数理解析研究所講究録
561巻 1985年 127-135

The Crossing Number Problem and Rotation System

関学大理　浅野孝平(Kouhei Asano)

一般にはグラフを平面上に self intersection なしに描くことはできない．しかし，辺と頂点，あるいは頂点と頂点が重なりあわないように描くことはできる．グラフGのこのような図のうち辺と辺の交わりが最小であるように描いた時の交差(crossing)の数を，Gの交差数(crossing number)と呼び cr(G)であらわすことにする．したがって，Gの交差数が0であることと，Gが平面的グラフであることとは同等である．交差数は完全グラフ K_n に対しては $n \leq 10$，完全2部グラフ $K_{m,n}$ に対しては $m \leq 6$ の場合が既に求められている．

単純グラフGが向きづけ可能な曲面に埋めこまれているとする．Gの頂点vに隣接している頂点を，曲面の向きにしたがって書きあげるとvに隣接する頂点の巡回置換ができる．Gの各頂点に対してこのような巡回置換を考えたとき，この巡回置換の組を rotation system(循環埋め込み図式)と呼ぶ．

この概念は，Dyck (1888)，Heffter (1890) により導入されてグラフの埋め込み問題に種々応用された．ここでは、この概念がグラフの交差数の問題に対しても有効であることを述べる．ただし，証明は概略のみである．

§1. Weighted Crossing Number Problem (重みつき交差数問題)

単純グラフ G のユークリッド平面 R^2 への，各頂点を異なった点へ写し，各辺を孤に写す写像が次の条件を満足するとき，G の<u>描画</u> (drawing) ということにする．

(i) 辺の像は頂点の像をふくまない．

(ii) 辺 uv (頂点 u と v を結ぶ辺) の像は，u と v の像を結ぶ孤である．

(iii) 3本の辺の像は共有点を持たない．

G の描画が <u>good</u> であるとは，次の条件を満足するときをいう．

(iv) 隣接する2本の辺の像は共有点を持たない．

(v) 2本の辺の像は高々1個の共有点しか持たない．

描画における2本の孤の交わりを<u>交差</u> (crossing) という．明らかに任意のグラフは good な描画を持つし，最小交差数の描画は good である．

w を G の辺集合 $E(G)$ から正の実数全体への写像とするとき，

Gを重みつきグラフ（weighted graph）という．またwを重み関数と呼ぶ．ϕをGの描画とする．辺aと辺bの，ϕによる交差pに対して，

$$w(p) = w(a) \cdot w(b)$$

と定義し，pの重みということにする．$E(G)$の部分集合A，Bに対して，$cr_\phi(A, B)$を，Aに属する辺とBに属する辺のϕによるすべての交差の重みの和とおく．ここでAとBは互いに素でなくてもよい．$cr_\phi(E(G), E(G))$をϕの交差数といい，$cr_\phi(G, w)$と書く．Gのすべての描画に対する交差数の最小値を$cr(G, w)$と書き(G, w)の交差数という．

重み関数が，各$e \in E(G)$に対して$w(e)=1$であるとき，それぞれ，単に$cr_\phi(G)$，$cr(G)$であらわす．

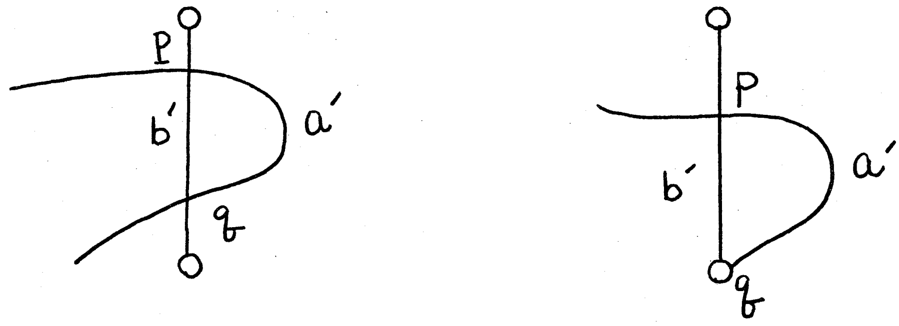
命題 1.1 ϕをGの good でない描画とする．このとき適当な描画ϕ'が存在して，$cr_{\phi'}(G, w) < cr_\phi(G, w)$．

証明の概略．ϕは good ではないから，隣接する2本の辺の像が共有点を持っているか，または適当な2本の辺の像が2個以上の共有点を持っている．このとき，次のような交差のうち少なくとも1方が存在することが示せる．

(i) 辺a，bの像の交差p，qに対して，aの像の上の

pからqまでの部分a'はbとはp, q以外で交わらず, bの像の上のpからqまでの部分b'はaとはp, q以外で交わらない.（図1(i)）.

(ii) 隣接する辺a, bの像の交差をpとし, a, bが接続している頂点の像をqとする. このとき, (i)と同様な部分弧a', b'が存在する.（図1(ii)）



(i)　　　(ii)

図 1

(i)の場合は次の図で示された2つの変形のうちどちらか適当な1方を行なった結果の描画をϕ'とすれば,

$$cr_{\phi'}(G, w) < cr_{\phi}(G, w)$$

であることが容易に証明できる.

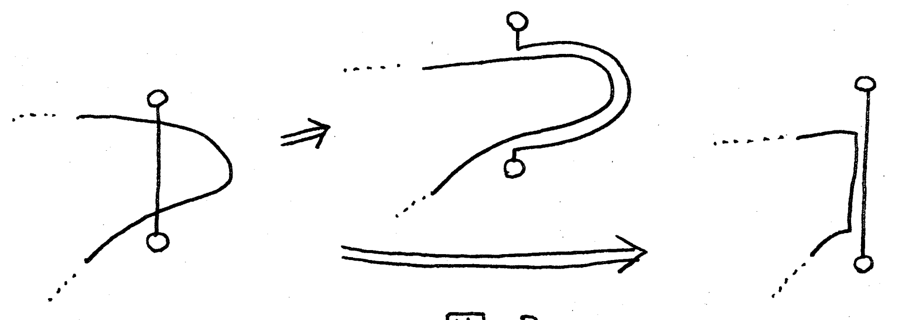


図 2

(ii)の場合についても同様である．　証明終．

この命題により次の定理が導びかれる．

> 定理 1.2　Gを単純グラフ，Kを，Gの隣接していない頂点の対を辺でむすぶことによって得られた完全グラフとする．このとき，Kのgoodな描画の適当なもの ϕ をとれば，
>
> $$cr_{\phi|G}(G) = cr(G)$$
>
> である．

証明の概略．Gの描画のうち適当なものをψとすれば，$cr_\psi(G) = cr(G)$ である．（必然的にψはgood．）このときψは K の描画 ψ' に拡張できる．

$cr_{\psi'}(K) = n$とおき，$1/n$より小さい実数 ε をとる．いま Kの重み関数 wを次のように定義する．

(i)　eが $E(G)$の元であるときは，$w(e) = 1$，

(ii)　eが $E(K) - E(G)$ の元であるときは，$w(e) = \varepsilon$．

このとき，明らかに

$$cr_\psi(G) \leq cr_{\psi'}(K, w) < cr_\psi(G) + 1$$

である．

ψ'が goodでないときだけを考えればよい．ψ'がgoodではないので，命題 1.1 より K の goodな描画ϕが存在して，

$$cr_\phi(K, w) < cr_\psi(K, w)$$

である．また $cr_\phi(K, w) \geq cr_{\phi|G}(G)$ なので，

$$cr_\psi(G) \leq cr_{\phi|G}(G) < cr_\psi(G) + 1$$

である．故に，

$$cr_{\phi|G}(G) = cr_\psi(G) = cr(G).$$ 証明終．

上の定理の意味を明らかにするために，次の描画を考える．これは，$K_{2,4}$ の描画で，good になるように x，y を結べない．

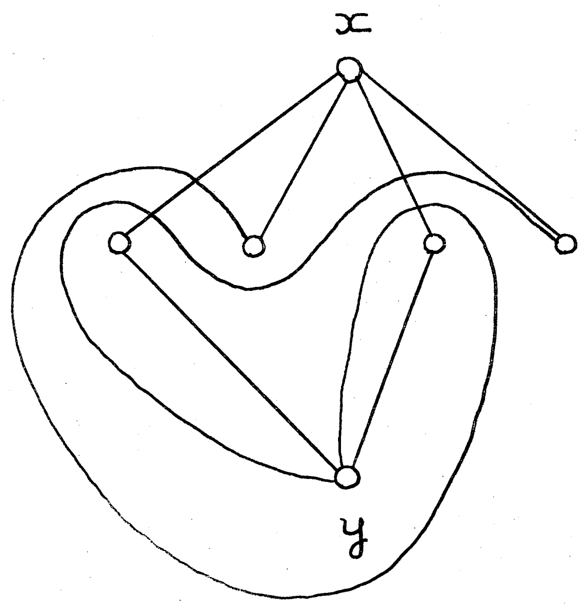


図 3.

§2. Rotation System.

§1の議論により，グラフの交差数を求めるためには，完全グラフの good な描画に拡張できる描画のみを調べればよいことがわかった．ここでは，グラフの good な描画に対する

rotation system を定義し，完全グラフに対しては描画の同値類がこの system により定まることを示す．

平面に対して方向を定めておく．ϕ を G の good な描画とし，$N(v)$ を G の頂点 v に隣接する頂点の集合とする．各 v に対して $N(v)$ の巡回置換 ρ_v を次のように定める．

(*) $u \in N(v)$ に対して，v と u をむすぶ辺の，正の方向の隣りの辺の u 以外の頂点を $\rho_v(u)$ と定義する．

例えば，下の図のような描画に対しては，

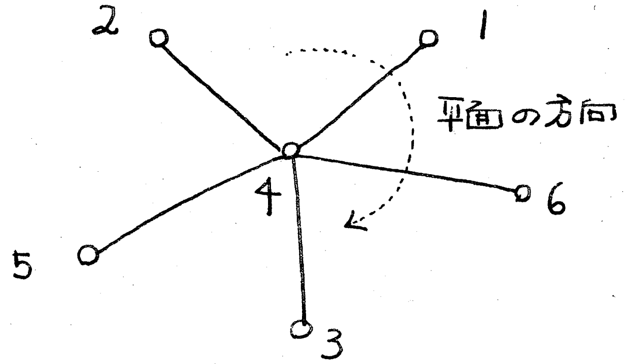


図4

$\rho_4 = (1,\ 6,\ 3,\ 5,\ 2)$ である．ここで ϕ は good であるので，頂点 v に接続する辺どおしは，像において v 以外では交わっていないことに注意してほしい．このようにしてつくった置換の列を ϕ の rotation system という．

> 定義　ϕ, ϕ' を単純グラフ G の good な描画とする．次の条件(**) を満足するとき，ϕ, ϕ' は同等であるという．
>
> (**)　ϕ において辺 uv と辺 $u'v'$ が交差を持つための必

要十分条件は，ϕ' において uv と $u'v'$ が交差を持つことである．

次の図は，同等な2つの描画である．

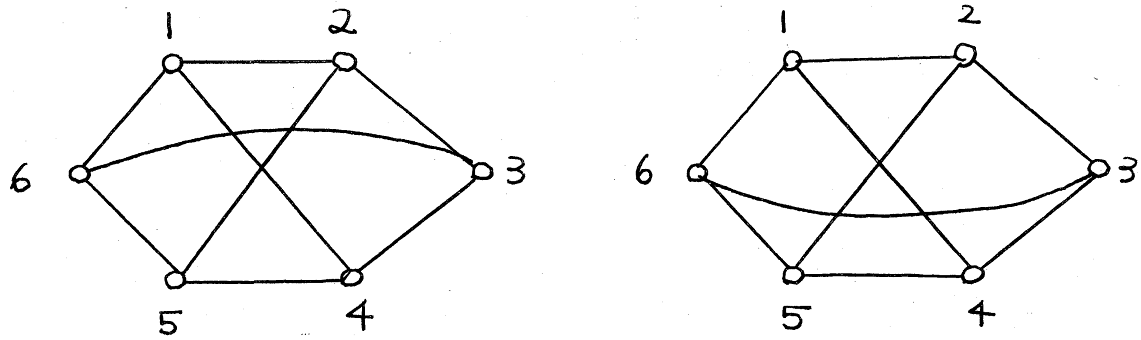
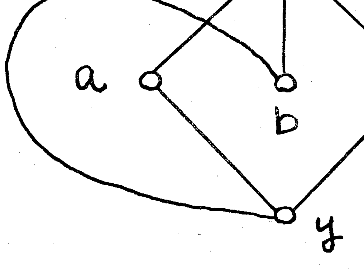


図5

定理2.1　完全グラフ K の good な描画 ϕ, ϕ' が同等であるための必要十分条件は，ϕ と ϕ' の rotation system が一致することである．

証明は略する．次の例は，完全グラフでないグラフに対しては，この定理に相当するものは成立しないことを示している．



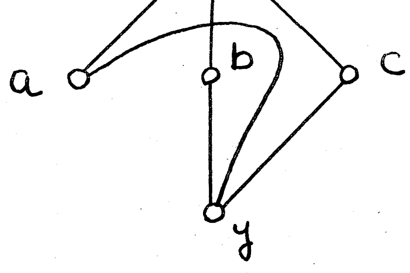


図6

共に rotation system は,

$x: cba,\quad y: bac,\quad a: xy,\ b: xy,$
$c: xy.$

注意1. 定理1.2より, 頂点数がn個のグラフの交差数を計算するためには, K_nのすべてのgoodな描画を考えればよい, またさらに, 定理2.1を用いると, その個数は. $\{(n-2)!\}^{n-1}$個以下である.

注意2. すべての巡回置換の組みあわせが, 完全グラフのgoodな描画のrotation systemになるわけではない. rotation systemになるための必要十分条件は容易に相像できるが, 筆者にはまだ整理できていない.

参考文献

[1]R. K. Guy, Crossing number of graphs, Recent Trends in Graph Theory, Lecture Notes in Math., 303(1972), 111 - 124.

[2]D. J. Kleitman, The crossing number of $K_{5,n}$, J.Combinatorial Theory 9(1970) 315 - 323.

[3]A. T. White and L. W. Beineke, Topological Graph Theory, Selected Topics in Graph Theory, Academic, London(1978) 15 - 49.