

双曲型葉層 C^* -環について

都立大理 高井博司

§0. 序 2次元 torus T^2 上の Kronecker 葉層 $\mathcal{F}_\theta$ ($\theta \notin \mathbb{Q}$) について, その葉層 C^* -環 $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ は, 無理数回転 C^* -環 $\mathcal{A}_\theta$ に安定同型である. Pimsner-Voiculescu の結果から, $\mathcal{A}_\theta$ は $K_0(\mathcal{B}_\theta) \simeq \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ なる (AF)-環 $\mathcal{B}_\theta$ に埋め込み可能であることを使って, $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ の K -理論 $K_*(T^2/\mathcal{F}_\theta)$ は $K^*(T^2)$ に同型であることが示される. よって $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ は (AF)-環ではない. 一方 $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ は C^* -接合積 $C(T^2) \times \mathbb{R}$ に同型であるから, *strongly amenable* (SA) である. しかるに (AF) と (SA) の差は多大であるので, $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ をもっと詳しく代数的性質を調べる必要がある. 今 $\theta \in \bigcup_{g \in SL(2, \mathbb{Z})} Sp(g)$ とすると $\mathcal{F}_\theta$ は双曲型 (minimal) 葉層となる事実より, 上記結果は, 次の問題を提起させる:

(I) $(M, \mathcal{F})$ を (*topological mixing*) 微分同相 φ から作られる双曲型葉層化多様体としたとき, その葉層 C^* -環 $C^*(M, \mathcal{F})$ は I-型 C^* -環の inductive limit (AI)-環か?

(II) (I) の setting で, $C^*(M, \mathcal{F})$ は (AF) でなく, かつ

適当な (AF) に埋め込み可能か？

(III) (I) の setting で, $K_{\beta}(M, \mathcal{F})$ は $K^{\beta+\dim \mathcal{F}}(M)$ に同型か？ ($\beta=0,1$)

本稿では上記 (I)~(III) それぞれについて現在まで得られた結果を報告する。即ち, 先ず (III) については次の結果がある:

定理 ([7]) M が *infra-homogeneous* ならば, (III) が成り立つ。

しかし Handel-Thurston により, *infra-homogeneous* でない適当な 3 次元多様体 M^3 上に双曲型葉層 $\mathcal{F}$ が存在するので, $(M^3, \mathcal{F})$ について (III) が成り立つかどうか check が必要である。

(I)~(II) については次が得られる:

[I] (I) の setting で, $C^*(M, \mathcal{F})$ は *approximately homogeneous* (AH) である。

[II] $\mathcal{F}$ が *transversely* (K-)oriented かつ $\text{codim } \mathcal{F}$ が奇数ならば, $C^*(M, \mathcal{F})$ は (AF) でない。更に A を $\mathcal{F}$ の *transition matrix* としたとき, $C^*(M, \mathcal{F})$ は *Cuntz-Krieger* (AF)-環 $\mathcal{O}_A$ に埋め込み可能である, ただし $\mathcal{O}_A$ は *Cuntz-Krieger* 環 $\mathcal{O}_A$ の *gauge* 作用による不動点全体 $\mathcal{O}_A^T$ と *compact* 作用素全体の成す C^* -環 $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ との *tensor product* $\mathcal{O}_A^T \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H})$ である。

以下 [I]~[II] を順次その概略を述べることにする。

§1. 準備 compact C^∞ -多様体 M 上の *topologically mixing* な微分同相写像 $\mathcal{P}$ で双曲型であるものを考える。そのとき

$$W(x) = \{y \in M \mid d(\mathcal{P}^n(x), \mathcal{P}^n(y)) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow +\infty)\}, (x \in M)$$

なる集合は M の部分多様体で, $\mathcal{F} = \{W(x)\}_{x \in M}$ は M の葉層構造を与える。 $\mathcal{P}$ が *top. mixing* より, $\mathcal{F}$ は *minimal* になる。

即ち任意の $W(x)$ は M で *dense* になる。 $\mathcal{P}$ の *transition matrix* を A とすると, $A^n > 0$ なる $n \geq 1$ が存在する。 $(M, \mathcal{P})$ の *symbolic dynamics* を (Σ_A, σ) で表わすと, 即ち

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Sigma_A = \{ \omega \in \prod_{-\infty}^{\infty} \{1, \dots, n\} \mid A_{\omega_j \omega_{j+1}} = 1 \} \\ \sigma(\omega)_j = \omega_{j+1} \quad (j \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

とすると, $\pi: \Sigma_A \rightarrow M$ なる *surjective continuous* 写像で

$$(1.2) \quad \pi \circ \sigma = \mathcal{P} \circ \pi$$

を満たすものがとれる。今 $\{\omega^{(k)}\}_{k=1}^n \subset \Sigma_A$ を $V(\pi(\omega^{(k)})) \cap V(\pi(\omega^{(l)})) = \emptyset \ (k \neq l)$ となる様に選ぶ, ただし

$$V(x) = \{y \in M \mid d(\mathcal{P}^n(x), \mathcal{P}^n(y)) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow -\infty)\}$$

なる M の部分多様体である。そこで Σ_A^+ の *compact open* 集合 E_k を

$$E_k = \{ \omega \in \Sigma_A^+ \mid \omega_0 = k \} \quad (1 \leq k \leq n).$$

とおくと, $\Sigma_A^+ = \bigcup_{k=1}^n E_k$ は明らかである。そのとき $\omega \in E_k$ に対して,

$$\tilde{\omega}_j = \omega_j \quad (j \geq 0), \quad \omega_j^{(k)} \quad (j < 0)$$

とおき,

$$\pi_+(w) = \pi(\tilde{w})$$

とおくと, π_+ は Σ_A^+ から $\bigcup_{k=1}^n V(\pi(w^{(k)}))$ の中への continuous 写像となる。今 $K = \pi_+(\Sigma_A^+)$ とおくと, $\mathcal{P}$ が top. mixing より, $\text{int } K \cap W(x) \neq \emptyset$ ($W(x) \in \mathcal{F}$) なる性質を持つ compact 集合で, proper である。即ち, $K = \overline{\text{int } K}$ (in $\bigcup_{k=1}^n V(\pi(w^{(k)}))$) が成り立つ。 (Σ_A^+, σ_+) を (Σ_A, σ) の future part とする。

今 Σ_A^+ の dense G_δ -set $\tilde{L}$ を

$$(1.3) \quad \tilde{L} = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_+^{-j} \left(\bigcap_{a \in \Sigma_A^+} \bigcup_{k=0}^{\infty} \{w \in \Sigma_A^+ \mid w_k = a_k \text{ or } C_{a_k} \cap C_{a_k} = \emptyset\} \right)$$

とおく, ただし

$$C_k = \pi(F_k), \quad F_k = \{w \in \Sigma_A \mid w_0 = k\} \quad (1 \leq k \leq n)$$

なる M の Markov 分割である。 $L = \pi_+(\tilde{L})$ とおくと,

π_+ は $\tilde{L}$ から L への bijection となる。更に $\tilde{L} \times \tilde{L}$ の関係 $\tilde{\mathcal{F}}$ を,

$$(w, w') \in \tilde{\mathcal{F}} \iff \exists n \geq 0; \quad w_j = w'_j \quad (\forall j \geq n)$$

を導入すると, $(\tilde{L}, \tilde{\mathcal{F}})$ と $(L, \mathcal{F})$ は π_+ によって関係同値になる。更に $\{V(\pi(w^{(k)}))\}_{k=1}^n$ 上の longitudinal Lebesgue 測度 $m^{(w)}$ に対して,

$$m^{(w)}(K \setminus L) = 0$$

が成り立つ。 $\mathcal{P}$ が top. mixing より $\text{int}_*(L) = \emptyset$ である。実際,

もし $L \supset U \neq \emptyset$ なる open (in K) set がとれると, $\phi + \pi_+^{-1}(U) \subset \tilde{L}$

なる Σ_A^+ の open set について, σ_A が expanding かつ top. mixing より, $\sigma_A^k(\pi_A^{-1}(U)) = \Sigma_A^+$ なる $k \in \mathbb{Z}$ が存在する。よって

$\tilde{L} = \Sigma_A^+$ となる。従って任意の $a, b \in \Sigma_A^+$ について, $a_k = b_k$ 又は $C_{a_k} \cap C_{b_k} = \emptyset$ なる $k \geq 0$ が存在する。一方適当な $a, b \in \Sigma_A^+$ に対して, $a_k \neq b_k$ かつ $\partial C_{a_k} \cap \partial C_{b_k} \neq \emptyset$ ($k \geq 0$) となるから矛盾である。よって L は "irrational numbers" の拡張とみることが出来る。

§2 葉層 C^* -環 $(M, \mathcal{F})$ を minimal 双曲型葉層化多様体とし, G をその holonomy groupoid とする。 α, β をそれぞれ G から M への source map, range map とし, $A, B \subset M$ に対して $G_B^A = \alpha^{-1}(B) \cap \beta^{-1}(A)$ とおくと, G の top. subgroupoid になる。さらに G に $\mathcal{F}$ から induce される葉層が存在する。

$(M, \mathcal{F})$ の葉層 C^* -環 $C^*(M, \mathcal{F})$ を G の reduced groupoid C^* -環 $C_r^*(G)$ として定義する。

さて, K, L を §1 の集合とし, $C_r^*(G_K^K), C_r^*(G_L^L)$ を考える。 K は $\mathcal{F}$ の sufficient transversal であるから (∂K は多様体でないかも知れないが) 次の命題が成り立つ:

命題 2.1 $C^*(M, \mathcal{F})$ は $C_r^*(G_K^K)$ に安定同型である。

$\mathcal{F}$ は minimal より $C^*(M, \mathcal{F})$ は simple C^* -環である。よって上記命題より $C_r^*(G_K^K)$ も simple である。 $C_r^*(G_K^K)$ の multiplier C^* -環の projection χ_L を $\chi_L(x) = 1$ ($x \in L$), 0 ($x \notin L$) で

で定義する。そのとき hereditary C^* -環 $\lambda_L C^*(G_K^L) \lambda_L$ は $C^*(G_L^L)$ に安定同型になり, $\lambda_L C^*(G_K^L) \lambda_L$ は $\overline{C^*(G_K^L) \lambda_L C^*(G_K^L)}$ に安定同型であるから $C^*(G_K^L)$ の simplicity より次の結果を得る:

命題 2.2 $C^*(G_K^L)$ は $C^*(G_L^L)$ と安定同型である。

そこで $n \geq 0$ に対して,

$$G_n = \{ \gamma \in G_L^L \mid \pi_4^{-1}(\rho(\gamma))_f = \pi_4^{-1}(\rho(\gamma))_g \text{ } (\forall \gamma \in G_n) \}$$

とおくと, G_n は G_L^L の top. subgroupoid で, $G_L^L = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$,

$G_n \subset G_{n+1}$, $(G_n)^0 = L$ ($n \geq 0$) が成り立つ。今 $f \in C_c(G_n)$, $x \in L$, $\xi \in L^2(G_n^x)$ に対して,

$$(2.1) \quad (R_x(f)\xi)(\gamma) = \int_{G_n^x} f(\gamma^{-1}\delta) \xi(\delta) d\nu^x(\delta)$$

とおく, ただし ν^x は $\mathcal{F}$ から canonical に作られる G_n^x 上の measure である。 K が $\mathcal{F}$ の transversal であるから, $\mathcal{F}$ が holonomy を持たないことと相交って,

$$(R_x(f)\xi)(x, \rho(\gamma)) = \sum_{\gamma \in G_n^x} f(\rho(\gamma), \gamma) \xi(x, \gamma)$$

となる。 $\mathcal{H}(x) = L^2(G_n^x)$ とおくと $\dim \mathcal{H}(x) < +\infty$ となり,

$x \mapsto R_x(f)\xi$ が連続であるから, $x \mapsto \|R_x(f)\|$ も連続になる。よって $x \mapsto R_x(f)$ は L 上の $\mathcal{B}(\mathcal{H}(x)) = M_{m_n(x)}(\mathbb{C})$ を fibre に持つ continuous field になる。更に対応

$$f \in C_c(G_n) \longleftrightarrow (x \mapsto R_x(f))$$

により, $C^*(G_n) \simeq CF(L, M_{m_n(x)}(\mathbb{C})) = \mathcal{A}_n$ の同型対応を与える。今 $C_c(G_n)$ から $C_c(G_L^L)$ への canonical imbedding j_n を

考える。即ち $f \in C_c(G_n)$ に対して $j_n(f) \in C_c(G_L^1)$, $j_n(f)|_{G_n} = f$
 $j_n(f)|_{G_n^c} = 0$ を満たす。そのとき j_n は $*$ -homomorphism
 になる。更に $x \in L$, $f \in C_c(G_n)$ に対して,

$$(2.2) \quad \|R_x^{G_L^1} \cdot j_n(f)\| \leq \sup_{y \in L} \|R_y^{G_n}(f)\|$$

が成り立つ。ただし $R_x^{G_L^1}$, $R_y^{G_n}$ はそれぞれ $C_c(G_L^1)$, $C_c(G_n)$ の

R_x, R_y である。実際, $\xi \in L^2(G_L^1)$ に対して

$$(2.3) \quad (R_x^{G_L^1} \cdot j_n(f) \xi)(\delta) = \sum_{\gamma \in G_L^1} j_n(f)(\gamma^{-1}\delta) \xi(\gamma)$$

より, $j_n(f)(\gamma^{-1}\delta) \neq 0$ ならば $\gamma^{-1}\delta \in G_n$ が成り立つ。そこで

$\gamma, \delta \in \mathcal{M}(L) \cap G_L^1$ に対して

$$\gamma \sim \delta \iff \gamma^{-1}\delta \in G_n$$

とすると, “ $\sim$ ” は同値関係になり, $[\gamma]$ を γ の類とすると,

$$\mathcal{M}(L) \cap G_L^1 = \bigcup_{\gamma} [\gamma]$$

と分割される。更に $[\gamma] \rightarrow L$ を $\delta \in [\gamma] \rightarrow \mathcal{M}(\delta) \in L$ で与え
 ると位相同型を与える。そのとき

$$G_L^1 = \bigcup_{\gamma} [\gamma] \cup (\mathcal{M}(L)^c \cap G_L^1)$$

となる。よって (2.3) は $\delta \in [\gamma]$ について, $\xi \in L^2([\gamma])$ とす

$$\begin{aligned} \text{ると,} \quad (R_x^{G_L^1} \cdot j_n(f) \xi)(\delta) &= \sum_{[\gamma] \ni \gamma} f(\delta^{-1}\gamma) \xi(\gamma) \\ &= \sum_{[\gamma] \ni \gamma} f(\delta^{-1}\gamma\gamma^{-1}) \xi(\gamma\delta^{-1}) \\ &= \sum_{G_n^{(j)} \ni \gamma} f((\delta^{-1}\gamma)^{-1}) \xi(\gamma\delta^{-1}) \\ &= (R_{\delta^{-1}}^{G_n}(f) \xi_{\gamma})(\gamma\delta^{-1}) \end{aligned}$$

ただし $\xi_{\gamma}(\gamma) = \xi(\gamma\gamma)$ である。よって $L^2([\gamma])$ から $L^2(G_n^{(j)})$

への unitary U_γ で $\xi \mapsto \xi_\gamma$ となるものをとると, $\gamma \in G_L^x$ について,

$$U_\gamma R_x^{G_L^x} f_n U_\gamma^{-1} = R_{\rho(\gamma)}^{G_n}(f)$$

を得る. よって

$$\begin{aligned} R_x^{G_L^x} \cdot f_n(f) &= \bigoplus_\gamma R_x^{G_L^x} \cdot f_n(f) \Big|_{\square} \\ (2.4) \quad &= \bigoplus_\gamma U_\gamma R_x^{G_L^x} f_n(f) U_\gamma^{-1} \\ &= \bigoplus_\gamma R_{\rho(\gamma)}^{G_n}(f) \end{aligned}$$

が成り立つ. これは (2.2) を意味する. 従って f_n は $C_r^*(G_n)$ から $C_r^*(G_L^x)$ への isometric $*$ -homomorphism を意味する. 上記と同様な議論により, $C_r^*(G_n)$ から $C_r^*(G_{n+1})$ への isometric $*$ -homomorphism $f_{n+1,n}$ で

$$f_{n+1} \circ f_{n+1,n} = f_n$$

となるものがとれる. $G_L^x = \varinjlim G_n$ より,

$$\begin{cases} f_n * f * f_n^* \in C_c(G_n) & (f \in C_c(G_L^x)) \\ \|f_n * f * f_n^* - f\| \rightarrow 0 & (n \rightarrow +\infty) \quad (f \in C_c(G_L^x)) \end{cases}$$

となる $f_n \in C_c(G_n)$ ($n \geq 0$) を考えると,

$$C_r^*(G_L^x) \simeq \varinjlim (\mathcal{O}_n, f_{n+1,n}), \quad \mathcal{O}_n \simeq CF(L, M_{m(n)}(\mathbb{C}))$$

が得られる. よって 命題 1~2 より $\dim \mathcal{F} \geq 1$ とすると,

$$\begin{cases} C_r^*(M, \mathcal{F}) \simeq \varinjlim (\mathcal{O}_n \otimes C(\mathcal{H}), f_{n+1,n} \otimes \text{id}) \\ \mathcal{O}_n \simeq CF(L, M_{m(n)}(\mathbb{C})) \end{cases}$$

となる. $\mathcal{O}_n \otimes C(\mathcal{H})$ は L 上の diagonal $M_{m(n)}(\mathbb{C}) \otimes C(\mathcal{H})$ -bundle

の continuous field C^* -環で, L は paracompact space で,
 $M_{m,1}(\mathbb{C}) \otimes C(\mathcal{X})$ は可算無限次元 Hilbert space 上の compact 作用素全体の成す C^* -環より, Dixmier-Douady により, trivial continuous field, 即ち $C_0(L) \otimes C(\mathcal{X})$ になる。以上をまとめると次の結果が得られる:

定理 2.3 $(M, \mathcal{F})$ を minimal 双曲型葉層化多様体としたとき, その C^* -環 $C^*(M, \mathcal{F})$ は approximately homogeneous (AH) になる。

$\dim \mathcal{F} = 0$ ならば, 定義より $C^*(M, \mathcal{F}) \simeq C(M)$ となるから明らかである。

系 2.4 $\theta \in \bigcup_{g \in SL(2, \mathbb{Z})} Sp(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{Q}$ ならば, θ の無理数回転 C^* -環 $\mathcal{O}_\theta$ は (AH) であるが (AF) ではない。

仮定より T^2 の minimal 双曲型葉層 $\mathcal{F}_\theta$ が定まり, その C^* -環 $C^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ は $\mathcal{O}_\theta$ に安定同型である。よって定理 2.3 より結論を得る。

§.3. K-理論 本節では §2 での C^* -環 $C^*(M, \mathcal{F})$ の analytic K-理論の動向を調べてみることにする。§2 の記号を使うと

$$K(M/\mathcal{F}) = \varinjlim (K(L), (\mathcal{F}_{m,n})_*)$$

が成り立つ。そこで $(\mathcal{F}_{m,n})_*$ を調べることにする。定義より

$$\mathcal{F}_{m,n}(f) = x \mapsto R_x^{\mathcal{F}_{m,n}} \cdot \mathcal{F}_{m,n}(f) .$$

§2 の (2.4) より,

$$R_x^{G_{MH}} \circ j_{MH, n}(f) = \bigoplus_{\gamma \in G_{MH}^x \cap \mathcal{M}(L)} R_{\mathcal{M}(\gamma)}^{G_{\gamma}}(f)$$

を得る。§2 の同値関係 " $\sim$ " を使うと, (2.4) より

$$R_x^{G_{MH}} \circ j_{MH, n}(f) = \bigoplus_{[\gamma] \in G_{MH}^x / \sim} R_{\mathcal{M}(\gamma)}^{G_{\gamma}}(f)$$

が成り立つ。

$[\gamma] = \gamma \cdot G_n$, $[\gamma] \ni \delta \mapsto \mathcal{M}(\delta) \in L$ は位相同型である。更に

任意の $x, y \in L$ に対して, $\# G_{MH}^x / \sim = \# G_{MH}^y / \sim (\equiv m_{MH})$ より,

$$x \mapsto R_x^{G_{MH}} \circ j_{MH, n}(f) = (x \mapsto R_x^{G_{\gamma}}(f))^{\oplus m_{MH}}$$

が得られるので, $(j_{MH, n})_*: K(L) \rightarrow K(L)$ は

$$(j_{MH, n})_*(\xi) = m_{MH} \xi \quad (\xi \in K(L))$$

を満たす。今 $j: K(L) \rightarrow K(M/\mathcal{F})$ を

$$j(\xi) = (\xi, m_1 \xi, m_1 m_2 \xi, \dots, m_1 \dots m_n \xi, \dots) \quad (\xi \in K(L))$$

とおくと, *homomorphism* であり, $K(L)_{t,f}$ を $K(L)$ の *torsion free part* とすると, j は $K(L)_{t,f}$ 上 *injective* になる。よって次の

結果を得る:

定理 3.1 $(M, \mathcal{F})$ を *transversely* $(K-)$ *oriented* 葉層多様体で, $\text{codim } \mathcal{F}$ は *odd* とする。もし $\mathcal{F}$ が *minimal* 双曲型ならば, 葉層 C^* -環 $C^*(M, \mathcal{F})$ は (AH) であるが (AF) ではない。

一点 $p \in L$ の L への *natural imbedding* i の *push forward* 写像 $i_!$ による, p 上の *line bundle* 1_p の *image* $i_!(1_p) \in K(L)$ を考えると, *additive map* $\psi: K^1(L) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\gamma(\xi) = \langle \alpha\xi, [L] \rangle \quad (\xi \in K'(L))$$

で定義すると, $\gamma(\alpha/(\mathbb{I}_p)) \neq 0$ となり $\alpha/(\mathbb{I}_p) \in K'(L)_{\text{sf}}$ となる。

よって $\delta(\alpha/(\mathbb{I}_p)) \neq 0 \in K_2(M/\mathbb{I})$ を得る。

§4. 埋め込み $\mathcal{O}_\theta$ の $K_0(\mathcal{O}_\theta) \simeq \mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ なる (AF)-環 $\mathcal{O}_\theta$ への埋め込み可能なことは, $C^*(T^2, \mathbb{I}_\theta) \simeq \mathcal{O}_\theta \otimes C(L^2(S))$ より 双曲型葉層 C^* -環の (AF)-環への埋め込み問題に移行させる好例を与えている。

今 $(M, \mathbb{I})$ を *minimal* 双曲型葉層化多様体とし, $A, \tilde{L}, \mathbb{I}$ は §1~§2 のものとする。 $\tilde{L}$ の同相写像 g で

$$\sup_{w \in \tilde{L}} \delta(\mathbb{I}^k g(w), \mathbb{I}^k(w)) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow +\infty)$$

なるもの全体 Δ を考える。ただし δ は Σ_A^+ 上の *natural metric* である。そのとき Δ は *amenable* 群になる。 $g \in \Delta$ に対して u_g を g に対応する C^* -接合積 $C_0(\tilde{L}) \times \Delta$ の *multiples* 環の *unitary* とする。 *compact open set* $V \subset \tilde{L}$ に対して, χ_V をその特性関数としたとき,

$$u_g \chi_V - u_h \chi_V \quad (g|_V = h|_V)$$

で生成された $C_0(\tilde{L}) \times \Delta$ の *closed ideal* を $\mathcal{I}$ とし,

$$\mathcal{B}_A = (C_0(\tilde{L}) \times \Delta) / \mathcal{I}$$

を考える。 $f \in C_c(G_L^1)$ に対して, $(w, g) \in \tilde{L} \times \Delta$ について,

$$\gamma(f)(w, g) = f(\pi_4(w), \pi_4(gw))$$

とおくと, γ は $C_c^*(G_L^1)$ から $C_0(\tilde{L}) \times \Delta$ への $*$ -homomorphism

になり, $\psi(f)(\omega, e) \notin J$ より, ψ は $C_r^*(G_L^1)$ から B_A への non trivial な $*$ -homomorphism を定める. $C^*(M, \mathcal{F})$ は simple より, $\gamma: C^*(M, \mathcal{F}) \rightarrow B_A \otimes \mathcal{C}$ は into $*$ -isomorphism を与える. 今から B_A は $C_0(\mathcal{L})$ を含む stable な (AF)-環であることを示す.

実際 $1 \leq j \leq n$ に対して, $A_{\omega(f)_0, j} = 1$ なる $\omega(f) \in \mathcal{L}$ をとり

$$\Sigma_{\omega(f), j} = \{ \omega \in \mathcal{L} \mid \omega_0 = \omega(f)_0, \omega_1 = j \}$$

とおくと, $\Sigma_{\omega(f), j}$ は互いに disjoint な $\mathcal{L}$ の compact open set である. 今 B_A の projection P を,

$$P = \sum_j \chi_{\Sigma_{\omega(f), j}}$$

とおくと, $P B_A P \simeq (O_A)^T$ を示すことが出来るから, $B_A \simeq (O_A)^T \otimes \mathcal{C}(\mathcal{H})$ となる. ただし τ は Cuntz-Krieger 環 O_A 上の gauge 作用である. 何故ならば $A_{\omega, j} = 1$ なる (i, j) に対して $\omega', \omega'' \in \mathcal{L}$ を

$$(4.1) \quad \begin{cases} (\omega')_0 = i, A_{\omega'_0, i} = 1 \\ \sigma(\Sigma_{\omega'', (i, j)}) = \Sigma_{\omega', j} \end{cases}$$

となる様を選ぶ. ただし

$$\Sigma_{\omega'', (i, j)} = \{ \omega \in \mathcal{L} \mid \omega_0 = (\omega')_0, \omega_1 = i, \omega_2 = j \}$$

なる $\mathcal{L}$ の compact open set である. そこで $\omega(f), \omega', \omega'' \in \mathcal{L}$ と $j, (i, j)$ について,

$$(4.2) \quad \begin{cases} U(w(i), (i, f), w'', (i, f)) \sigma_f^{-1} U(w', f, a(f), f) \Sigma_{a(f), f} = \Sigma_{a(f), (i, f)} \\ U(w(i), (i, f), w'', (i, f)) : \Sigma_{w'', (i, f)} \rightarrow \Sigma_{w(i), (i, f)} \\ U(w', f, a(f), f) : \Sigma_{a(f), f} \rightarrow \Sigma_{w', f} \end{cases}$$

なる $U(\cdot) \in \Delta$ を考える。ただし σ_f^{-1} は $\Sigma_{w', f}$ でのみとる。

そのとき

$$S_i = \sum_{A_{i, f}=1} U(w(i), (i, f), w'', (i, f)) \sigma_f^{-1} U(w', f, a(f), f)$$

とおくと, S_i は B_A の partial isometry で

$$S_i S_i^* = P_i, \quad S_i^* S_i = Q_i$$

とおくと,

$$Q_i = \sum_f A_{i, f} P_f, \quad P_f P_k = 0 \quad (f \neq k), \quad P_f \leq P$$

が成り立つ。よって $P B_A P \simeq C^*(S_i)^T = C^*\{S_{i_m}^* \cdots S_{i_1}^* P_k S_{i_1} \cdots S_{i_m} \mid k \geq 1, m \geq 1\}$ を得る。従って $B_A \simeq O_A^T \otimes C(\mathcal{H}) (\equiv \mathcal{P}_A)$ を得る。 B_A は $B_A \otimes C(\mathcal{H}) \simeq B_A$ なる (AF)-環で $C_0(\mathbb{N})$ を含む。上記議論をまとめると次の結果を得る:

定理 4.1 $(M, \mathcal{F})$ を minimal 双曲型葉層化多様体とし A をその transition matrix とすると, 葉層 C^* -環 $C^*(M, \mathcal{F})$ は (AF)-環 $\mathcal{P}_A (= O_A^T \otimes C(\mathcal{H}))$ に忠実に埋め込み可能である。

参考文献

- [1] Bowen, R, Anosov foliations are hyperfinite, Ann. Math., 106 (1977), 549-565.

- [2] Bowen. R, *Equilibrium states and ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Springer LNM 470 (1975).
- [3] Connes. A, *A survey of foliations and operator algebras*, Proc. AMS 38 Part I (1983).
- [4] Cuntz. J - Krüger. W, *A class of C^* -algebras and topological Markov chains I, II.*, Inv. Math 56 (1980), 251-268, 63 (1981), 25-40.
- [5] Dixmier. J - Douady. A, *Champs continus d'espaces hilbertiens et C^* -algèbres*, Bull. Soc. Math. France, 91 (1963), 227-284.
- [6] Hilsum. M - Skandalis. G, *Stabilité des C^* -algèbres de feuilletages*, Ann. Inst. Fourier., 33 (1983), 201-208.
- [7] Takai. H, *C^* -algebras of Anosov foliations*, Springer LNM (1985).