数理解析研究所講究録
559巻 1985年 42-58

Boltzmann方程式とGevrey Class

阪市大工　鵜飼正二 (Seiji Ukai)

1. 問題

Boltzmann方程式の初期値問題は

$$(1.1)\quad \begin{cases} f_t = -\xi\cdot\nabla_x f + Q[f,f], \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases}$$

である。未知関数 $f=f(t,x,\xi)$ は $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ の scalar 関数であって、物理的には、時刻 t に於ける位置 x, 速度 ξ の気体粒子密度である。また、

$$(1.2)\quad Q[f,g](t,x,\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_{\xi'}\times S^{n-1}} q(v,\theta)\{f(\eta)g(\eta') + f(\eta')g(\eta) - f(\xi)g(\xi') - f(\xi')g(\xi)\}d\xi' d\omega,$$

は気体粒子の衝突を記述する双線型対称作用素であって、

$$v=|\xi-\xi'|,\quad \theta=\cos^{-1}\{(\xi-\xi')\cdot\omega/v\},\quad \omega\in S^{n-1}.$$

但し・は $\mathbb{R}^n$ の内積、$f(\eta)=f(t,x,\eta)$ etc. であって、

$$(1.3)\quad \eta = \xi-(v\cos\theta)\omega,\qquad \eta'=\xi'+(v\cos\theta)\omega$$

は、速度 ξ の粒子と ξ' の粒子が衝突したときの衝突後の粒子

の速度（またはその逆）である。

$q(v,\theta)$ は衝突断面積であり，気体粒子の種類，即ち粒子の相互作用 potential で決まる．粒子が剛球の場合（hard ball gas）ならば，σ_0 を球の表面積として，

$$(1.4)' \qquad q(v,\theta) = \sigma_0 v |\cos\theta| .$$

また相互作用ポテンシアルが逆べき法則に従うとき，即ち r^{-s}（r：粒子間距離），$s>1$，に比例すれば（$n=3$ のとき）

$$(1.4) \qquad q(v,\theta) = v^{\gamma} |\cos\theta|^{-\gamma'} q_0(\theta),$$

$$\gamma = 1-\frac{4}{s},\quad \gamma' = 1+\frac{2}{s}\ ;\quad q_0(\theta)\geq 0,\ \text{有界},\ \theta=\pi/2\ \text{の近傍で}\neq 0,$$

で与えられる．この場合 $\gamma'>1$ であるので $q(v,\theta)$ は $\theta=\pi/2$ で強い（非可積分性の）singularity を持ち，従って (1.2) で f，g が単に有界と仮定しただけでは ω に関する積分は収束しない．しかし (1.3) から $\theta=\pi/2$ ならば $\eta=\xi$，$\eta'=\xi'$ であるので f，g が滑らかならば (1.2) の右辺の $\{\cdots\}$ は $\theta=\pi/2$ で 0 となり，$q(v,\theta)$ の singularity を相殺し，Q は well-defined となる可能性がある．即ち Q は（非線型）singular integral operator または pseudo-differential operator と考えねばならないことになる．

従って (1.1) を解くのは難しくなるので，従来は種々の cutoff 近似が用いられていた．即ち (1.4) で言えば $\gamma'<1$ を仮定することに相当する．(1.4)′ はこの仮定を満たす．特に Grad [2]

による angular cutoff は $q(v,\theta)$ を

$$
(1.5)\qquad
\begin{aligned}
&q^{\varepsilon}(v,\theta)=\chi^{\varepsilon}(\theta)\,q(v,\theta), \qquad \varepsilon>0,\\
&\chi^{\varepsilon}(\theta)=1,\ |\theta-\pi/2|>\varepsilon; \qquad \chi^{\varepsilon}(\theta)=0,\ |\theta-\pi/2|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

で置き代える近似であるが、この近似の下では、(1.1) に対する初期値問題のみならず種々の初期値－境界値の時間的大域解の存在が知られている。

non-cutoff の場合、即ち $\gamma'\geq 1$ の場合は (1.1) について殆んど結果がない。本稿では Q を gevrey class で定義すれば (1.1) が時間的局所解を持つことを示す。既に述べた様に Q は pseudo-differential operator なので derivative loss が起る。従って (1.1) を解くには Nishida-Nirenberg-Obsjamikov の abstract non-linear Cauchy-Kowalewski 定理[3] と同様の工夫を要す。即ち (1.1) を Banach scale で設定しなければならない。但し Q の (微分に関する) 階数は 1 より小なので [3] より簡単に、通常の縮小写像の原理で解ける。Banach scale は gevrey class の指標を t に関して線型に変化させたものを用いる。類似の scale は Boltzmann 方程式では [1], [4] で、また weakly hyperbolic equation でも (Bronstein, Kajitani ‥) 用いられている。

本稿では更に (1.5) で $\varepsilon\to 0$ としたときの解の収束についても触れる。詳しい証明は [6] を参照して頂きたい。

2. Gevrey class での Q の評価.

以下では $q(v,\theta)$ は v,θ について可測でかつ次を仮定する.

(2.1) $$|q(v,\theta)| \le C(1+v^{-\mu}+v^{\gamma})|\cos\theta|^{-\gamma'},$$

但し $C\ge 0$ は定数, $\mu,\gamma,\gamma'\ge 0$ については

(2.2) $$0\le\mu<n,\quad 0\le\gamma<2,\quad 1\le\gamma'<2$$

および

(2.3) $$\gamma+3\gamma'<5,$$

を仮定する. この仮定の下で $Q[f,g]$ を評価する. 本節では f,g は ξ のみの関数とする. ノルムを

(2.4) $$\|f\|_\alpha = \sup_\xi \rho_\alpha(\xi)|f(\xi)|,$$
$$\rho_\alpha(\xi) = e^{\alpha\langle\xi\rangle^2},\quad \alpha>0.\quad \langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2},$$

と定義する.

$u=\rho_\alpha f$, $w=\rho_\alpha g$ とおくと, (1.3) より $\langle\xi\rangle^2+\langle\xi'\rangle^2=\langle\eta\rangle^2+\langle\eta'\rangle^2$ なので

(2.5) $$Q[f,g] = \frac{1}{2}\rho_\alpha^{-1}\{\Gamma_\alpha^{(1)}[u,w]+\Gamma_\alpha^{(1)}[w,u]+\Gamma_\alpha^{(2)}[u,w] + \Gamma_\alpha^{(2)}[w,u]\},$$

となる. 但し

(2.6) $$\Gamma_\alpha^{(1)}[u,w]=\int_{\mathbb{R}^n\times S^{n-1}} q(v,\theta)\rho_\alpha(\xi')^{-1}\{u(\eta)-u(\xi)\}w(\eta')\,d\xi'd\omega,$$

及び $\Gamma_\alpha^{(2)}[u,w]$ は上で $\{u(\eta)-u(\xi)\}w(\eta')$ を $\{u(\eta')-u(\xi')\}w(\eta)$ で置き代えたものである. 仮定 (2.1)(2.2) の下で次が成り立つ.

Lemma 2.1. $\forall\alpha>0$, $\forall\delta\in(\gamma'-1,1]$, $\exists C\ge 0$, $\forall\varepsilon>0$,

$$|\Gamma_\alpha^{(j)}[u,w](\xi)|\le C\langle\xi\rangle^{\gamma+\delta}\{(\langle\xi\rangle^{\delta}+\varepsilon^{-\delta})\|f\|_\alpha +$$

$$+\varepsilon^{1-\delta}\|\nabla_\xi f\|_\alpha\}\|g\|_\alpha \quad . \quad j=1,2.$$

ここで $C=C_\alpha$ は $\alpha>0$ について単調減少で, $C_\alpha\to\infty(\alpha\to 0)$, $C_\alpha\to 0\ (\alpha\to\infty)$ である.

証明. $u=\rho_\alpha f$ の Hölder ノルムの補間不等式として

$$|u(\eta)-u(\xi)|\le 2|\eta-\xi|^\delta\{(\alpha^\delta(|\xi|^\delta+|\eta-\xi|^\delta)+\varepsilon^{-\delta})\|f\|_\alpha$$
$$+\varepsilon^{1-\delta}\|\nabla_\xi f\|_\alpha\}$$

が得られる. 但し $\alpha\geqslant 0$, $\delta\in[0,1]$, $\varepsilon>0$. これを (2.6) から従う

$$|\Gamma_\alpha^{(1)}[u,w](\xi)|\le\int|q(v,\theta)|\rho_\alpha(\xi')^{-1}|u(\eta)-u(\xi)||w(\eta')|d\xi'd\omega$$

に代入する. (1.3) より $|\eta-\xi|=v|\cos\theta|$. また $|w(\eta')|\le\|g\|_\alpha$. よって上式右辺は

$$2(1+\alpha^\delta)\{(I_1(|\xi|^\delta+\varepsilon^{-\delta})+I_2)\|f\|_\alpha+\varepsilon^{1-\delta}I_1\|\nabla_\xi f\|_\alpha\}\|g\|_\alpha$$

で評価される. 但し

$$I_k=\int|q(v,\theta)|\rho_\alpha(\xi')^{-1}|v|^{k\delta}|\cos\theta|^{k\delta}d\xi'd\omega,\quad k=1,2.$$

ここで (2.1) を仮定すると

$$(2.7)\qquad \le C\int_{\mathbb{R}^n}(1+v^{-\mu}+v^{\gamma})v^{k\delta}e^{-\alpha\langle\xi'\rangle^2}d\xi'\int_0^\pi|\cos\theta|^{-\gamma'+k\delta}d\theta.$$

$-\gamma'+k\delta>-1$ ならば θ に関する積分は収束する. また

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\xi-\xi'|^\lambda e^{-\alpha\langle\xi'\rangle^2}d\xi'\le C\langle\xi\rangle^\lambda$$

が $\lambda>-n$ について成り立つ. これより Lemma が $j=1$ について成り立つ. $j=2$ も同様に証明できる. (証終)

Lemma 2.2. $\forall\alpha>0$, $\forall\delta\in(\gamma'-1,1]$, $\exists C\geqslant 0$, $\forall\beta\in[0,\alpha]$, $\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$,

$$\|Q[f,g]\|_{\alpha-\beta} \le C\beta^{-(\gamma+\delta)/2}\{(\beta^{-\delta/2}+\varepsilon_1^{-\delta}+\varepsilon_2^{-\delta})\|f\|_\alpha\|g\|_\alpha + \varepsilon_1^{1-\delta}\|\nabla_\xi f\|_\alpha\|g\|_\alpha + \varepsilon_2^{1-\delta}\|f\|_\alpha\|\nabla_\xi g\|_\alpha\}.$$

但し $C=C_\alpha$ は Lemma 2.1 と同様の α 依存性を持つ.

証明. (2.5)の左辺を Lemma 2.1 を用いて評価する. 但し $\Gamma_\alpha^{(\xi)}[u,w]$ については $\varepsilon=\varepsilon_1$, $\Gamma_\alpha^{(\xi)}[w,u]$ については $\varepsilon=\varepsilon_2$ と置く. 更に $\rho_\alpha(\xi)^{-1}=\rho_{\alpha-\beta}(\xi)^{-1}e^{-\beta\langle\xi\rangle^2}$, 及び $\lambda\ge 0$ に対し

$$\langle\xi\rangle^\lambda e^{-\beta\langle\xi\rangle^2} \le C_\lambda\beta^{-\lambda/2}, \qquad C_\lambda=\sup_{s>0} s^\lambda e^{-s^2}$$

が成り立つことに注意すればよい. (証了)

上の Lemma は Q に derivative loss 及び weight loss が生じていることを示している. 同種の空間での Q の評価が必要である. これは次の Gevrey class で可能となる.

Definition 2.3. $f\in\gamma^{(\nu)}_{\alpha,\rho}$, $\nu\ge1$, $\alpha\ge0$, $\rho\ge0$,

$\iff$ $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$,

$$\|f\|_{\alpha,\rho,\nu} \equiv \sum_{l\in\mathbb{N}^n}\frac{\rho^{|l|}}{(l!)^\nu}\|\partial_\xi^l f\|_\alpha < +\infty.$$

Theorem 2.4. $\forall\alpha>0$, $\forall\delta\in(\gamma'-1,1]$, $\forall\nu\ge1$, $\exists C\ge0$,

$\forall\beta\in(0,\alpha)$, $\forall\rho>0$, $\forall\sigma\in(0,\rho)$, $\forall f,g\in\gamma^{(\nu)}_{\alpha,\rho}$,

$$\|Q[f,g]\|_{\alpha-\beta,\rho-\sigma,\nu} \le C a_0(\beta,\rho,\sigma)\|f\|_{\alpha,\rho,\nu}\|g\|_{\alpha,\rho,\nu},$$

$$a_0(\beta,\rho,\sigma)=\beta^{-(\gamma+\delta)/2}\{\beta^{-\delta/2}+(1+\rho)\rho^{\nu\delta-1}\sigma^{-\nu\delta}\}.$$

証明. (1.2)で $\xi' \to y = \xi - \xi'$ なる変数変換を行う. 簡単の為 $g = f$ の場合を記すと

$$Q[f,f] = \int q(|y|,\theta)\{f(\xi-\zeta)f(\xi-y-\zeta) - f(\xi)f(\xi-y)\}dy\,d\omega,$$

但し $\cos\theta = y\cdot\omega/|y|$, $\zeta = (y\cdot\omega)\omega$ は ξ に独立となる. 故に積分記号下の微分により,

$$\partial_\xi^l Q[f,g] = \sum_{k+m=l} \frac{l!}{k!\,m!} Q[\partial_\xi^k f, \partial_\xi^m g],$$

が $l \in \mathbb{N}^n$ について成り立つ. Lemma 2.2 で

$$f \to \partial_\xi^k f, \quad g \to \partial_\xi^m g, \quad \varepsilon_1 = (1+|k|)^{-\nu}, \quad \varepsilon_2 = (1+|m|)^{-\nu}$$

とおく. また

(2.8) $\quad k!\,m!/(k+m)! \leq 1, \quad \forall k, m \in \mathbb{N}^n$

に注意すると次を得る.

$$\|Q[f,g]\|_{\alpha-\beta,\rho-\sigma,\nu} \leq \sum_{k,m\in\mathbb{N}^n} \frac{(\rho-\sigma)^{|k|+|m|}}{(k!\,m!)^\nu} \|Q[\partial_\xi^k f, \partial_\xi^m g]\|_{\alpha-\rho}$$

$$\leq C\beta^{-(\gamma+\delta)/2}\left([f]\|g\|_{\alpha,\rho,\nu} + \|f\|_{\alpha,\rho,\nu}[g]\right),$$

ただし,

$$[f] = \beta^{-\delta/2}\|f\|_{\alpha,\rho,\nu} + [f]_1 + [f]_2,$$

$$[f]_1 = \sum_l \frac{(\rho-\sigma)^{|l|}}{(l!)^\nu}(1+|l|)^{\nu\delta}\|\partial_\xi^l f\|_\alpha,$$

$$[f]_2 = \sum_l \frac{(\rho-\sigma)^{|l|}}{(l!)^\nu}(1+|l|)^{-(1-\delta)\nu}\|\partial_\xi^l \nabla_\xi f\|_\alpha.$$

そこで, $0 < \sigma < \rho$ ならば

(2.9) $\quad \sup_{s\geq 0}(1-\sigma/\rho)^s(s+1)^\nu \leq C_\nu(\rho/\sigma)^\nu, \qquad C_\nu = \sup_{s\geq 0} e^{-s}(s+1)^\nu$

が成り立つので

$$[f]_1 \leq C_{\nu\delta}\, \rho^{\nu\delta} \sigma^{-\nu\delta} \|f\|_{\alpha,\rho,\nu},$$

$$[f]_2 \leq C_{\nu\delta}\, \rho^{\nu\delta-1} \sigma^{-\nu\delta} \|f\|_{\alpha,\rho,\nu}.$$

以上をまとめると定理を得る.（証了）

(2.9) を用いると

$$\|\nabla_\xi f\|_{\alpha,\rho-\sigma,\nu} \leq C_\nu\, \rho^{\nu-1} \sigma^{-\nu} \|f\|_{\alpha,\rho,\nu}$$

がわかる. これと定理 2.4 を比較すると Q は次数 $\delta \in (\gamma^{-1}, 1]$ の pseudo-differential operator であることがわかる. 尚, この定理は (2.3) を仮定する必要はない.

3. 局所解の構成.

まず (1.1) は(形式的に)

(3.1) $$f(t) = U(t)f_0 + \int_0^t U(t-s)\, Q[f(s), f(s)]\, ds,$$

と同値であるのでこれを解くことを考える. ここで

(3.2) $$U(t)f_0 = f_0(x - t\xi, \xi)$$

は $-\xi\cdot\nabla_x$ が生成する群である. x, ξ の関数の Gevrey class を定義しよう.

Definition 3.1. $\alpha, \mu, \rho \geq 0$, $\kappa, \nu \geq 1$ とする.

$$f \in \gamma^{(\kappa,\nu)}_{\alpha,\mu,\rho} \iff f \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi),$$

$$\|f\|_{\alpha,\mu,\kappa,\rho,\nu} = \sum_{k,\ell \in \mathbb{N}^n} \frac{\mu^{|k|} \rho^{|\ell|}}{(k!)^\kappa (\ell!)^\nu} \|\partial_x^k \partial_\xi^\ell f\|_\alpha < +\infty.$$

ただしノルム $\|\cdot\|_\alpha$ は (2.4) で x についても sup を取ったも

のとする．

まず(3.2)の作用素$U(t)$をこの空間で考えよう．

Lemma 3.2. $f_0\in\gamma^{(\kappa,\nu)}_{\alpha,\mu,\rho}$ ，$\nu\ge\kappa\ge1$ とすると $|t|\le\mu/\rho$ ならば

$$\|U(t)f_0\|_{\alpha,\mu',\kappa,\rho,\nu}\le\|f_0\|_{\alpha,\mu,\kappa,\rho,\nu}$$

が成り立つ．ただし $\mu'=\mu'(t,\mu,\rho)$ は次のものである．

$$\mu'=\{\mu^{1/\kappa}-(\rho|t|)^{1/\kappa}\}^{\kappa}.$$

証明．(3.2)をξ_jで微分するとわかるように，

$$\partial_\xi^{\ell}U(t)f_0=U(t)\{(-t\partial_x+\partial_\xi)^{\ell}f_0\}$$
$$=U(t)\Big\{\sum_{m+r=\ell}\frac{\ell!}{m!\,r!}(-t)^{|m|}\partial_x^{m}\partial_\xi^{r}f_0\Big\},$$

がすべての$\ell\in\mathbb{N}^n$について成り立つ．また $\partial_x^{k}U(t)f_0=U(t)\partial_x^{k}f_0$ は明らか．故に $\|U(t)f_0\|_\alpha=\|f_0\|_\alpha$ に注意すると

$$\|U(t)f_0\|_{\alpha,\mu',\kappa,\rho,\nu}\le\sum_{k,\ell}\sum_{m+r=\ell}\frac{(\mu')^{|k|}\rho^{|\ell|}}{(k!)^{\kappa}(\ell!)^{\nu}}\frac{\ell!}{m!\,r!}|t|^{|m|}\|\partial_x^{m+k}\partial_\xi^{r}f_0\|_\alpha$$

(2.8)を用いると

$$\le\sum_{k,m,r\in\mathbb{N}^n}\frac{(\mu')^{|k|}\rho^{|m|+|r|}|t|^{|m|}}{(k!)^{\kappa}(m!\,r!)^{\nu}}\|\partial_x^{m+k}\partial_\xi^{r}f_0\|_\alpha,$$

$m+k=s$ とおくと

$$=\sum_{s,r\in\mathbb{N}^n}\frac{(\mu')^{|s|}\rho^{|r|}}{(s!)^{\kappa}(r!)^{\nu}}K_s\|\partial_x^{s}\partial_\xi^{r}f_0\|_\alpha,$$

ただし，
$$K_s=\sum_{m\le s}\frac{(s!)^{\kappa}}{(m!)^{\nu}\{(s-m)!\}^{\kappa}}\Big(\frac{\rho|t|}{\mu'}\Big)^{|m|}.$$

$\nu\ge\kappa\ge1$を仮定したので，2項展開の公式を用いると

$$K_s \leq \Big(\sum_{m\leq s} \frac{s!}{m!(s-m)!} \Big(\frac{\rho|t|}{\mu'}\Big)^{|m|/\kappa} \Big)^{\kappa} = \Big(1+\Big(\frac{\rho|t|}{\mu'}\Big)^{1/\kappa}\Big)^{\kappa|s|}$$
$$= \Big(\frac{\mu}{\mu'}\Big)^{|s|}$$

がわかる。これを上式に代入すればよい。(証了)

$U(t)$ は簡単な作用素であるが空間 $\mathcal{Y}^{(\kappa,\nu)}_{\alpha,\mu,\rho}$ ではあまり良い性質を持っていない。さて N_0, N を

$$N_0[f,g](t) = \int_0^t U(t-s)\,Q[f(s),g(s)]\,ds\,,$$

(3.3)
$$N[f](t) = U(t)f_0 + N_0[f,f](t)\,,$$

と定義すると (3.1) は $f = N[f]$, 即ち N の不動点が求まればよい。まず N_0 を評価するために次のノルムを導入する。

(3.4) $$|||f||| = \sup_{|t|\leq T} \|f(t)\|_{\alpha-\beta|t|,\,\mu-\lambda|t|,\,\kappa,\,\rho-\sigma|t|,\,\nu}$$

但し T は

(3.5) $$T = \min\Big(\frac{\alpha}{2\beta}, \frac{\mu}{2\lambda}, \frac{\rho}{2\sigma}\Big),$$

もちろん $\alpha, \beta, \mu, \lambda, \rho, \sigma > 0$, $\kappa, \nu \geq 1$ である。さらに以下では

(3.6) $$\kappa = 1, \quad 1 \leq \nu < (3-\gamma-\gamma')/2(\gamma'-1)\,,$$

を仮定する。(2.3) (及び (2.2)) より $(3-\gamma-\gamma')/2(\gamma'-1) > 1$ だから上の第2式は意味をもつ。このとき $\gamma'-1 < (2-\gamma)/(1+2\nu) < 1$ が成り立つので

(3.7) $$\gamma'-1 < \delta < (2-\gamma)/(1+2\nu)$$

なる δ が選べる。

ノルム (3.4) では t に応じて変化する空間 $\mathcal{Y}^{(\kappa,\nu)}_{\alpha-\beta|t|,\,\mu-\lambda|t|,\,\rho-\sigma|t|}$

を考えていることになる．こうすることによって (3,3) の N_0 が同一ノルム $|||\cdot|||$ で閉じた評価が可能になるのである．即ち

Lemma 3.3. (2.1)(2.2)(2.3) を仮定する．$\alpha, \beta, \mu, \lambda, \rho, \sigma > 0$, $\lambda \geqq \rho$ とし T, κ, ν, δ を (3.4)〜(3.7) を満たすものとすると

$$|||N_0[f, g]||| \leq C_0\, a_1(\beta, \sigma)\, |||f|||\, |||g|||,$$

(3.8) $$a_1(\beta, \sigma) = \beta^{-(\gamma+\delta)/2}(\beta^{-\delta/2} + \sigma^{-\nu\delta}),$$

が成り立つ．但し C_0 は α, ρ にのみ依存する定数である．

証明．明らかに

$$\partial_x^k Q[f, g] = \sum_{m \leq k} \frac{k!}{m!(k-m)!} Q[\partial_x^m f, \partial_x^{k-m} g]$$

がすべての $k \in \mathbb{N}^n$ について成り立つ．よって (2.8) より

$$\|Q[f, g]\|_{\alpha, \mu, \kappa, \rho, \nu} \leq \sum_{k, m} \frac{\mu^{|k|+|m|}}{(k!\, m!)^{\kappa}} \|Q[\partial_x^k f, \partial_x^m g]\|_{\alpha, \rho, \nu}.$$

この右辺を定理 2.4 を用いて評価すると

(3.9) $$\|Q[f, g]\|_{\alpha-\beta, \mu, \kappa, \rho-\sigma, \nu} \leq C a_0(\beta, \rho, \sigma)\, \|f\|_{\alpha, \mu, \kappa, \rho, \nu}\, \|g\|_{\alpha, \mu, \kappa, \rho, \nu}$$

を得る．さて (3.3) の N_0 についてまず Lemma 3.2 より

(3.10) $$\|N_0[f, g](t)\|_{\alpha-\beta|t|, \mu-\lambda|t|, \kappa, \rho-\sigma|t|, \nu} \leq \left|\int_0^t \|w(s)\|_{\alpha-\beta|t|, \mu''(t), \kappa, \rho-\sigma|t|, \nu}\, ds\right|,$$

を得る．但し $w(s) = Q[f(s), g(s)]$ とおいた．また

$$\mu''(t) = \{(\mu-\lambda|t|)^{1/\kappa} + (\rho-\sigma|t|)^{1/\kappa}|t-s|^{1/\kappa}\}^{\kappa}.$$

仮定により $\kappa = 1$, $\lambda \geqq \rho$, また $0 \leq s \leq t$ または $0 \geqq s \geqq t$ であるから

$$\mu''(t) \leq \mu - \lambda|t| + \lambda|t-s| = \mu - \lambda|s|$$

である. 他方 (3.9) で

$$\alpha \to \alpha-\beta|s|, \quad \beta \to \beta|t-s|,$$

$$\rho \to \rho-\sigma|s|, \quad \sigma \to \sigma|t-s|$$

なる置き代えを行い, $\alpha-\beta|s|-\beta|t-s| = \alpha-\beta|t|$ 等に注意すれば,

$$\|w(s)\|_{\alpha-\beta|t|,\mu'(t),\kappa,\rho-\sigma|t|,\nu}$$

$$\le C_{\alpha-\beta|s|}\, a_0(\beta|t-s|,\ \rho-\sigma|s|,\ \sigma|t-s|)\,|||f|||\,|||g|||\ .$$

但し $C=C_\alpha$ は補題2.1 のもの. 故に $C_{\alpha-\beta|s|} \le C_{\alpha/2}$ ((3.5) により $\alpha-\beta|s| \geqq \alpha/2$ が $|s|\le T$ で成立.) また

$$a_0(\beta|t-s|,\ \rho-\sigma|s|,\ \sigma|t-s|)$$

$$\le (1+2(1+\rho)\rho^{\nu\delta-1})\, a_1(\beta,\sigma)\, a_2(|t-s|),$$

a_1 は (3.8) で定義した. また

$$a_2(\tau) = \tau^{-(\gamma+2\delta)/2} + \tau^{-(\gamma+\delta+2\nu\delta)/2}\ .$$

(3.7) で δ を定めたので $(\gamma+2\delta)/2 \le (\gamma+\delta+2\nu\delta)/2 < 1$. よって

$$\sup_{|t|\le T}\left|\int_0^t a_2(|t-s|)\,ds\right| < +\infty\ .$$

これらを (3.10) に代入すれば補題を得る. (証了)

さて X_a, $a>0$ を

$$X_a = \{\, f = f(t,x,\xi) \mid |||f||| \le a \,\}$$

と定めると距離 $|||f-g|||$ で完備である. (3.3) の N について:

Lemma 3.4. $\alpha, \mu, \rho > 0$ かつ κ, ν は (3.6) のもの, また $f_0 \in \gamma^{(1,\nu)}_{\alpha,\mu,\rho}$ とする. このとき N が X_a で縮小写像となるように β, λ, σ 及び a を定めることができる. T は (3.5) で定める.

証明. (3.8) で $\beta,\sigma\to\infty$ ならば $a_1(\beta,\sigma)\to 0$ となるから

$$d\equiv 1-4C_0 a_1(\beta,\sigma)\|f_0\|_{\alpha,\mu,1,\rho,\nu}>0$$

となる β,σ が選べる. そこで a を

(3.11) $$a=(1-\sqrt{d})/(2C_0 a_1(\beta,\sigma))$$

と定める. 最後に $\sigma\gg\rho$ と σ を選ぶ. Lemma 3.2, 3.3 より

$$|||N[f]|||\le\|f_0\|_{\alpha,\mu,1,\rho,\nu}+C_0 a_1(\beta,\sigma)|||f|||^2$$

であるから $f\in X_a$ ならば, a の選び方より $|||N[f]|||\le a$, 即ち $N[f]\in X_a$ が従う. 即ち N は X_a を X_a に写す. 同様に $f,g\in X_a$ ならば

(3.12) $$|||N[f]-N[g]|||=|||N[f-g,f+g]|||\le 2aC_0 a_1(\beta,\sigma)|||f-g|||$$

であるが, $2aC_0 a_1(\beta,\sigma)=1-\sqrt{d}<1$. (証了).

以上から N は X_a で唯1つの不動点 $f=N[f]$ を持つ. これは (3.1) の解である. この f は x,ξ についてもちろん C^∞ であるが, 更に

(3.13) f, f_t は t について連続, x,ξ について C^∞

であることが容易にわかるので (1.1) の古典解である. また

(3.14) $$f\in C^0([-T,T]:\gamma^{(1,\nu)}_{\alpha/2,\mu/2,\rho/2})\cap C^1([-T,T]:\gamma^{(1,\nu)}_{\alpha/2-\varepsilon,\mu/2-\varepsilon,\rho/2-\varepsilon})$$

が任意の $\varepsilon>0$ について成り立つこともわかる.

更に N はこれ以外の不動点を持たない. 実際 $g\in X_{a'}$, $a'\neq a$ を N の f と異る不動点とすると (3.12) と同様にして

$$|||f-g|||=|||N_0[f-g,f+g]|||\le(a+a')C_0 a_1(\beta,\sigma)|||f-g|||$$

を得るが, β,σ を十分大きく取りなおすと $|||f-g|||=0$ を得る.

最後に (3.6) で $\kappa=1$ を仮定したのは, $\kappa>1$ では Lemma 3.3 が,

従って Lemma 3.4 が成り立たないからである. 実際, (3.10) では $\mu-\lambda|t|$ の代りに,

$$\{\mu(t)^{1/\kappa}+(\rho-\sigma|t|)^{1/\kappa}|t-s|^{1/\kappa}\}^{\kappa}\leq\mu(s)$$

を満たす $\mu(t)$ ならばどんなものでもよいのであるが, これを

$$\mu(s)^{1/\kappa}-\mu(t)^{1/\kappa}\geq(\rho-\sigma|t|)^{1/\kappa}|t-s|^{1/\kappa}$$

と書いてみればわかるように, $\mu(t)^{1/\kappa}$は $t>0$ ($t<0$) で単調減少(増加)でなければならない. しかしもし $\kappa>1$ ならばこの式は $\mu(t)^{1/\kappa}$ が至る所微分不可能であることを示し矛盾となる.

$\kappa=1$ は x に関して解析的であることを意味する. より正確には $f\in X_a$ は $f(t)\in\gamma^{(1,\nu)}_{\alpha-\beta|t|,\,\mu-\lambda|t|,\,\rho-\sigma|t|}$ を意味するから,

(3.15) $f(t,x,\xi)$ は x に関して $\mathbb{R}^n+i\{y\in\mathbb{R}^n\mid |y|<\mu-\lambda|t|\}$ で解析的.

以上をまとめておく.

定理 3.5. (2.1)〜(2.3) を仮定する. $\alpha,\mu,\rho>0$, ν は (3.6) を満たすとする. $f_0\in\gamma^{(1,\nu)}_{\alpha,\mu,\rho}$ ならば $\beta,\sigma,\lambda,T>0$ が定まり,

(i) (1.1) は $[-T,T]\times\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi$ で古典解 f を持つ.

(ii) f は (3.13), (3.14), (3.15) の性質の他に, $|t|\leq T$ で

(iii) $f(t)\in\gamma^{(1,\nu)}_{\alpha-\beta|t|,\,\mu-\lambda|t|,\,\rho-\sigma|t|}$

$$\|f(t)\|_{\alpha-\beta|t|,\,\mu-\lambda|t|,\,1,\,\rho-\sigma|t|,\,\nu}\leq 2\|f_0\|_{\alpha,\mu,1,\rho,\nu}$$

を満たす.

この最後の不等式は (3.11) から $a\leq 2\|f_0\|$ が従うことによる.

より一般の f_0 に対する(局所)解の存在については現在のところ

何もわかっていない.

4. Angular cutoff 近似の収束

(1.2) で $g(v,\theta)$ を (1.5) の $g^\varepsilon(v,\theta)$ で置き代えて得られる Q を Q^ε と記す. $g^\varepsilon(v,\theta)$ は最早 $\theta=\pi/2$ での singularity を持たないので Q^ε は通常の積分作用素として扱えるので Q^ε に対する初期値問題 (1.1) はより一般の f_0 に対し局所解を持つことがわかっている [1]. さらに大域解も初期値問題のみならず種々の初期値-境界値問題に対して得られている ([4], [5] 及びそこに掲げられている参考文献を参照).

本節では $\varepsilon\to 0$ の極限について考察する. $g(v,\theta)$ が (2.1)~(2.3) を満せば $g^\varepsilon(v,\theta)$ ももちろんこれらを, しかも ε に関して一様に満たす. 従って Q^ε についても定理 3.5 が適用でき, 特にそこで定められた ρ, σ, λ, T は ε に依存しない. こうして得られた解を f^ε と記す. すると $|||f^\varepsilon - f||| \to 0$ $(\varepsilon\to 0)$ が示せる. f は定理 3.5 の本来の ($\varepsilon=0$ の) 解である. もちろん初期値 f_0 は f^ε, f に共通の同一のものを考えている. 故に cutoff 近似 (1.5) は少くとも Gevrey class の枠内では正当化できたことになる. 詳しくは次が示せる.

定理 4.1. $|||f^\varepsilon - f||| \leq C\varepsilon^{\delta-(\gamma'-1)}$. $C\geq 0$ は ε に依存しない定数, また δ は (3.7) で定めたものである.

証明. (3.3)でQをQ^{ε}で置き代えたものを夫々N_0^{ε}, N^{ε}とする. また$\overline{N}_0^{\varepsilon} = N_0^{\varepsilon} - N_0$とおく. $f = N[f]$, $f^{\varepsilon} = N^{\varepsilon}[f^{\varepsilon}]$だから$f^{\varepsilon} - f = N_0^{\varepsilon}[f^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}] - N_0[f,f] = N_0^{\varepsilon}[f^{\varepsilon}+f, f^{\varepsilon}-f] + \overline{N}^{\varepsilon}[f,f]$. $f^{\varepsilon}, f \in X_a$であり, また明らかに$N_0^{\varepsilon}$についても Lemma 3.3 がそのまま成り立つから

$$
\begin{aligned}
|||f^{\varepsilon}-f||| &\leq C_0 a_1(\beta,\sigma)\, |||f^{\varepsilon}+f|||\, |||f^{\varepsilon}-f||| + |||\overline{N}^{\varepsilon}[f,f]||| \\
&\leq 2a\, C_0 a_1(\beta,\sigma)\, |||f^{\varepsilon}-f||| + |||\overline{N}^{\varepsilon}[f,f]|||.
\end{aligned}
$$

(3.11)より $2a\, C_0 a_1(\beta,\sigma) = 1-\sqrt{d}$. よって

(4.1) $$|||f^{\varepsilon}-f||| \leq |||\overline{N}^{\varepsilon}[f,f]|||/\sqrt{d}.$$

さて(1.2)に於て$g(v,\theta)$を$\bar{g}^{\varepsilon}(v,\theta) = g^{\varepsilon}(v,\theta) - g(v,\theta) = (1-\chi^{\varepsilon}(\theta))g(v,\theta)$に置き代えたものを$\overline{Q}^{\varepsilon}$とする. 上で定義した$\overline{N}_0^{\varepsilon}$は(3.3)で$Q$を$\overline{Q}^{\varepsilon}$に置き代えたものに他ならない. $\overline{Q}^{\varepsilon}$に対し Lemma 2.1 が成り立つのは明らかだが, 特に$\bar{g}^{\varepsilon}=0$, $|\theta-\pi/2|>\varepsilon$だから(2.7)の$\theta$に関する積分は$\int_{J_{\varepsilon}} |\cos\theta|^{-\gamma'+k\delta}\, d\theta$, $k=1,2$, $J_{\varepsilon} = [\pi/2-\varepsilon, \pi/2+\varepsilon]$で置き代えられる. この積分は上から$C\varepsilon^{1-\gamma'+k\delta}$で抑えられる. $C \geq 0$はεに依存しない定数. 故に Lemma 2.1, 2.2, Theorem 2.4 のCを$C\varepsilon^{1-\gamma'+\delta}$で置き代えてよい. よって$\overline{N}_0^{\varepsilon}$に対し Lemma 3.3 の$C_0$を$C_0\varepsilon^{1-\gamma'+\delta}$で置き代えたものが成り立つ. これと(4.1)より定理を得る. (証了).

この定理の系として

定理4.2. $f_0 \geq 0$ ならば $f(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$.

証明 $f_0 \geq 0$ ならば $f^\varepsilon(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$ なることがわかる[1]ので、定理4.1で $\varepsilon \to 0$ としてこの定理を得る.

$f^\varepsilon \geq 0$ の証明は Q^ε が通常の積分作用素であることを本質的に使っているので f^ε を経由せず直接定理4.2を証明するのは難しいと思われる.

References

[1] K.Asano, Local solutions to the initial and initial boundary problems for the Boltzmann equation withan external force. J.Math.Kyoto Univ. (to appear).

[2] H.Grad, Asymptotic theory of the Boltzmann equation. Rarefied Gas Dynamics I.(Laurmann,J.A.,Ed), Academic Press, N.Y. 1963, 25-59.

[3] T.Nishida, A note on a theorem of Nirenberg. J.Diff. Geometry, 112(1977),629-633.

[4] S.Ukai and K.Asano, The Euler limit and initial layer of the nonlinear Boltzmann equation. Hokkaido Math. J. ,12(1983), 311-332.

[5] —— and ——. Steady solutions of the Boltzmann equation for a gas flow past an obstacle. Arch. Rational Mech. Anal., 84,(1983), 249-291.

[6] S.Ukai. Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cutoff. Japan J.Appl.Math., 1 (1984), 141-156.