

## Dirac 方程式と path integral

北大理 一瀬 孝 (Takashi Ichinose)

### 1. Introduction. Dirac 方程式 ( $c = \hbar = 1$ )

$$(1.1) \quad \partial_t \varphi(t, x) = [-\alpha(\partial - ieA(t, x)) - im\beta - ie\Phi(t, x)]\varphi(t, x)$$

$$(\partial = (\partial_1, \partial_2, \partial_3); \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_j, \beta \text{ は Dirac 行列})$$

の経路積分について heuristic に論じ、時空 2 次元の場合に Cauchy 問題の基本解及び遅延・前進 Green 関数の数学的厳密な経路積分 (path integral) 表示を与える。本稿は、主に田村博志氏との共著論文 [9] に基づき、証明、時空 4 次元の結果などの詳細はこれを参照されたい ([8] は要旨; cf. [6], [7])。

### 2. Heuristics. (1.1) の Cauchy 問題の基本解を $K(t, x; 0, y)$ とする。

それは、外電磁場中の量子化された粒子 (質量  $m$ , 電荷  $e$ ) が時刻 0 に位置  $y$  にあり時刻  $t$  に位置  $x$  にある確率振幅であり、相空間経路積分 [11] 又は、ハミルトニアン経路積分 [4]

$$(2.1) \quad K(t, x; 0, y) \sim \int_{P_{t,x}, 0,y} e^{iS(t; P, X)} \mathcal{D}(P) \mathcal{D}(X)$$

で与えられるとする。  $S(t; P, X)$  は作用(action) と呼ばれる ([10]),

$$(2.2) \quad S(t; P, X) = \int_0^t [P(s) \dot{X}(s) \mp \sqrt{(P(s) - eA(s, X(s)))^2 + m^2} - e\Phi(t, X(s))] ds$$

で与えられる。  $\mathcal{Q}(P) \mathcal{Q}(X)$  は 相空間経路空間  $\mathcal{P}_{t, x; 0, y} = \{(P, X);$

$X(0)=y, X(t)=x, P(\cdot) \text{ unrestricted}\}$  上の一様 "測度" であり, 形式的には,

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$  上の Lebesgue 測度  $dP(s) dX(s)$  の連続無限直積

$\prod_{s \in [0, t]} (2\pi)^{-3} dP(s) dX(s)$  と考える。 次にこの相空間経路 "積分" に於て

$$\text{変数変換} \begin{cases} X'(s) = X(s) \\ P'(s) = X(s) - eA(s, X(s)) \end{cases} \left( \det \begin{bmatrix} \partial X(s) / \partial X'(s) & \partial X(s) / \partial P'(s) \\ \partial P(s) / \partial X'(s) & \partial P(s) / \partial P'(s) \end{bmatrix} = 1 \right) \text{ (注意)}$$

を施し, 更に Dirac の処方  $\pm \sqrt{P'(s)^2 + m^2} \sim \alpha P'(s) + m\beta$

を用いると ( $P', X'$  を再び  $P, X$  と書く),

$$(2.3) \quad K(t, x; 0, y)$$

$$= \int_{\mathcal{P}_{t, x; 0, y}} T e^{i \int_0^t [(P(s) + eA(s, X(s))) \dot{X}(s) - (\alpha P(s) + m\beta) - e\Phi(s, X(s))] ds} \prod_{0 \leq s \leq t} \frac{dP(s) dX(s)}{(2\pi)^3}$$

となる。 Dirac の処方の導入は, scalar を matrix で置きかえることとなるので time ordering symbol  $T$  の導入が必要に

なり,  $T e^{i \int_0^t [\dots] ds}$  は, product integral である。 更に, (2.3)

の右辺を,  $[0, t]$  を  $n$  等分 ( $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, t_j - t_{j-1} = t/n$ ;

$x_j = X(t_j), p_j = P(t_j), x_n = x, x_0 = y$ ) して,

$$(2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \dots \int_{\mathbb{R}^3} \prod_{j=1}^n \exp \left\{ i \left[ (p_{j-1} + eA(t_{j-1}, x_{j-1})) \frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} - (\alpha p_{j-1} + m\beta) - e\Phi(t_j, x_{j-1}) \right] (t_j - t_{j-1}) \right\} \\ \times \frac{dp_0}{(2\pi)^3} \frac{dp_1 dx_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{dp_{n-1} dx_{n-1}}{(2\pi)^3}$$

と解釈しよう。(2.4)の被積分関数を

$$\prod_{j=1}^n e^{i\gamma_j p_j} e^{-i(\alpha p_{j-1} + m\beta)(t_j - t_{j-1})} e^{-i\gamma_{j-1} p_{j-1}} e^{i \sum_{k=1}^n [e\Phi(t_{k-1}, x_{k-1})(t_k - t_{k-1}) + eA(t_{k-1}, x_{k-1})(x_k - x_{k-1})]}$$

と書き直し,  $n$  々の  $p_j$  積分を実行すると, (2.4)は,

$$(2.5) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} K_0(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1}) \cdots K_0(t_1 - t_0, x_1 - x_0) e^{i \sum_{k=1}^n [\dots]} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}$$

となる.  $K_0(t, x)$  は, 外電磁場のなりの Dirac 方程式の Cauchy 問題の基本解である. (2.5) は,  $A \equiv 0$  で,  $\Phi$  が  $t$  に依存しなければ, Trotter 積公式により,  $\text{kernel}[e^{-t[(\alpha\partial + i'm\beta) + ie\Phi]}](x, y)$  を意味していることにもなる.

ここでもし  $K_0$  達と Lebesgue 測度  $dx_j$  達との積の極限として, 経路の空間上の測度  $\nu_{t,x;0,y}$  が構成できるとすれば,

$$(2.6) K(t, x; 0, y) = \int_{\mathcal{X}_{t,x;0,y}} d\nu_{t,x;0,y}(X) e^{-i \int_0^t e\Phi(s, X(s)) ds + i \int_0^t eA(s, X(s)) dX(s)}$$

となるであろう.  $\mathcal{X}_{t,x;0,y}$  は, 時刻 0 に  $y$  を出発し時刻  $t$  に  $x$  に至る配位空間経路  $X$  達の空間である. 我々の結果 (Theorem 1) は, 時空 2 次元のとき (2.6) を数学的 rigor をもって実現するものである.

### 3. Theorems

#### 3.1. 時空 2 次元 Dirac 方程式の Cauchy 問題の基本解

#### 時空 2 次元 Dirac 方程式

$$(3.1) \quad \partial_t \varphi(t, x) = [-\alpha(\partial_x - ieA(t, x)) - i\text{mp}\beta - ie\Phi(t, x)]\varphi(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

の Cauchy 問題の基本解  $K^I(t, x; 0, y)$  は、次のような経路積分表示が得られる。  $\alpha, \beta$  は  $2 \times 2$  Hermite 行列で  $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ ,  $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$  を満たす。  $A, \Phi$  は、  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  上の実数値  $L_{loc}^\infty$  関数とする。

Theorem 1.  $C([0, t]; \mathbb{R})$  上の  $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; M_2(\mathbb{C}))$  値可算加法的測度  $\nu_{t;0}^I$  が一意に存在して、すべての  $(f, g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; (\mathbb{C}^2)) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$  に対して

$$(3.2) \quad \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \overline{f(x)} K^I(t, x; 0, y) g(y) dx dy \\ = \int_{C([0, t]; \mathbb{R})} (f, d\nu_{t;0}^I(x) g) e^{-i \int_0^t \Phi(s, X(s)) ds + i \int_0^t A(s, X(s)) dX(s)}$$

が成立する。 測度  $\nu_{t;0}^I$  の台は、

$$\text{supp } \nu_{t;0}^I \subseteq \left\{ X \in \text{Lip}([0, t]; \mathbb{R}); |\dot{X}(s)| \leq 1, \text{ a.e. } s \left( X(s) - X(0) = s, 0 \leq s \leq t, \text{ if } m=0 \right) \right\}$$

を満たす。

Remark 1.  $\nu_{t;0}^I$  は、conditional path space measure と考えられる。

$$\nu_{t;f;0}^I g(\cdot) \equiv (f, \nu_{t;0}^I(\cdot) g) = \langle \bar{f} \otimes g, \nu_{t;0}^I(\cdot) \rangle$$

は、  $C([0, t]; \mathbb{R})$  上の複素数値可算加法的測度であり、  $f, g$

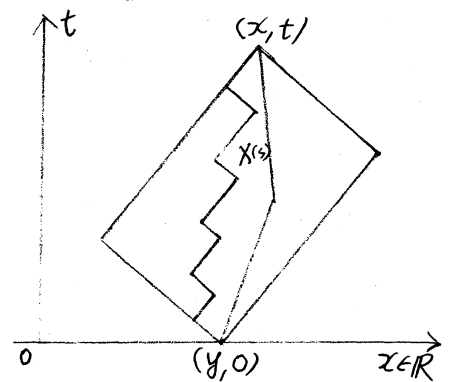
を形式的に  $\delta_x = \delta(\cdot - x)$ ,  $\delta_y = \delta(\cdot - y)$  と置き、 $t$  の  $\mathcal{L}_{t,x;0,y}^I$  と書くと、Theorem 1 は次のようになる:

$$(3.2)' \quad \mathcal{K}^I(t,x;0,y) = \int_{X(0)=y, X(t)=x} d\mathcal{L}_{t,x;0,y}^I(X) e^{-i \int_0^t \Phi(s, X(s)) ds + i \int_0^t A(s, X(s)) dX(s)}$$

$$\text{supp } \mathcal{L}_{t,x;0,y}^I \subseteq \left\{ X \in \text{Lip}([0,t]; \mathbb{R}); |X(s)| \leq 1, \text{ a.e. } s \text{ (} X(s) - X(0) = s, 0 \leq s \leq t, \text{ if } m=0) \right\}$$

$$X(0)=y, X(t)=x$$

Remark 2. 測度  $\mathcal{L}_{t,0}^I$  の  $\alpha = \lambda$ ,  $t=1$  の典型的な path  $X$  達は zigzag path 達であり、Zitterbewegung [1] を思い起させる。



Remark 3. Daletskii, Daletskii-Fomin [2] は、関連する問題を扱、 $\alpha$  が可算加法的測度を構成している。Dirac 方程式の path integral について、測度の構成を且差してはいるが、興味あるいくつかの研究がある: [3], [12], [13], [5].

### 3.2. 時空 2 次元 Green 関数

(3.1) に於て、 $x^0 = t$ ,  $x^1 = x$  と置き、更めて  $x = (x^0, x^1) \in \mathbb{R}^2$  と置く。然る後右辺を左辺に移項して得られる作用素を

$$iH = (\partial_0 + ieA_0(x)) + \alpha(\partial_1 + ieA_1(x)) + im\beta$$

と置く. 但し,  $A_0 = \mathbb{I}$ ,  $A_1 = -A$ .  $\gamma^0 = \beta$ ,  $\gamma^1 = \beta\alpha$  と置く.

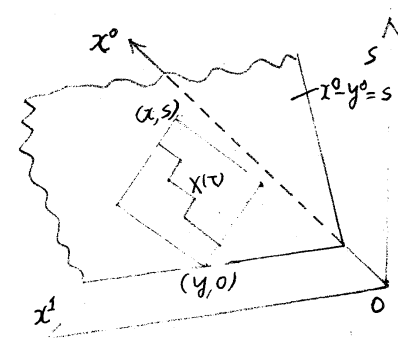
Green 関数  $S(x, y; m)$  とは,

$$(3.3) \quad \gamma^0 H S(x, y; m) \equiv \left[ \sum_{\mu=0}^1 \gamma^\mu (-i\partial_\mu + i e A_\mu(x)) + m \right] S(x, y; m) = \delta(x-y),$$

$x, y \in \mathbb{R}^2$

の  $2 \times 2$  行列値 distribution 解のことである. 色々の Green 関数があるが, 遅延 Green 関数  $S_{ret}(x, y; m)$ , 前進 Green 関数  $S_{adv}(x, y; m)$  は次のように経路積分表示ができる. その定義は, それぞれ  $[\text{kernel}(\gamma^0 H - i\varepsilon \gamma^0)^{-1}](x, y)$ ,  $[\text{kernel}(\gamma^0 H + i\varepsilon \gamma^0)^{-1}](x, y)$  の  $\varepsilon \downarrow 0$  の極限である. (3.2)' のように直観的表現を行う.

Theorem 2.  $C([0, s]; \mathbb{R}^2)$  上の  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2; M_2(\mathbb{C}))$  値可算加法的測度  $\nu_{s, x; y}^{\mathbb{I}}$  が一意に存在して, すべての  $(f, g) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$



$$(3.4) \quad S_{ret}(x, y; m) = i \int_0^\infty ds \int_{X(0)=y, X(s)=x} d\nu_{s, x; y}^{\mathbb{I}}(X) \gamma^0 e^{-i \int_0^s \sum_{\mu=0}^1 e A_\mu(X(t)) dt} X^\mu(t)$$

が成立する.  $\exists$  測度  $\nu_{s, x; y}^{\mathbb{I}}$  の台は,

$$\text{supp } \nu_{s, x; y}^{\mathbb{I}} \subseteq \left\{ \begin{array}{l} X \in \text{Lip}([0, s]; \mathbb{R}^2); |X^1(t)| \leq 1 \text{ a.e. } t \text{ (} X^1(t) - X^1(0) = t, 0 \leq t \leq s, \text{ if } m=0) \\ (X^0, X^1) \\ X(0) = y, X(s) = x \end{array} \right\}$$

を満たす.  $S_{adv}(x, y; m)$  については,  $\int_0^\infty ds$  を  $-\int_{-\infty}^0 ds$  で置き換えたものが成立する.

## References

1. J.D.Bjorken and S.D.Drell, Relativistic Quantum Mechanics, (McGraw-Hill, New York, 1964), p.38.
2. Yu.L.Daletskii, Soviet Math. Dokl. 2, 1634-1637(1961); Uspehi Mat.Nauk. 17(5), 3-115(1962), English transl., Russ. Math. Surveys 17, 1-107 (1962). See also Yu.L.Daletskii and S.V.Fomin, Theory of Prob. Appl. 10, 304-316(1965).
3. R.P.Feynman and A.P.Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw-Hill, New York, 1965), p.34-36.
4. C.Garrood, Hamiltonian path-integral methods, Rev. Mod. Phys. 38, 483-494(1966).
5. B.Gaveau, T.Jacobson, M.Kac and L.S.Schulman, Relativistic extension of the analogy between quantum mechanics and Brownian motion, Phys. Rev. Lett. 53, 419-422(1984).
6. T.Ichinose, 数理研講究録 464 (1982)
7. \_\_\_\_\_, Path integral for a hyperbolic system of the first order, Duke Math. J. 51, 1-36(1984).
8. \_\_\_\_\_, In:Proc. VIIth International Congress on Mathematical Physics (MnΦ), Boulder, Aug. 1983, Physica 124A(1984).
9. \_\_\_\_\_ and H.Tamura, Propagation of a Dirac particle. A path integral approach, J. Math. Phys. 25(6), 1810-1819(1984).
10. L.D.Landau and E.M.Lifschitz, Course of Theoretical Physics, Vol. 2, The Classical Theory of Fields, 4th revised English ed. (Pergamon Press, Oxford, 1975).
11. M.M.Mizrahi, Phase space path integrals, without limiting procedure, J. Math. Phys. 19, 298-307(1978); Erratum, ibid. 21, 1965 (1980).
12. G.V.Riazanov, The Feynman path integral for the Dirac equation, Soviet Phys. JETP 6(33), 1107-1113(1958).
13. G.Rosen, Formulations of Classical and Quantum Dynamical Theory(Academic Press, New York, 1969), Appendix E, p.118.