(t, \mathcal{N}_0)$  を  $\mathcal{N}_0$  に対応する  $\widetilde{\Omega}_p$  の境界  $\widetilde{T}_p$  上の点とする。擾動  $\varepsilon$  受けた圧力  $\widetilde{P}(t, \mathcal{N})$  に対して次のテイラー展開が成立する := と認める:

$$\widetilde{P}(t, \mathcal{N}) = \widetilde{P}(t, \mathcal{N}_0) + (\varepsilon \xi(t, \mathcal{N}_0), \nabla) \widetilde{P}(t, \mathcal{N}_0) + O(\varepsilon^2).$$

$\widetilde{P} = P + \varepsilon P_1$  であるから

$$(17) \quad \widetilde{P}(t, \mathcal{N}) = P(\mathcal{N}_0) + \varepsilon (P_1(t, \mathcal{N}_0) + (\xi(t, \mathcal{N}_0), \nabla) P(\mathcal{N}_0)) + O(\varepsilon^2).$$

圧力と同様に, 次の展開の成立を認める。

$$(18) \quad \widetilde{B}_p(t, \mathcal{N}) = B_p(\mathcal{N}_0) + \varepsilon (B_{1,p}(t, \mathcal{N}_0) + (\xi(t, \mathcal{N}_0), \nabla) B_p(\mathcal{N}_0)) + O(\varepsilon^2),$$

$$(19) \quad \widetilde{B}_v(t, \mathcal{N}) = B_v(\mathcal{N}_0) + \varepsilon (B_{1,v}(t, \mathcal{N}_0) + (\xi(t, \mathcal{N}_0), \nabla) B_v(\mathcal{N}_0)) + O(\varepsilon^2).$$

(17), (18), (19) を,

$$(1.12) \quad \widetilde{P}_p + \frac{1}{2\mu} \widetilde{B}_p^2 = \frac{1}{2\mu} \widetilde{B}_v^2 \quad \text{on } \widetilde{T}_p$$

に代入して,  $\varepsilon$  の 1 次 の 項 の 係 数 を 比 較 し て

$$(20) \quad P_p + (\xi, \nabla) P + \frac{1}{\mu} (B_p, B_p + (\xi, \nabla) B_p) \\ = \frac{1}{\mu} (B_v, B_v + (\xi, \nabla) B_v) \quad \text{on } T_p.$$

を得る。 (8) の 式 3 式, 式 4 式 と (10) の 式 1 式 を 代 入 す  
ると。

$$(21) \quad -\delta P \operatorname{div} \xi + \frac{1}{\mu} (B_p, \operatorname{rot} (\xi \times B_p) + (\xi, \nabla) B_p) \\ = \frac{1}{\mu} (B_v, \operatorname{rot} \alpha + (\xi, \nabla) B_v) \quad \text{on } T_p$$

となる。この (21) が (1.12) から 遺 伝 し た 接 続 条 件 で あ  
る。結局 (8) の 式 2 式, (11), (12), (16), (21)  
から我々は次の線形化 MHD 方程式 (LMHD 系と略す) の  
初期値境界値問題を導く。

問題 バックル値関数の組  $\{\xi, \alpha\}$  :

$$\xi = \xi(t, r) : [0, \infty) \times \overline{\Omega}_p \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\alpha = \alpha(t, r) : (0, \infty) \times \overline{\Omega}_v \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

で次の条件 (22) をみたすものを求めよ。

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + K \xi = 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times \Omega_p, \\ \xi(0, r) = 0 \quad \text{in } \Omega_p, \\ \frac{\partial}{\partial t} \xi(0, r) = v(r) \quad \text{in } \Omega_p, \\ -(\xi, n) B_v = \alpha \times n \quad \text{on } (0, \infty) \times T_p, \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} L(\xi, \alpha) = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_p, \\ \text{rot rot } \alpha = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \Omega_v, \\ n \times \alpha = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma. \end{cases}$$

∴ ∴

$$(23) \quad K\xi = -\nabla\{(\xi, \nabla P) + \delta P \operatorname{div} \xi\} \\ - \frac{1}{\mu} \{ \operatorname{rot} B \times \operatorname{rot}(\xi \times B) + [\operatorname{rot} \operatorname{rot}(\xi \times B)] \times B \},$$

$$(24) \quad L(\xi, \alpha) = -\delta P \operatorname{div} \xi + \frac{1}{\mu} (B_p, \operatorname{rot}(\xi \times B_p) + (\xi \nabla) B_p) \\ - \frac{1}{\mu} (B_v, \operatorname{rot} \alpha + (\xi \nabla) B_v).$$

### 3. 線形化MHD作用素の確立.

前節の問題は、ヒルベルト空間  $X = \{L^2(\Omega_p)\}^3$  における発展方程式:

$$(1) \quad \begin{cases} M \frac{d^2 \xi}{dt^2} + A\xi = 0, & t > 0, \\ \xi(0) = \xi^1, & \frac{d\xi}{dt}(0) = \xi^0 \end{cases}$$

において初期値を  $\{\xi^1, \xi^0\} = \{0, v\}$  とした問題と見なせることを解説する。(1)における  $M$  は、静止平衡解における質量  $\rho = \rho(r)$  を乗ずる作用素であり、

$$(2) \quad 0 < \underline{\rho} \leq \rho(r) \leq \bar{\rho} < \infty, \quad r \in \Omega_p$$

なる正定数  $\underline{\rho}$  と  $\bar{\rho}$  が存在するものと仮定している。  $A$  は微分作用素  $K$  の空間  $X$  での実現とみなせる自己共役作用素である。静止平衡解に対して次の条件 (A.1) ~ (A.6) を仮

定する。

(A.1)  $\Omega, \Omega_p, \Omega_v$  はいずれも有界な連結領域で、その境界は  $C^3$  級である。

(A.2)  $B|_{\Omega_p}$  と  $B|_{\Omega_v}$  は、それぞれ  $C^2(\bar{\Omega}_p)$  と  $C^2(\bar{\Omega}_v)$  に属す拡張をもつ。

(A.3)  $P|_{\Omega_p}$  は、正であり、 $C^2(\bar{\Omega}_p)$  に属す拡張をもつ。  
( $P_p$  は 0 になり得る。) その臨界点集合  $C_p = \{r \in \Omega_p : (\nabla P)(r) = 0\}$  は、有限個の連結成分よりなり、おのおのの連結成分は、 $C^3$  級の単純曲線であるか、又は  $C^3$  級の曲面であつてその曲面上の各点で  $B$  が接平面に含まれている、すなわち磁気面である、かのいずれかである。

(A.4)  $\bar{P}_1 = \sup_{r \in \Omega_p - C_p} |(e, \text{rot } e)| < \infty$   
( $e = \nabla P / \|\nabla P\|_{\mathbb{R}^3}$ )

又は、

$$\bar{P}_2 = \sup_{r \in \Omega_p} \frac{\|\nabla P\|_{\mathbb{R}^3}}{|P|^{1/2}} < \infty$$

のいずれかが成立つ。

(A.5)  $B_p$  は  $\bar{P}_p$  上で決して 0 にはらはないか、又は、

$P$  は  $\Omega_p$  上で正定数で下からおさえられる  
のいずれかが成立つ。

(A.6)  $\Omega_p$  から  $\Omega_{\nu}$  へ向かう  $P_p$  上の単位法線ベクトルに沿った微分  $\frac{\partial}{\partial n}$  に関して食い違い

$$G = \frac{\partial}{\partial n} \frac{B^2}{2\mu} \Big|_{\nu} - \frac{\partial}{\partial n} \left( P + \frac{B^2}{2\mu} \right) \Big|_p$$

は,  $P_p$  上の非負値関数で, その平方根  $\sqrt{G}$  は  $P_p$  上で  $C^1$  級である。

自己共役作用素  $A$  を線形化 MHD 作用素とよぶ。この作用素は (2.22) のオ4式からオ7式で表わされるベクトルポテンシャルに関する条件とある意味で含んだものである。プラズマ領域  $\Omega_p$  上のベクトル関数  $\xi$  が与えられると (2.22) のオ4式からオ7式をみたす  $\alpha$  は存在し,  $\text{rot } \alpha$  は  $\xi$  に対応している意味で一意的に決まる。したがってこのオ4式からオ7式を  $\xi$  に関する同次境界条件:

$$(3) \quad L(\xi) = 0 \quad \text{on } P_p$$

と考えるというのが, 我々の主張である。この推論の基礎になるのは, Morrey [4] の Theorem 7.8.2 からしたがり次の補題1である。

補題1  $\Omega$  を  $\mathbb{R}^3$  内の有界領域で  $C^2$  級の境界  $\Gamma$  をもつものとする。任意の  $\eta \in H^1(\Omega)$  に対して, 次の条件をみたす  $\omega \in H^1(\Omega)$  が存在する。

$$|\text{rot rot } \omega = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$\int n \times \omega = n \times \eta \quad \text{on } \Gamma.$$

上の補題において,  $\Omega$ 上の1階のソボレフ空間を $H^1(\Omega)$ とし,  $H^1(\Omega) = \{H^1(\Omega)\}^3$ である. 微分作用素 $\text{rot rot}$ は超関数の意味であり,  $n$ は $\Gamma$ 上の外向き単位法線ベクトルである. 補題1から次の命題2がしたがう.

命題2 任意の $\xi \in H^1(\Omega_p)$ に対して次の条件をみたす $\alpha \in H^1(\Omega_v)$ が存在する.

$$\begin{cases} \text{rot rot } \alpha = 0 & \text{in } \Omega_v, \\ n \times \alpha = -(n, \xi) B_v & \text{on } \Gamma_p, \\ n \times \alpha = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

さらにこのように $\xi$ に対して,  $\text{rot } \alpha$ は一意的に定まる.

この補題によって,  $V_0 = H^1(\Omega_p)$ 上に次のように7°ラズマエネルギー二次形式 $a(\xi, \eta)$ を定めることができる.

$$(4) \quad \begin{cases} a = a_p + a_s + a_v, \quad a_p = a_1 + a_2, \\ a_1(\xi, \eta) = \int_{\Omega_p} \left\{ \chi P \text{div } \xi \text{div } \eta + \frac{1}{\mu} (\text{rot } \xi \times B), \text{rot } (\eta \times B) \right\} dV \\ a_2(\xi, \eta) = \int_{\Omega_p} \left\{ (\xi, \nabla P) \text{div } \eta - \frac{1}{\mu} (\text{rot } \xi \times B), \eta \times \text{rot } B \right\} dV \\ a_s(\xi, \eta) = \int_{\Gamma} G(\xi, n) (\eta, n) dP, \\ a_v(\xi, \eta) = \int_{\Omega_v} \frac{1}{\mu} (\text{rot } \alpha, \text{rot } \beta) dV. \end{cases}$$

ここで、 $a_2$  の右辺における  $G$  は (A.6) で定めたものであり、 $a_2$  の右辺における  $\alpha$  は命題 2 で  $\xi$  に対して定まるものであり、 $\beta$  は命題 2 の  $\xi$  を  $\eta$  として定まるものである。 $a_2(\xi, \eta)$  は見かけ上非対称であるが、 $P, B$  が静止平衡解であることと、臨界点集合  $CP$  に対する仮定 (A.3) を使って  $\xi$  と  $\eta$  について対称であることを示すことができる。

一般に  $H^m(\Omega) = \{H^m(\Omega)\}^3$  とする。

命題 3  $\xi \in H^2(\Omega_p)$  と  $\eta \in H^1(\Omega_p)$  に対して、

$$(5) \quad \int_{\Omega_p} (K\xi, \eta) dV = a(\xi, \eta) + \int_{\Gamma_p} L(\xi, \alpha)(m, \eta) dP$$

が成立する。(5) の右辺の  $\alpha$  は、命題 2 に基づいて  $\xi$  に対して定まるものである。

この命題 3 は、境界条件:  $L(\xi, \alpha) = 0$  は、微分作用素  $K$  に対するいわゆる自然境界条件の役割をしていることを示唆している。本質的境界条件に対応する

$$(6) \quad (m, \eta) = 0 \quad \text{on } \Gamma_p$$

を採用する問題は固定境界問題と呼ばれている。擾動変位として境界と直交する成分を持つものは許されないことを意味している。

仮定 (A.1) ~ (A.6) を使えば、対称 = 次形式  $a(\xi, \eta)$

は下半有界であることがわかる。可存ゆらある  $\kappa_0 \in \mathbb{R}$  が存在して、

$$(7) \quad a(\xi, \xi) + \kappa(\xi, \xi) \llcorner^2(\Omega_p) \geq 0, \quad \kappa \geq \kappa_0, \quad \xi \in H^1(\Omega_p)$$

を示すことが出来る。  $\therefore \therefore \llcorner^2(\Omega_p) = \{L^2(\Omega_p)\}^3$  である。

Lüst-Martensen [3] にある真空における摂動磁場の表示式をソボレフ空間の枠で証明しなおした上で、

$$a_\kappa(\xi, \eta) = a(\xi, \eta) + \kappa(\xi, \eta) \llcorner^2(\Omega_p) \text{ が, } V_0 = H^1(\Omega_p) \text{ 上で, } \kappa \geq \kappa_0 \text{ 可存可成である, 可存ゆら, } \{\xi_m\} \subset V_0 \text{ が,}$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\xi_m\| \llcorner^2(\Omega_p) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \\ \text{かつ} \\ a_\kappa(\xi_m - \xi_{m'}) \rightarrow 0 \quad (m, m' \rightarrow \infty) \\ \text{可存可成} \\ a_\kappa(\xi_m) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty), \end{array} \right.$$

( $a_\kappa(\xi) = a_\kappa(\xi, \xi)^{1/2}$ ) であることが出来る。  $V_0$  の  $a_\kappa$  ノルムによる完備化を  $V$  とすると、

$$(9) \quad V \text{ は, } \llcorner^2(\Omega_p) \text{ の稠密な部分集合}$$

に存在することが、 $a_\kappa$  の可成性から分かる。このとき、連続性によって二次形式  $a_\kappa(\xi, \eta)$  は、 $V$  を定義域とする二次形式に拡張される。自明な修正によって  $a_\kappa(\xi, \eta)$  を複素ヒルベルト空間  $\llcorner^2(\Omega_p)$  において定義域を  $V$  とする正定値な



同じにエルミート形式であると見なすことができる。 Kato [2] の第6章の Theorem 2.23 によって、次の性質 (10), (11), (12) をもつ自己共役作用素  $A_\kappa$  がただ一つ存在する。

(10) 定義域  $D(A_\kappa)$  は  $a_\kappa$  の意味で  $V$  で稠密。

(11)  $(A_\kappa \xi, \eta)_{L^2(\Omega_p)} = a_\kappa(\xi, \eta)$ ,  $\xi \in D(A_\kappa)$ ,  $\eta \in V$ .

(12)  $D(A_\kappa^{1/2}) = V$  であり、

$$(A_\kappa^{1/2} \xi, A_\kappa^{1/2} \eta) = a_\kappa(\xi, \eta), \quad \xi, \eta \in V.$$

そこで我々は、 $\kappa > \kappa_0$  に対して、

$$(13) \quad A = A_\kappa - \kappa, \quad D(A) = D(A_\kappa)$$

によつて、自己共役作用素  $A$  を定義し、これを LMHD 作用素と呼ぶことにする。かくして、発展方程式 (1) の意味が確定する。2節の問題の解が存在し、十分に滑らかであれば (1) の解であることは容易にわかる。

#### 4. プラズマエネルギーの下半有界性.

本節では、仮定 (A.4) で、 $\bar{p}_1 < \infty$  の場合の考察を行なう。出発点となるのは次の補題である。

補題1.  $\Omega \in \Omega_p - C_p$  において3ベクトル関数  $E$  と  $F$  を

$$(1) \quad E = n \nabla B \times e, \quad F = (B, \nabla) e - (e, \nabla) B + n \nabla B \times e$$

に  $\xi$  を定める ( $e = \nabla P / \|\nabla P\|_{\mathbb{R}^3}$ ). このとき,  $\xi \in V_0$

$$(2) \quad a_p(\xi, \xi) = \int_{\Omega_p} \left\{ \chi P |\operatorname{div} \xi|^2 + \frac{1}{\mu} \|\operatorname{rot}(\xi \times B) + (\xi, e) E\|^2 - \frac{1}{\mu} (E, F) |(\xi, e)|^2 \right\} dV.$$

この補題を示すための計算はかなり長いので省略する。

被積分関数は  $C_p$  上では適当に定めるものとする。さて

$$(3) \quad \begin{cases} \underline{M} = \inf_{\xi \in \Omega_p - C_p} (E, F), & \bar{M} = \sup_{\xi \in \Omega_p - C_p} (E, F), \\ N = \sup_{\xi \in \Omega_p - C_p} \|E\|_{\mathbb{R}^3}^2 \end{cases}$$

とおく。仮定 (A.2) より,  $N$  は有限である。

命題 2.  $\bar{P} < \infty$  は,  $\underline{M}$  と  $\bar{M}$  が有限である: とを保証する。

証明. ベクトル関数の等式

$$\nabla(e, B) = (B, \nabla)e + (e, \nabla)B + \operatorname{ex} \operatorname{rot} B + B \times \operatorname{rot} e, \quad \xi \in \Omega_p - C_p$$

において,  $(e, B) = 0$  であるから

$$(4) \quad (B, \nabla)e = -(e, \nabla)B - \operatorname{ex} \operatorname{rot} B - B \times \operatorname{rot} e, \quad \xi \in \Omega_p - C_p$$

(1) の第 2 式に (4) を代入すると

$$F = -2(e, \nabla)B + 2 \operatorname{rot} B \times e - B \times \operatorname{rot} e, \quad \xi \in \Omega_p - C_p.$$

これより

$$(5) \quad (E, F) = 2 \left\{ \|\operatorname{rot} B \times e\|^2 - (e, \nabla)B, \operatorname{rot} B \times e \right\} - (\operatorname{rot} B \times e, B \times \operatorname{rot} e), \quad \xi \in \Omega_p - C_p.$$

ベクトルの等式:  $(A \times B, C \times D) = (A, C)(B, D) - (A, D)(B, C)$

を(5)の第2項に使うと.

$$\begin{aligned} (\mathcal{N}A B \times e, B \times \mathcal{N}A e) &= (\mathcal{N}A B, B) (e, \mathcal{N}A e) \\ &\quad - (e, B) (\mathcal{N}A B, \mathcal{N}A e), \quad \forall e \in \Omega_p - C_p \end{aligned}$$

再び,  $(e, B) = 0$  なることに依り.

$$(6) \quad (\mathcal{N}A B \times e, B \times \mathcal{N}A e) = (\mathcal{N}A B, B) (e, \mathcal{N}A e), \quad \forall e \in \Omega_p - C_p.$$

(6)  $\Sigma(5) = A \times A$  には.

$$(7) \quad (E, F) = 2 \{ \|\mathcal{N}A B \times e\|^2 - ((e, \nabla) B, \mathcal{N}A B \times e) \} \\ - (\mathcal{N}A B, B) (e, \mathcal{N}A e), \quad \forall e \in \Omega_p - C_p.$$

(7) から, 仮定(A.2)により  $\bar{P}_1 < \infty$  であるから.

$$\sup_{\forall e \in \Omega_p - C_p} |(E, F)| < \infty.$$

すなわち,  $\underline{M}$  と  $\bar{M}$  は有限である.

命題3. 仮定(A.4)において  $\bar{P}_1 < \infty$  を仮定して, 3と

する.  $\kappa_0 = \frac{1}{\mu} \max(N + \bar{M}, 3N - \underline{M})$  とおくと

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} a_1(\xi, \xi) + (\kappa - \kappa_0) (\xi, \xi)_{L^2(\Omega_p)} \\ \leq a_p(\xi, \xi) + \kappa (\xi, \xi)_{L^2(\Omega_p)} \\ \leq \frac{3}{2} a_1(\xi, \xi) + (\kappa + \kappa_0) (\xi, \xi)_{L^2(\Omega_p)}, \quad \xi \in H^1(\Omega_p). \end{cases}$$

証明. シュワルツの不等式による.

この命題3から, プラズマエネルギー二次形式  $a_p(\xi, \eta)$  は  
下半有界であり, 仮定(A.6)を考慮すると, 全エネルギー

に対応する二次形式  $a(x, y)$  も下半有界になる。

ところで、現実的なプラズマのモデルに対しては、条件  $\bar{P}_1 < 0$  はどうなるであろうか。次の命題を挙げてよう。

命題4 1)  $z$  方向に周期的な円柱プラズマ, 2) 単純巢をもちトロイダルプラズマ, においては,  $\bar{P}_1 = 0$  である。

命題4を解説するために、円柱プラズマとトロイダルプラズマについて説明する。プラズマが柱状であるとは、適当な直交座標系  $R = (x, y, z)$  をとったとき、プラズマを記述する量が  $z$  方向に依存しないことである。柱状プラズマが円柱プラズマであるとは、適当な円柱座標系  $R = (r, \theta, z)$  をとったとき、これらの量が  $\theta$  と  $z$  に依存しないことである。通常、円柱プラズマは  $z$  方向に周期  $L$  をもち  $\theta$  と  $z$  である。プラズマが、トロイダルプラズマであるとは、適当な円柱座標系  $R = (r, z, \theta)$  をとったとき、これらの量が  $\theta$  に依存しないことである。

円柱プラズマにおいて、

$$P = P(r), \quad B = B_r(r) e_r + B_\theta(r) e_\theta + B_z(r) e_z$$

と置く。単位ベクトル  $e_r, e_\theta, e_z$  は、それぞれ、 $r, \theta, z$  方向の単位ベクトルに右手系をなすものである。静

止平衡条件 (1.13) のうち  $\Omega_p$  と  $\Gamma_p$  に関係する条件は,

$$(9) \quad B_r \equiv 0, \quad 0 < r < a,$$

$$(10) \quad \mu \frac{dP}{dr} + B_z \frac{dB_z}{dr} + \frac{B_\theta}{r} \frac{d}{dr}(rB_\theta) = 0, \quad 0 < r < a$$

に帰着される。こゝで プラズマ領域は

$$(11) \quad \Omega_p = \{ r = (r, \theta, z) : 0 \leq r < a \}$$

であると仮定している。実際 (9) は,  $\operatorname{div} B = 0$  と  $\Gamma_p$  上

$(B, n) = 0$  なることによって得られる。こゝから (10) は,

$$\nabla P = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} B \times B \text{ より } (1) \text{ がう。 } B_\theta(r), B_z(r)$$

と  $P(r)$  を与えることによって,  $\Omega_p$  での静止平衡解を作る

ことが出来る。この場合

$$e = \operatorname{sign} \left( \frac{dP}{dr} \right) e_r, \quad r \in \Omega_p - C_p$$

であり,  $\operatorname{rot} e_r = 0$  であるから,

$$\operatorname{rot} e = 0, \quad r \in \Omega_p - C_p$$

よって,  $\overline{P}_1 = \sup_{r \in \Omega_p - C_p} |(e, \operatorname{rot} e)| = 0$  が成り立つ。

円柱プラズマとトロイダルプラズマを比較すると、円柱プラズマにおける  $B_\theta$  と  $B_z$  は、トロイダルプラズマにおけるポロイダル磁束密度とトロイダル磁束密度に対応する。天

下りのであるが、トロイダルプラズマにおける平衡座標系

$(\psi, \chi, \theta)$  を導入する。関数  $\psi = \psi(r, z)$  は、いわゆる

グラド・シャフラフ方程式:

$$(12) \quad -\Delta^* \psi = \mu r^2 \frac{dP}{d\psi} + \frac{d}{d\psi} \left( \frac{T}{2} \right)^2 \quad \text{in } \omega_p$$

の解に付帯条件:

$$(13) \quad \begin{cases} -\Delta^* \psi = 0 & \text{in } \omega_v, \\ \psi_a < \psi < \psi_b & \text{in } \omega_p, \\ \psi = \psi_b & \text{on } \delta_p = \partial \omega_p, \\ \psi_a < \psi < \psi_c & \text{in } \omega_v, \\ \psi = \psi_c & \text{on } \delta = \partial \omega, \end{cases}$$

をみたすものである。ここで

$$\Delta^* = r \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

であり,  $P$  と  $T$  は  $\psi$  の与えられた関数であるとする ( $P = P(\psi)$ ,  $T = T(\psi)$ )。  $\omega$  は,  $r$ - $z$  右半平面内の領域で  $\omega_p$  をその内部に含み,  $\omega_v = \omega - \overline{\omega_p}$  であり,  $\omega$ ,  $\omega_p$ ,  $\omega_v$  は連結しているものとする。  $\psi_a$ ,  $\psi_b$ ,  $\psi_c$  は, 実の定数である。

(12)-(13) のための存在解  $\psi$  が得られた場合に.

$$(14) \quad \begin{cases} B = B_r e_r + B_z e_z + B_\theta e_\theta, \\ B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad B_\theta = \frac{T}{r}, \\ \Omega_p = \{(r, z, \theta) : (r, z) \in \omega_p, 0 \leq \theta < 2\pi\} \end{cases}$$

と定め,  $\Omega_v$  と  $\Omega$  を  $\Omega_p$  と同様に,  $\omega_v$  と  $\omega$  を使って定義する。このとき,  $\{P, \frac{1}{r} \nabla \psi, B\}$  は,  $\Omega_p$  にあつた静止平衡解の条件 (1.13) をみたす。さらに,

$$(15) \quad P(\psi) = 0, \quad T(\psi) = T(\psi_b - 0) \quad \text{for } \psi \geq \psi_b$$

を仮定すると,  $\psi$  が " $\frac{\partial \psi}{\partial n}|_p = \frac{\partial \psi}{\partial n}|_v$  on  $\delta_p$ " をみたす。

うに滑らかに行っているならば, (1.13) の他の条件もみたされることになる。このようにして, 自由境界型問題である (12)-(13) を解くことにより, トロイダルプラズマの静止平衡解  $\{P, J, B\}$  を定めることができる。

さて, 問題 (12)-(13) の解  $\psi = \psi(r, z)$  が  $\omega_p$  で十分滑らかであり次の諸条件 (16) ~ (19) を満たしているとする。

(16)  $\psi$  は  $\omega_p$  の最小値  $\psi_a$  を内部の唯一点  $(r_a, z_a) \in \omega_p$  とする。

(17) 任意の  $\psi \in (\psi_a, \psi_a)$  に対して, 等高線  $\Gamma_\psi = \{(r, z) : \psi(r, z) = \psi\}$  は自分自身と交差しはなからぬ曲線である。

(18) 変数  $r$  と  $z$  の関数  $\chi(r, z)$  が  $\omega_p$  上で  $\psi, \chi$  は

$\omega_p - \{(r_a, z_a)\}$  をみたす直交曲線座標になっている。

すなわち, 任意の  $\chi \in [0, 2\pi)$  に対して, 等高線

$C_\chi = \{(r, z) : \chi(r, z) = \chi\}$  は自分自身と交差しはな

らぬ曲線であり, 全ての等高線  $\Gamma_\psi$  と直交し,

$\bigcup_{0 \leq \chi < 2\pi} C_\chi = \omega_p - \{(r_a, z_a)\}$  及び  $C_{2\pi} = C_0$  を満たす。

(19)  $(\psi, \chi, \theta)$  は, 右手系に対応する向きづけを持った直交曲線座標系である。

上述の座標系  $(\psi, \chi, \theta)$  を平衡座標系とよぶことにする。

円周  $\{R = (r_a, z_a, \theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$  は磁気軸とよばれる。

平衡座標系のメトリックを  $h_\psi, h_\chi, h_\theta$  とする。すなわち,

$$(20) \quad h_y = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}, \quad h_x = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}, \quad h_\theta = r.$$

∴ 2 次 の 表 現 を 用 意 する。

$$(21) \quad y = y(y, x), \quad z = z(y, x), \quad (y, z) \in \overline{\omega}_p.$$

∴ の 座 標 系 に よ る 単 位 ベ ー ズ 系  $E$ ,  $e_y, e_x, e_\theta$  と する と

$$(22) \quad \text{rot } e_y = -\left(\frac{\partial h_y}{\partial x} / (h_y h_x)\right) e_\theta$$

と あり,  $P = P(y)$  と して,  $e = \nabla P / \|\nabla P\|_{\mathbb{R}^3}$  と あり  
か ら

$$(23) \quad e = \text{sign}\left(\frac{dP}{dy}\right) e_y, \quad y \in \Omega_p - CP$$

と あり。 (22), (23) より。

$$(24) \quad \text{rot } e = -\text{sign}\left(\frac{dP}{dy}\right) \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} / (h_y h_x)\right) e_\theta, \quad y \in \Omega_p - CP.$$

(23) と (24) より

$$(e, \text{rot } e) = 0, \quad y \in \Omega_p - CP$$

と あり, ∴ の 場 合 も  $\overline{P}_1 = 0$  と した が らう。

本稿の議論の詳細は, Ushijima [5], Ushijima-Nakamura-Hanada [6] を参照していただきたい。なお命題4においては, 条件(16)~(19)をみたす直交曲線座標系  $(y, x, \theta)$  によって記述されるポラズマと単純葉をもつトロイダルポラズマとしてみた。



## 文献

- [1] Bernstein, I., Frieman, E., Kruskal, M., Kulsrud, R.,  
An energy principle for hydromagnetic stability problem, *Proc. Royal Soc. A.* 244,  
17-40 (1958).
- [2] Kato, T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin, 1966.
- [3] Lüst, von R., Martensen, E., Zur Mehrwertigkeit des skalaren magnetischen Potentials beim hydromagnetischen Stabilitätsproblem eines Plasmas, *Z. Naturforsch.*, A 15, 706-713 (1960).
- [4] Morrey, C. Jr., *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer, Berlin, 1966.
- [5] Ushijima, T., On the linearized magneto-hydrodynamic systems of equations for a contained plasma in a vacuum region, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, V, 509-527 (1982).
- [6] Ushijima, T., Nakamura, M., Hanada, T., On the linearized magnetohydrodynamic system appearing in the plasma confinement study, preprint, Univ. of Electro-Comm.