数理解析研究所講究録
559巻 1985年 78-101

Nonlinear Ergodic Theorems and their Applications

東工大 理 高橋 渉
(WATARU TAKAHASHI)

EをBanach空間とし，CをEの空でない閉凸集合とする．このとき，C上の写像Tがnonexpansiveであるとは

$$\|Tx-Ty\| \leqq \|x-y\| \quad (x, y \in C)$$

を満たすときである．Tの不動点からなる集合をF(T)で表わす．C上のnonexpansive写像S(t)からなる族$\mathcal{S}=\{S(t): t\geqq 0\}$が，つぎの条件(a)，(b)を満たすとき，C上のnonexpansive semigroupであるといわれる．

(a) $S(0)=I$，$S(t+s)=S(t)S(s) \quad (t, s \geqq 0)$．

(b) 任意の$x\in C$に対して，$t\mapsto S(t)x$は連続である．

最初の非線形エルゴード定理は1975年にBaillon[1]によって証明された：HをHilbert空間，Cを閉で凸な部分集合，TをCからCへのnonexpansive写像とする．$F(T)\neq\phi$のとき，Cの任意の元xに対して

$$S_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^k x$$

は $F(T)$ の点に弱収束する.

この定理は後に Bruck [6], Hirano [11], Reich [27] 等によって一様凸な Banach 空間の場合まで拡張されている. C 上の nonexpansive semigroups に対応する結果は Baillon [2], Baillon-Brezis [3] 等によって証明されている. また可換な semigroups に対する非線形エルゴード定理は Brezis-Browder [5], Hirano-Takahashi [15] によって与えられている. 最近 Takahashi [31] は非可換な semigroups に対してつぎのような非線形エルゴード定理を証明した: H を Hilbert 空間とし, C を H の閉凸集合とする. $\mathcal{S}$ を C 上の nonexpansive 写像の作る amenable semigroup とし,

$$F(\mathcal{S}) = \bigcap\{F(t) : t \in \mathcal{S}\} \neq \phi$$

とする. このとき, C から $F(\mathcal{S})$ 上への nonexpansive retraction P で, 任意の $t \in \mathcal{S}$ に対して $Pt = tP = P$ であり, しかも

$$Px \in \overline{co}\{tx : t \in \mathcal{S}\}, \ \forall x \in C$$

を満たすものが存在する. ただし $\overline{co}A$ は A の convex hull の closure を表わす.

このような retraction を "Ergodic retraction" と呼ぶことにすると, エルゴード理論では "Ergodic retraction" の存在と一意性を研究することが最も本質的な部分となってくる.

ここでは, まず Hilbert 空間において, より一般な semigroups

に対して，このような"Ergodic retraction"の存在と一意性を証明する．そのあと，線形の場合でいうところのmixingに対応する結果を研究し，さらにmean ergodic定理を証明する．この結果を用いてこれまでのエルゴード定理のいくつかを証明し，最後にエルゴード定理と発展方程式の関係について述べる．

§1．準備

Sをabstract semigroupとし，$m(S)$をS上の有界実数値関数の作るBanach空間とする．そのノルムはsupremum normとする．任意の$s\in S$と$f\in m(S)$に対して，f_s，f^sを

$$f_s(t)=f(st),\quad f^s(t)=f(ts)\quad (t\in S)$$

で定義する．$\mu\in m(S)^*$（$m(S)^*$は$m(S)$のdual space）は$\|\mu\|=\mu(1)=1$であるならばmeanといわれる．Mean μがleft (right) invariantであるとは，

$$\mu(f_s)=\mu(f)\quad (\mu(f^s)=\mu(f))$$

を満たすときである．Invariant meanとはleftでrightなinvariant meanのことである．left (right) invariant meanをもつsemigroupをleft (right) amenable，invariant meanをもつsemigroupをamenableという．Day [8]はcommutative semigroupはamenableであることを証明している．また$\mu\in m(S)^*$がS上でmeanである必要

十分条件は $f\in m(S)$ に対して

$$\inf\{f(s): s\in S\} \leqq \mu(f) \leqq \sup\{f(s): s\in S\}$$

であるから，semigroup S が right amenable で，μ を right invariant mean とするとき，$f\in m(S)$ に対して

$$\sup_s \inf_t f(ts) \leqq \mu(f) \leqq \inf_s \sup_t f(ts)$$

が成立することもわかる．Semigroup S は $a, b\in S$ に対して，$ac=bd$ ($ca=db$) となるような $c, d\in S$ が存在するとき，left (right) reversible であるといわれる．Granirer [10, 11] は left (right) amenable semigroup は left (right) reversible であることを証明している．S が right reversible semigroup であるとし，$t, s\in S$ に対して $t=s$ or $t\in Ss$ のとき $t\geqq s$ とすると，S は有向集合になる．

E^* を Banach 空間 E の dual 空間とし，$x^*\in E^*$ の $x\in E$ における値を $\langle x, x^*\rangle$ で表わす．このとき E から E^* への duality 写像 J は

$$J(x)=\{x^*\in E^*: \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

によって定義される．Hahn-Banach の定理を用いると，$J(x)$ が空でないことが示され，さらに weak* compact で凸であることもわかる．$B=\{x\in E: \|x\|=1\}$ を E の unit sphere とする．E のノルムが Gâteaux differentiable であるとは，$x, y\in B$ に対して

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t} \quad \cdots \quad (*)$$

がつねに存在するときをいう．このときEはsmoothであるともいわれる．またxに対して(*)の極限が$y\in B$に関して一様であるとき，EのノルムはFréchet differentiableであるといわれる．Fréchet differentiableノルムをもつBanach空間としてはHilbert空間やL^p空間($1<p<\infty$)がその代表的例として挙げられよう．

§2. Hilbert空間におけるエルゴード定理

この節では，Hilbert空間においてnonexpansive写像の作るright reversible semigroupの非線形エルゴード定理を証明する．CをHilbert空間Hの閉な凸集合とし，Sをright reversible semigroupとする．$\mathcal{S}=\{T_s : s\in S\}$をCからCへのnonexpansive写像$T_s$, $s\in S$の作る族で，つぎの条件：

$$T_{st}(x)=T_sT_t(x),\ \forall a, b\in S,\ \forall x\in C$$

を満たすものとする．このとき$\mathcal{S}=\{T_s : s\in S\}$をCからCへのnonexpansive写像としてのSの表現という．この$\mathcal{S}$に対して$F(\mathcal{S})$はT_s, $s\in S$の共通な不動点全体の集合として定義される．すると$F(\mathcal{S})$は閉で凸集合となる．

定理1. CをHilbert空間の空でない閉凸集合とし，Sをright reversible semigroupとする．$\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$をCから

C へのnonexpansive 写像としての $\mathcal{S}$ の表現とし, $F(\mathcal{S})\neq\phi$ とする. このとき, 次の条件は同値である.

(a) 任意の $x\in C$ に対して $\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_t x : t\in S\}\cap F(\mathcal{S})\neq\phi$.

(b) C から $F(\mathcal{S})$ 上へのnonexpansive retraction P で, 任意の $t\in S$ に対して $PT_t=T_tP=P$ であり, かつ

$$Px\in\overline{co}\{T_t x : t\in S\},\ {}^\forall x\in C$$

を満たすものが存在する.

証明. (b) $\Rightarrow$ (a). $x\in C$ とする. すると任意の $t\in S$ に対して $T_tP=P$ なので $Px\in F(\mathcal{S})$ となる. また任意の $s\in S$ に対して

$$Px=PT_s x\in\overline{co}\{T_tT_s x : t\in S\}\subset\overline{co}\{T_t x : t\geqq s\}$$

であるから $Px\in\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_t x : t\geqq s\}$ となる. よって

$$\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_t x ; t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})\neq\phi.$$

(a) $\Rightarrow$ (b). $x\in C$ とし, $f\in F(\mathcal{S})$ とする. このとき $b\geqq a$ ならば $b=sa$ となる $s\in S$ が存在するので

$$\begin{aligned}\|T_b x-f\|^2&=\|T_{sa}x-f\|^2=\|T_sT_a x-T_s f\|^2\\&\leqq\|T_a x-f\|^2.\end{aligned}$$

そこで, $\lim_s\|T_s x-f\|^2$ が存在する.

$$g(f)=\lim_s\|T_s x-f\|^2,\ {}^\forall f\in F(\mathcal{S})$$

とし, $r=\inf\{g(f) : f\in F(\mathcal{S})\}$ とする. このとき, g は連続で凸関数となり, $\|f\|\to\infty$ のとき $g(f)\to\infty$ である. よって

$$M(x)=\{f\in F(\mathcal{S}) : g(f)=r\}$$

は空でない。つぎにこの$M(x)$が一点であることを示す。f_0, f_1を$M(x)$の元とする。このとき，任意の$s\in S$に対して

$$\left\|\frac{f_0-f_1}{2}\right\|^2=\frac{\|T_sx-f_0\|^2}{2}+\frac{\|T_sx-f_1\|^2}{2}-\left\|T_sx-\frac{f_0+f_1}{2}\right\|^2$$

であるから，

$$\left\|\frac{f_0-f_1}{2}\right\|^2=r-\lim_s\left\|T_sx-\frac{f_0+f_1}{2}\right\|^2\leqq 0$$

となる．よって$f_1=f_0$である．$M(x)=\{f_0\}$とし，QをHから$F(\mathcal{S})$へのmetric projectionとする．このとき[21]からQT_sxは$F(\mathcal{S})$の点zに強収束する．つぎにこのzは実はf_0であることを示す．$b\geqq a$とする．このとき$b=sa$となる$s\in S$が存在するので

$$\|QT_ax-T_bx\|^2=\|T_sQT_ax-T_{sa}x\|^2\leqq\|QT_ax-T_ax\|^2$$

となる．だから任意の$a\in S$に対して

$$\begin{aligned}g(QT_ax)&=\lim_b\|T_bx-QT_ax\|^2\\&=\lim_{b,\,a\leqq b}\|T_bx-QT_ax\|^2\leqq\|T_ax-f\|^2.\end{aligned}$$

gは連続であり，QT_axは$z\in F(\mathcal{S})$に収束するので

$$g(z)\leqq\lim_a\|T_ax-f\|^2=g(f).$$

よって$f_0=z=\lim_t QT_tx$である．

$v \in \bigcap_{s\in S} \overline{co}\{T_t x : t \geqq s\} \cap F(\mathcal{S})$としよう．すると

$$\| f_0 - v \|^2 = \| T_s x - v \|^2 - \| T_s x - f_0 \|^2 - 2\langle f_0 - v, T_s x - f_0 \rangle$$

であるから

$$\| f_0 - v \|^2 + 2 \lim_s \langle f_0 - v, T_s x - f_0 \rangle$$
$$= \lim_s \| T_s x - v \|^2 - \lim_s \| T_s x - f_0 \|^2 \geqq 0 .$$

だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$2 \lim_s \langle f_0 - v, T_s x - f_0 \rangle > - \| f_0 - v \|^2 - \varepsilon$$

である．よって $s_0 \in S$ が存在して，$s \geqq s_0$ となる $s \in S$ に対して

$$2 \langle f_0 - v, T_s x - u \rangle > - \| f_0 - v \|^2 - \varepsilon$$

である．$v \in \overline{co}\{T_t x : t \geqq s_0\}$ であるので

$$2 \langle f_0 - v, v - f_0 \rangle \geqq - \| f_0 - v \|^2 - \varepsilon .$$

よって $\| f_0 - v \|^2 \leqq \varepsilon$．$\varepsilon$は任意であるので $f_0 = v$ となる．

今や $x \in C$ に対して，$Px = \lim_t QT_t x$ を定義する．すると $T_s P = P$ は明らかであり，

$$PT_s x = \lim_t QT_t T_s x = \lim_t QT_{ts} x = Px$$

であるから，$PT_s = P$ である．Qは nonexpansive [25] であるので，Pもまた nonexpansive となり，$Px \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}$ は上の証明から明らかである．

Sが amenable semigroup であるときは，つぎの定理を得る．

定理２．CをHilbert空間の空でない閉凸集合とし，Sを amenable semigroup とする．$\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ をCからCへ

の nonexpansive 写像としての S の表現とし，$F(\mathcal{S})\neq\phi$ とする．このとき，C から $F(\mathcal{S})$ 上への nonexpansive retraction P で，任意の $t\in S$ に対して $PT_t=T_tP=P$ であり，かつ

$$Px\in\overline{co}\{T_tx : t\in S\}\ ,\ {}^\forall x\in C$$

を満たすものが存在する．

証明．μ を S 上の invariant mean とし，$x\in C$ とする．このとき $F(\mathcal{S})\neq\phi$ なので $\{T_tx : t\in S\}$ は有界である．任意の $y\in H$ に対して，実数値関数 $g(t)=\langle T_tx, y\rangle$，$t\in S$ を考えると g は有界となる．$\mu_t\langle T_tx, y\rangle=\mu(g)$ とすると $\mu_t\langle T_tx, y\rangle$ は y に関して linear で continuous である．よって Riesz の定理より

$$\mu_t\langle T_tx, y\rangle=\langle x_0, y\rangle\ ,\ {}^\forall y\in H$$

となる $x_0\in H$ が存在する．[31] の方法を使えば

$$x_0\in\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_tx : t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})$$

であることがわかる．定理1より定理2がわかる．

§3. 非線形作用素に対する mixing

この節では $\{T_tx\}$ の収束性を問題にする．T_t が線形のとき T_tx が弱収束することは mixing の性質として知られている．

補助定理．E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間，C をその閉凸集合，S を right reversible semigroup とする．$\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$ を C から C への nonexpansive

写像としてのSの表現とし，$F(\mathcal{S})\neq\phi$とする．$x\in C$とする．
このとき，$z\in\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_t x : t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})$と$y\in F(\mathcal{S})$に対して

$$\langle T_t x - y, J(y-z)\rangle\leqq 0,\ {}^{\forall}t\geqq t_0$$

となるような$t_0\in S$が存在する．

この補助定理を用いて，つぎの定理を得る．

定理3．EをFréchet differentiable normをもつ一様凸なBanach空間，Cをその閉凸集合，Sをright reversible semigroupとする．$\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$を$C$から$C$へのnonexpansive写像としての$S$の表現とし，$F(\mathcal{S})\neq\phi$とする．このとき，任意の$x\in C$に対して，集合$\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_t x : t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})$は高々一点からなる．

証明．$y, z\in\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_t x : t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})$とする．
$\frac{y+z}{2}\in F(\mathcal{S})$なので，補助定理より

$$\left\langle T_t x-\frac{y+z}{2}, J\left(\frac{y+z}{2}-z\right)\right\rangle\leqq 0,\ {}^{\forall}t\geqq t_0$$

となる$t_0\in S$が存在する．$y\in\overline{co}\{T_t x : t\geqq t_0\}$なので

$$\left\langle y-\frac{y+z}{2}, J\left(\frac{y+z}{2}-z\right)\right\rangle\leqq 0.$$

よって，$\langle y-z, J(y-z)\rangle\leqq 0$となり$y=z$を得る．

この定理から，$\{T_t x : t\in S\}$の弱収束に関するいくつかの結果を得ることが出来る．$x\in C$に対して，$\omega(x)$は$\{T_t x : t\in S\}$のweak limit pointsの全体を表わすとする．

定理4．EをFréchet differentiable normをもつ一様凸なBanach空間，Cをその閉凸集合，Sをright reversible semigroupとする．$\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$を$C$から$C$へのnonexpansive写像としての$S$の表現とし，$F(\mathcal{S})\neq\phi$とする．このとき，$x\in C$に対して$\omega(x)\subset F(\mathcal{S})$ならばnet $\{T_a x : a\in S\}$は$F(\mathcal{S})$の元に弱収束する．

証明．$F(\mathcal{S})\neq\phi$なので，$\{T_a x : a\in S\}$は有界である．だから$\{T_a x : a\in S\}$は弱収束するsubnet $\{T_{a_\alpha} x\}$をもつ．$T_{a_\alpha} x \rightharpoonup z\in C$とする．（ここで$\rightharpoonup$は弱収束を意味する．）$z$は$\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_t x : t\geqq s\}$に属するし，$\omega(x)\subset F(\mathcal{S})$であるから

$$z\in\bigcap_{s\in S}\overline{co}\{T_t x : t\geqq s\}\cap F(\mathcal{S})$$

となる．そこで定理3を用いれば$\{T_a x : a\in S\}$は$F(\mathcal{S})$の元に弱収束することがわかる．

EがHilbert空間のときは，つぎの定理を得る．

定理5．CをHilbert空間の閉凸集合とし，Sをright reversible semigroupとする．$\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$を$C$から$C$へのnonexpansive写像としての$S$の表現とし，$F(\mathcal{S})\neq\phi$とする．このとき，$x\in C$に対して，$T_a x\rightharpoonup y\in C$である必要十分条件は，$S$のすべての元$g$に対して

$$T_{ga}x - T_a x \rightharpoonup 0$$

となることである．

証明. "If" part のみを証明すれば十分である. $\{T_{a_\alpha}x\}$ を $\{T_a x : a\in S\}$ の弱収束する部分列とし, $T_{a_\alpha}x \rightharpoonup z$ とする.

このとき, $u\in F(\mathcal{S})$ に対して

$$\begin{aligned}0 &\leqq \|T_{a_\alpha}x-z\|^2-\|T_{ga_\alpha}x-T_g z\|^2\\
&=\|T_{a_\alpha}x-u\|^2+2\langle T_{a_\alpha}x-u,\,u-z\rangle+\|u-z\|^2\\
&\quad-\|T_{ga_\alpha}x-u\|^2-2\langle T_{ga_\alpha}x-u,\,u-T_g z\rangle-\|u-T_g z\|^2\\
&=\|T_{a_\alpha}x-u\|^2-\|T_{ga_\alpha}x-u\|^2+2\langle T_{a_\alpha}x-u,\,T_g z-z\rangle\\
&\quad+2\langle T_{a_\alpha}x-T_{ga_\alpha}x,\,u-T_g z\rangle+\|u-z\|^2-\|u-T_g z\|^2\end{aligned}$$

であるので,

$$0\leqq 2\langle z-u,\,T_g z-z\rangle+\|u-z\|^2-\|u-T_g z\|^2=-\|z-T_g z\|^2$$

を得る. ($\|T_a x-u\|^2$ は decreasing net であるから

$$\lim_\alpha\|T_{a_\alpha}x-u\|^2=\lim_\alpha\|T_{ga_\alpha}x-u\|^2=\lim_a\|T_a x-u\|^2$$

であることに注意.) よって定理4から, $\{T_a x : a\in S\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束することがわかる.

この節の最後につぎの定理を得る.

定理6. E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間とし, C をその閉凸集合, S を right reversible semigroup とする. $\mathcal{S}=\{T_t : t\in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像としての S の表現とし, $F(\mathcal{S})\neq\phi$ とする. このとき, $x\in C$ に対して

$$\lim_a\|T_{ga}x-T_a x\|=0,\ \forall g\in S$$

ならば，$\{T_a x : a\in S\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束する．

証明．定理4より，$w(x)\subset F(\mathcal{S})$ を示せば十分である．$\{T_{a_\alpha}x\}$ を $\{T_a x : a\in S\}$ の subnet で，C の元 y に弱収束するものとする．$g\in S$ に対して仮定より

$$(I-T_g)T_{a_\alpha}x \to 0$$

であるから $(I-T_g)y=0$ を得る．これは $y\in F(\mathcal{S})$ を意味する．よって定理4から $\{T_a x : a\in S\}$ は $F(\mathcal{S})$ の元に弱収束する．

§4. Banach空間における mean ergodic theorems.

この節では特に断わらなければ，S は commutative semi-group を表わし，E は一様凸な Banach 空間を表わすものとする．また D は $m(S)$ の subspace で，すべての constant 関数を含むものとする．$\mu\in D^*$ が mean であるとは $\|\mu\|=\mu(1)=1$ を満たすときをいい，μ が finite mean であるとは

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{s_i}\quad\left(\alpha_i\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,\ s_i\in S\right)$$

なるときをいう．ここで $\delta_s(f)=f(s)$ である．D を上のような subspace とし，f を S から E への写像で $\{f(t) : t\in S\}$ の weak closure が weakly compact であるものとする．また任意の $x^*\in E^*$ に対して，実数値関数 $t\longmapsto\langle f(t),x^*\rangle$ は D に含まれているものとする．このとき $\mu\in D^*$ に対して

$$\langle f_\mu, x^*\rangle=\mu_t\langle f(t),x^*\rangle\ ,\ {}^\forall x^*\in E^*$$

となるような $f_\mu \in E$ が存在する．この f_μ を

$$f_\mu = \int f(t)\, d\mu(t) \quad \text{または} \quad f_\mu = \mu_t(f(t))$$

で表わす．以下の結果は最近 Hirano-Kido-Takahashi [14] によって得られた．

定理7．S を commutative semigroup とし，D を $m(S)$ の subspace で，$D \ni 1$，$r_s(D) \subset D$，$s \in S$ を満たすものとする．f を S から E への写像で，$\{f(t) ; t \in S\}$ の weak closure が weakly compact であり，任意の $x^* \in E^*$ に対して実数値関数 $t \mapsto \langle f(t), x^* \rangle$ が D に含まれるものとする．このとき，E の weakly compact な凸集合 K に対して，つぎの条件は同値である．

(a) K の任意の weak 近傍 W に対して

$$\lambda_t(f(t+s)) \in W, \quad \forall s \in S$$

となる finite mean λ_t が存在する．

(b) finite means の net $\{\lambda_\alpha\}$ が存在して，K の任意の weak 近傍 W に対して

$$\int f(t+s)\, d\lambda_\alpha(t), \quad \forall \alpha \geqq \alpha_0, \quad \forall s \in S$$

となる α_0 が存在する．

(c) $m(S)$ 上の invariant mean μ に対して $f_\mu \in K$ である．

(d) D 上の invariant mean μ に対して $f_\mu \in K$ である．

定義．D を $D \ni 1$，$r_s(D) \subset D$ となる $m(S)$ の subspace と

する．このとき，$\{\mu_\alpha\}\subset D^*$ が strongly regular であるとは

(i) $\sup_\alpha \|\mu_\alpha\| < \infty$； (ii) $\lim_\alpha \mu_\alpha(1) = 1$；

(iii) $\lim_\alpha \|\mu_\alpha - r_s^* \mu_\alpha\| = 0$, $\forall s \in S$

を満たすときをいう．

定理8．S, D, E, f を定理7のようであるとし，$y \in E$ とする．このときつぎの条件は同値である．

(a)′ y の weak 近傍 W に対して

$$\lambda_t(f(t+s)) \in W, \ \forall s \in S$$

となる finite mean λ が存在する．

(e) $\{\mu_\alpha\}$ を strongly regular とするとき，$\int f(t+s)\, d\mu_\alpha(t)$ は s に関して一様に y に弱収束する．

定理7，8を用いて，つぎの mean ergodic theorems を証明することができる．

定理9．S を commutative semigroup とし，D を $m(S)$ の subspace で，$D \ni 1$，$r_s(D) \subset D$，$s \in S$ となるものとする．C を E の閉凸集合とし，$\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C から C への nonexpansive 写像としての S の表現とする．また $x \in C$，$x^* \in E^*$ に対して，関数 $t \mapsto \langle T_t x, x^* \rangle$ は D に含まれるものとし，$F(\mathcal{S}) \neq \phi$ とする．このとき，D 上の invariant mean μ に対して

$$\langle T_\mu x, x^* \rangle = \mu_t \langle T_t x, x^* \rangle, \ \forall x^* \in E^*$$

で定義される $\mathcal{T}_\mu$ は C から $F(\mathcal{S})$ 上への nonexpansive retraction で，任意の $s \in S$ に対して $\mathcal{T}_\mu T_s = T_s \mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_\mu$ であり，しかも $\mathcal{T}_\mu x \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}$, $\forall x \in C$ を満たす．

定理10. S, D, C, E, $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ は定理9のようであるとし，さらに E は Fréchet differentiable norm をもつものとする．このとき，C から $F(\mathcal{S})$ 上への nonexpansive retraction P で，任意の $s \in S$ に対して $PT_s = T_s P = P$ でありしかも $Px \in \overline{co}\{T_t x : t \in S\}$, $\forall x \in C$ となるものが一意に存在する．

さらに $\{\mu_\alpha\} \subset D^*$ が strongly regular であるならば，$x \in C$ に対して，$\mathcal{T}_{\mu_\alpha} T_t x$ は t に関して一様に Px に弱収束する．

証明. 定理9によって，C から $F(\mathcal{S})$ 上への "Ergodic retraction P" が存在する．また任意の $s \in S$ に対して

$$Px = PT_s x \in \overline{co}\{T_t T_s x : t \in S\} \subset \overline{co}\{T_t x : t \geq s\}$$

であるから，$Px \in \bigcap_s \overline{co}\{T_t x : t \geq s\} \cap F(\mathcal{S})$ となり，定理3を使えば，このような P は一意であることがわかる．μ を invariant mean とし，$x \in C$ とすると

$$\mathcal{T}_\mu x = \int T_t x \, d\mu(t) = Px$$

であるから，定理7，8より $\int T_{s+t} x \, d\mu_\alpha(s) = \mathcal{T}_{\mu_\alpha} T_t x$ は t に関して一様に Px に弱収束する．

§5. Applications

定理10を用いると,つぎのような系は簡単に証明できる.

系1. EをFréchet differentiable normをもつ一様凸なBanach空間とし, CをEの閉凸集合とする. TをCからCへのnonexpansive写像で, $F(T)\neq\phi$とする. このとき, 任意の$x\in C$に対して

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} T^{i+k}x \longrightarrow y\in F(T)$$

である. またこの収束はkに関して一様でもある.

証明. $S=\{0,1,2,\cdots\}$, $\mathcal{S}=\{T^i\,;\,i=0,1,2,\cdots\}$, $D=m(S)$とし, 任意の$f\in D$に対して

$$\mu_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

とする. このとき$\{\mu_n\}$はstrongly regularである.

系2. EをFréchet differentiable normをもつ一様凸なBanach空間とし, CをEの閉凸集合とする. $\mathcal{S}=\{S(t)\,:\,0\leqq t\}$を$C$上のnonexpansive semigroupとし, $F(\mathcal{S})\neq\phi$とする. このとき, 任意の$x\in C$に対して

$$\frac{1}{s}\int_0^s S(t+k)x\,dt \longrightarrow y\in F(\mathcal{S})$$

である. またこの収束はkに関して一様でもある.

証明. $S=[0,\infty)$, $\mathcal{S}=\{S(t)\,:\,0\leqq t\}$, $D=C(S)$ (ただし, $C(S)$はS上の有界連続関数の全体である) とし, 任意の$f\in D$に対して

$$\mu_s(f) = \frac{1}{s}\int_0^s f(t)\,dt$$

とすると，$\{\mu_s\}$ は strongly regular である．

$N=\{0,1,2,\cdots\}$ とし，$Q=\{q_{n,m}\}_{n,m\in N}$ を strongly regular matrix とする．すなわち

(i) $\sup_n \sum_m |q_{n,m}| < \infty$; (ii) $\lim_n \sum_m q_{n,m} = 1$;

(iii) $\lim_n \sum_m |q_{n,m+1} - q_{n,m}| = 0$

を満たすとする．このとき，つぎの系を証明できる．

系3．E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間とし，C を E の閉で凸な集合とする．T を C から C への nonexpansive 写像で，$F(T)\neq\phi$ とする．このとき任意の $x\in C$ に対して

$$\sum_m q_{n,m} T^{m+k} x \longrightarrow y \in F(T)$$

である．またこの収束は k に関して一様収束でもある．

証明は系1，2と同様である．またつぎのような系も得られる．

系4．E を Fréchet differentiable norm をもつ一様凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．S，T を C から C への nonexpansive 写像で，$ST=TS$ なるものとし，$F(S)\cap F(T)\neq\phi$ とする．このとき，任意の $x\in C$ に対して

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=0}^{n-1} S^{i+k} T^{j+h} x \longrightarrow y \in F(S)\cap F(T)$$

である．またこの収束は k, h に関して一様でもある．

以上のようなエルゴード定理は発展方程式の理論と大きなかかわりをもっている。Baillon-Brezis [3] は発展方程式の理論を用いて，C 上の nonexpansive semigroup のエルゴード定理（系2）を証明したし，Bruck [7] はつぎのような命題を証明した。

φ を Hilbert 空間 H から $(-\infty, \infty]$ への proper lower semi-continuous convex 関数とし，最小値をもつものとする。$\partial\varphi$ を φ の subdifferential とし，$\mathcal{S} = \{S(t) ; 0 \leqq t\}$ を $-\partial\varphi$ によって生成される $\overline{D(\partial\varphi)}$ 上の nonexpansive semigroup とするとき，任意の $x \in \overline{D(\partial\varphi)} = \overline{D(\varphi)}$ に対して，$S(t)x$ は $\partial\varphi^{-1}(0)$ の元に弱収束する。

またエルゴード定理の応用として，Baillon-Clément [4]，Hirano [12] は Hilbert 空間における Nonlinear Volterra Equations の解の asymptotic behavior を研究し，Kido [17] は一様凸な Banach 空間においてそれを行った。

最後に定理10を用いてつぎのような変分不等式に関する解の近似法も考えられるので挙げておきたい。

C を Hilbert 空間 H の閉凸集合とし，A を maximal monotone 作用素とする。I_C を $x \in C$ のとき $I_C(x) = 0$，$x \notin C$ のとき $I_C(x) = \infty$ であるような関数とし，∂I_C をその subdifferential とする。$A + \partial I_C$ を maximal monotone

であるとし，変分不等式：

$$\begin{cases} u\in C\cap D(A),\ v\in Au, \\ \langle v, x-u\rangle \geqq 0,\ \forall x\in C \end{cases}$$

を考える．この不等式は解 $u_0\in C$ をもつものとし，$T=(I+A+\partial I_C)^{-1}$ とすると，T は C から C への nonexpansive 写像であり，T の不動点 $F(T)$ は変分不等式の解の集合と一致する．ゆえに $u_0\in F(T)$．$x\in C$ に対して，$r=\|x-u_0\|$ とし，$C'=C\cap B_r[u_0]$ とする．ただし $B_r[u_0]=\{z\in H : \|u_0-z\|\leqq r\}$ である．すると C' は T-invariant であり，C' は H の空でない weakly compact convex 集合である．このとき，$\sum_{i=1}^{\infty} a_i=\infty$，$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2<\infty$ となる positive sequence $\{a_i\}$ に対して，

$$g_{\mu_n}x=\sum_{i=1}^{n} a_iT^ix \Big/ \sum_{i=1}^{n} a_i$$

を考えると，定理10よりこれは変分不等式の解へ弱収束する．

References

[1] J. B. Baillon, Un théorème de type ergodique pour les contractions nonlinéarires dans un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975), 1511–1514.

[2] J. B. Baillon, Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroupes de contractions impaires, C. R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976), 75–78

[3] J. B. Baillon-H. Brezis, Une remarque sur le comportement asymptotique des semigroupes non linéaires, Houston J. Math., 2 (1976), 5-7.

[4] J. B. Baillon - P. Clément, Ergodic theorems for nonlinear Volterra equations in Hilbert space, Nonlinear Analysis, 5 (1981), 789-801

[5] H. Brézis-F. E. Browder, Remarks on nonlinear ergodic theory, Advance Math., 25 (1977), 165-177.

[6] R. Bruck, A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces, Israel J. Math., 32 (1979), 107-116.

[7] R. Bruck, Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space, J. Func. Anal., 18 (1975), 15-26.

[8] M. M. Day, Amenable semigroups, Illinois J. Math, 1 (1957), 509-544.

[10] E. Granirer, On amenable semigroups with a finite-dimensional set of invariant means I, Illinois J. Math., 7 (1963), 32-48.

[11] E. Granirer, A theorem on amenable semigroups, Trans. Amer. Math. Soc., 111 (1964), 367-379.

[11] N. Hirano, A proof of the mean ergodic theorem for nonexpansive mappings in Banach space, Proc. Amer. Math. Soc., 78 (1980), 361–365.

[12] N. Hirano, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations, J. Differential Equations, 47 (1983), 163–179.

[13] N. Hirano-K. Kido-W. Takahashi, Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces, to appear.

[14] N. Hirano-K. Kido-W. Takahashi, to appear.

[15] N. Hirano-W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert spaces, Kōdai Math. J. 2 (1979), 11–25.

[16] N. Hirano-W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Banach space, Pacific J. Math., 112 (1984), 333–346.

[17] K. Kido, Almost convergence of solution of nolinear Volterra equation in Banach space, to appear.

[18] K. Kido-W. Takahashi, Mean ergodic theorems for semigroups of linear continuous operators in Banach spaces, to appear in J. Math. Anal. Appl..

[19] K. Kido–W. Takahashi, Means on commutative semigroups and nonlinear ergodic theorems, to appear in J. Math. Anal. Appl..

[20] 高村幸男–小西芳雄, 非線形発展方程式, 岩波講座基礎数学, 岩波書店, 1977.

[21] A. T. Lau, Semigroup of nonexpansive mappings on a Hilbert space, to appear in J. Math. Anal. Appl..

[22] A. T. Lau–W. Takahashi, Weak convergence and nonlinear ergodic theorems for reversible semigroup of nonexpansive mappings, to appear.

[23] 宮寺功, 非線形半群, 紀伊国屋書店, 1977.

[24] I. Miyadera–K. Kobayashi, On the asymptotic behavior of almost-orbits of nonlinear contractive semigroups in Banach spaces, Nonlinear Analysis, 6 (1982), 349–365.

[25] R. R. Phelps, Convex sets and nearest points, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 790–797.

[26] S. Reich, Nonlinear evolution equations and nonlinear ergodic theorems, Nonlinear Analysis, 1 (1977), 319–330.

[27] S. Reich, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl.,

67 (1979), 274-276.

[28] W. Takahashi, Invariant functions for amenable semigroups of positive contractions on L^1, Kōdai Math. Sem. Rep., 23 (1971), 131-143.

[29] W. Takahashi, Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 168-181.

[30] 高橋渉, 不動点定理とその周辺, 三田学会雑誌, 73 (1980), 32-68.

[31] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.

[32] W. Takahashi, Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543-553.

[33] W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, to appear.

[34] 高橋渉・平野載倫, 非線形函数解析学における最近の話題―非線形エルゴード定理について―, 数学 33 (1981), 50-65.