

## 3-Bridge Link Type の判定 (II)

東京工業大学 理学部 河野和義 ( Kazuyoshi Kohno )

ある2つの wave のない 3-bridge link projection (以下、単に projection と呼ぶ) として  $p(L)$ ,  $p(L')$  が与えられたとき、 $p(L')$  に有限回の right jump move または left jump move を施すことによって  $p(L')$  が  $p(L)$  に変換できるなら、 $L$  と  $L'$  とは同じ link type に属するということが結論できる。(議論の詳細は根上生也氏の 3-Bridge Link Type の判定 (I) を参照してください。) しかし、jump move の操作を繰り返し行なうのはかなり面倒な作業である。実際、1つの projection に対して6通りの jump move が可能であるから、jump move の回数は  $6^n$  の order で増加していくことになり、人間では手のつけられない計算量になってしまう。そこで、projection を parameter で表わし、その parameter を用いて jump move の操作をコンピュータを使って行なうことを考える。

任意の projection  $p(L)$  は一般に3つの円とそれらを結ぶ2本の平行な線分によって表わすことができる (図1)。おのおのの円は over bridge の近傍の様々な状況を表わし、2本の平行な線分は under bridge の束を表わしている。 $p(L)$  の parameter は次のようにして定める。 $p(L)$  は  $S^2(L)$  上にあるから、 $S^2(L)$  上の  $\infty$  の点から  $i$  番目

の over bridgeへ至る path が存在する。このとき、 $i$  番目の over bridgeと under bridge との交点で  $i$  番目の over bridgeとこの path との交点より右側の交点数を  $a_i$ 、左側の交点数を  $b_i$  とすることにより6つの0以上の整数

$$(a_i, b_i) (a_{i+1}, b_{i+1}) (a_{i-1}, b_{i-1})$$

を得る。これを  $p(L)$  の parameterと言う。まずこの parameterを用いて jump move を行なうために必要な projection の様々な情報を求めてみよう。

$i$  番目の over bridgeと under bridge との交点数を  $c_i$  とすると、

$$c_i = a_i + b_i (i = 0, 1, 2)$$

と表わせる。

また、 $(i+1)$ 番目の over bridgeと  $(i-1)$ 番目の over bridgeを結ぶ arcの本数を  $x_i$  とすると

$$x_{i+1} + x_{i-1} = 2(c_i + 1) (i = 0, 1, 2 \pmod{3})$$

であるからこれより

$$x_i = c_{i+1} + c_{i-1} - c_i + 1 (i = 0, 1, 2 \pmod{3})$$

が得られる。

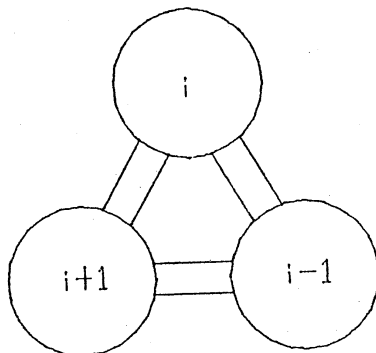


図1. projection の一般形

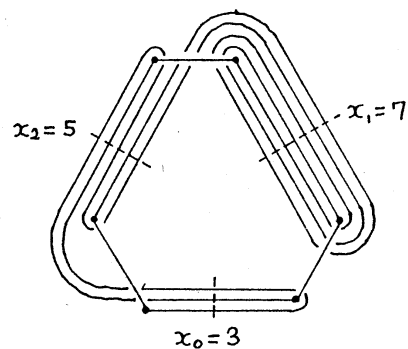


図2.  $x_i$

bridge typeは図4 に示す5通りである。この図をよく観察することによって i 番目の over bridgeの type は、

条件	type
$2a_i+1 = x_{i-1}$ のとき	10
$a_i < x_{i-1} < 2a_i+1$ のとき	1+
$b_i < x_{i+1} < 2b_i+1$ のとき	1-
$x_{i-1} \leq a_i$ のとき	11+
$x_{i+1} \leq b_i$ のとき	11-

表3. parameterによる bridge typeの判定

と parameterから求めることができる。

また、(i+1)番目の over bridgeの下を通り i番目の over bridgeを経て (i-1)番目の over bridgeへ至る arcの本数(図5 の  $\parallel$  の部分の arcの本数)を  $y_i$  とすると、

i番目の bridge	$y_i$
1+	$x_{i+1} - 2b_i - 1$
1-	$x_{i-1} - 2a_i - 1$
11+	$x_{i-1}$
11-	$x_{i+1}$

表4

となる。

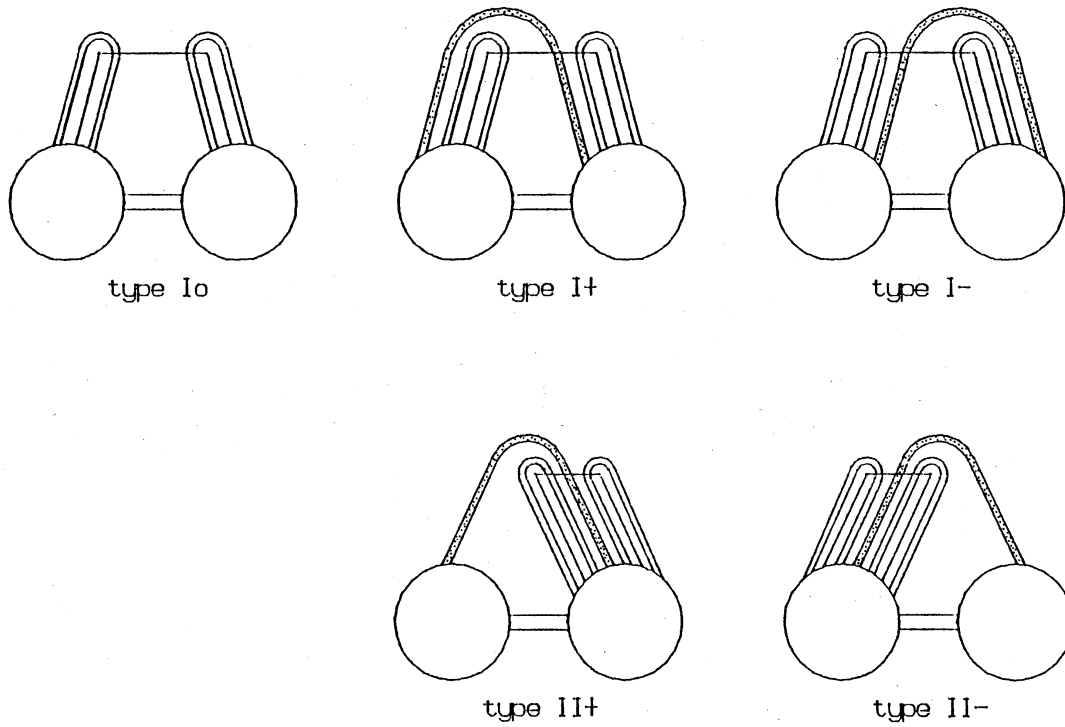


図5. bridge types

以上をもとにして、jump move を行なうことにより与えられた projection  $p(L)$  の parameter がどのように変化するかを考えてみよう。left jump move と right jump move とは鏡像の関係にあるから、ここでは right jump move についてのみ考えることにする。今、 $i$  番目の over bridge で jump するものとし、jump した後に得られる projection を  $p'(L)$  とし  $p'(L)$  の parameter を

$$(a'_i, b'_i) (a'_{i+1}, b'_{i+1}) (a'_{i-1}, b'_{i-1})$$

とする。また over bridge の番号は

$$i \rightarrow i-1$$

$$i+1 \rightarrow i+1$$

$$i-1 \rightarrow i$$

と変化することにする。さらに、 $p(L)$  の  $i$  番目の over bridgeを  $\alpha$ 、 $(i+1)$  番目の over bridgeを  $\beta$ 、 $(i-1)$  番目の over bridgeを  $\gamma$  とする。

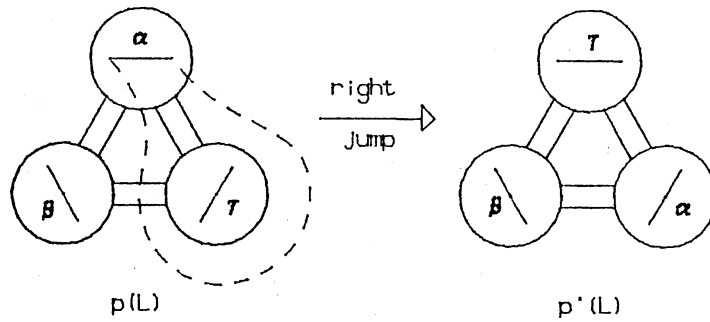


図 6. bridge の名前と番号の変化

まず jump moveによって  $\alpha$  の近傍がどう変化するかを考えてみよう。今考えているのは right jump moveであるから、 $\alpha$  の type は  $1+$  または  $11+$  である。 $\alpha$  と under bridge との交点で  $S^2(L)$  の  $\infty$  の点から  $\alpha$  へ至る path と  $\alpha$  との交点より右側の交点数が  $a'_{i-1}$ 、左側の交点数が  $b'_{i-1}$  であるから  $\alpha$  の type が  $1+$  のときは、図 7より

$$a'_{i-1} = b_i, \quad b'_{i-1} = a_i + x_i - y_i$$

となる。

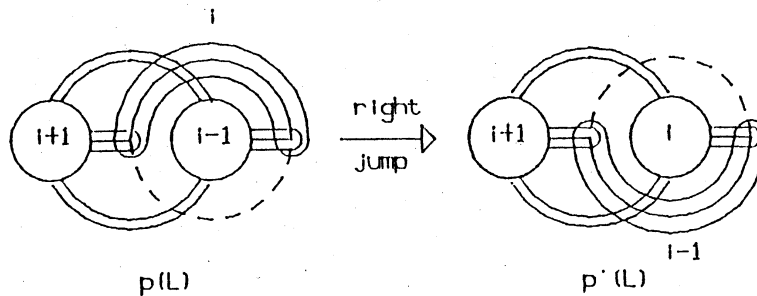


図 7. type  $1+$  の right jump

$\alpha$  の type が  $11+$  のときも、図 8より

$$a'_{i-1} = b_i, \quad b'_{i-1} = a_i + x_i - y_i$$

となる。

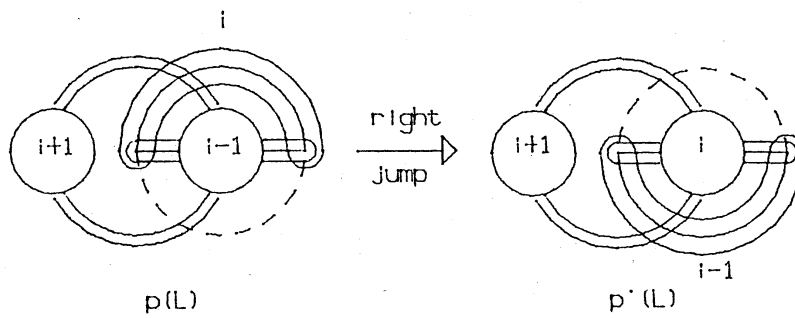


図8. type II+ の right jump

$\beta$  は right jump moveの影響を受けないから、

$$a'_{i+1} = a_{i+1}, \quad b'_{i+1} = b_{i+1}$$

である。

最後に  $\gamma$  の近傍がどうなるかを考えてみよう。説明のため  $\gamma$  の端点に名前をつけて

おく (図9)。

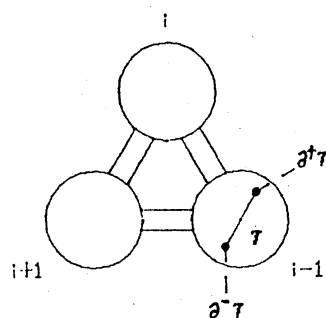


図9.  $\gamma$  の端点の名前

$\gamma$  の type が  $1_0$ ,  $1_+$  または  $1_-$  のとき、 $S^2(L)$  上の  $\infty$  の点から  $\gamma$  へ至る path

には次の2通りの場合が考えられる。

Case 1. path が  $\theta^+\gamma$  の近くを通り、その path と  $\gamma$  との交点より右側に  $\theta^+\gamma$  がある場合 (図10)

これを parameter を用いて表わすと

$$2b_i < a_{i-1} \quad (2b_i + 1 \leq a_{i-1})$$

であり、このとき

$$a'_i = -2b_i + a_{i-1} - 1$$

となる。

Case 2. path と  $\gamma$  との交点より左側に  $\theta^+\gamma$  がある場合 (図11)

これを parameter を用いて表わすと

$$2b_i \geq a_{i-1}$$

であり、このとき

$$a'_i = -2b_i + 2a_{i-1} + b_{i-1}$$

となる。

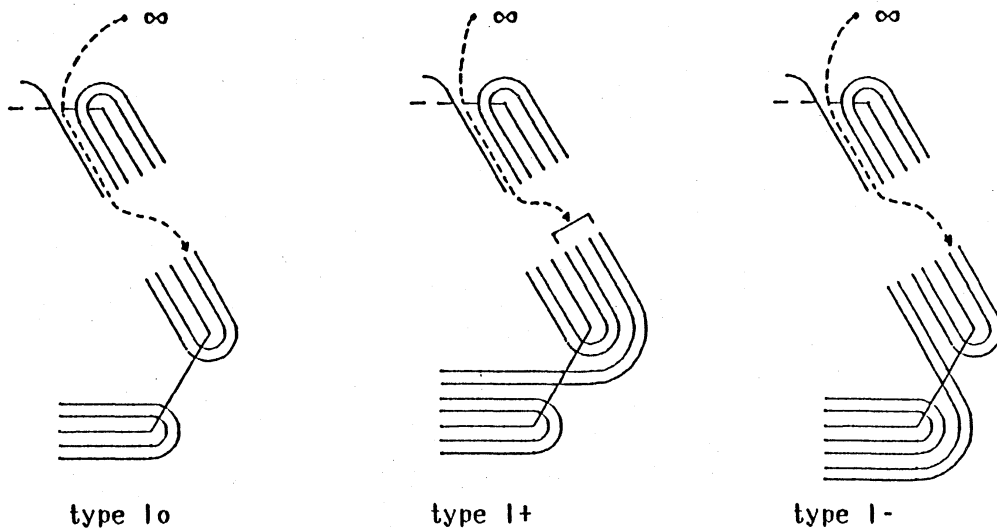


図10. Case 1

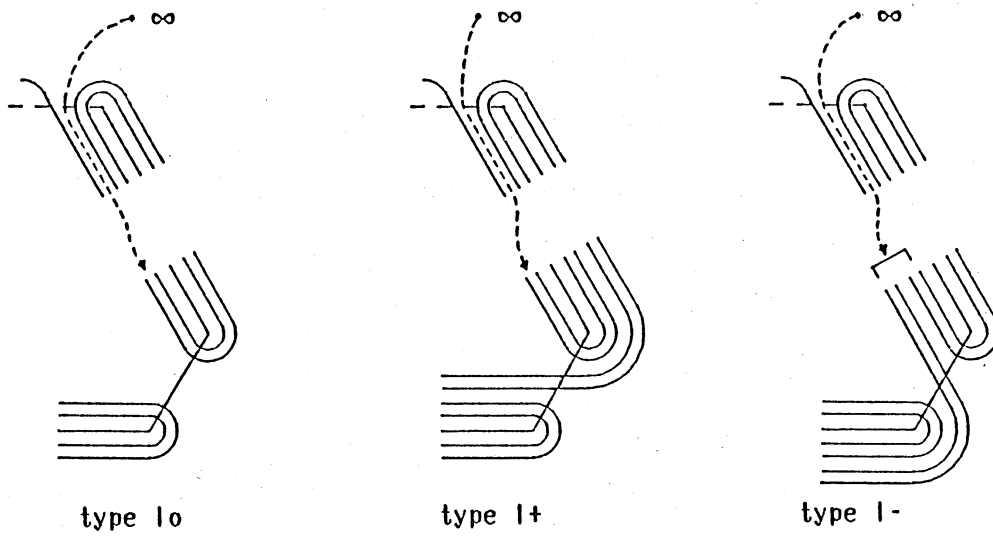


図11. Case 2

$\gamma$  の type が  $11+$  のときは、次の 1 通りのみの場合がある。

Case 3. path が  $\partial^+ \gamma$  の近くを通り、その path と  $\gamma$  との交点より右側に  $\partial^+ \gamma$  がある場合 (図12)

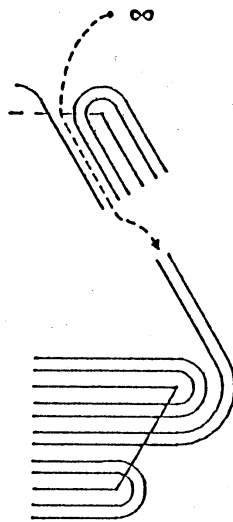


図12. Case 3

このとき

$$a'_i = -2b_i + a_{i-1} - 1$$



となる。

$\gamma$  の type が II-のときは、次の3通りの場合が考えられる。

Case4. path が  $\partial^+\gamma$  の近くを通り、その path と  $\gamma$  との交点より右側に  $\partial^+\gamma$  がある場合 (図13)

これを parameter を用いて表わすと

$$2b_i < a_{i-1}$$

であり、このとき

$$a'_i = -2b_i + a_{i-1} - 1$$

となる。

Case 5. path と  $\gamma$  との交点より左側に  $\partial^+\gamma$  がある場合 (図14)

これを parameter を用いて表わすと

$$a_{i-1} \leq 2b_i < b_{i-1} + 2a_{i-1} + 1$$

であり、このとき

$$a'_i = -2b_i + 2a_{i-1} + b_i$$

となる。

Case 6. path が  $\partial^-\gamma$  の近くを通り、その path と  $\gamma$  との交点より右側に  $\partial^+\gamma$  がある場合 (図15)

これを parameter を用いて表わすと

$$2b_i \geq b_{i-1} + 2a_{i-1} + 1$$

であり、このとき

$$a'_i = -2b_i + 3a_{i-1} + 2b_{i-1} + 1$$

となる。

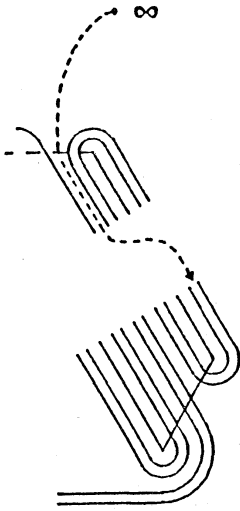


図13. Case 4

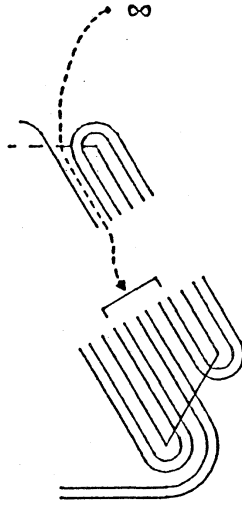


図14. Case 5

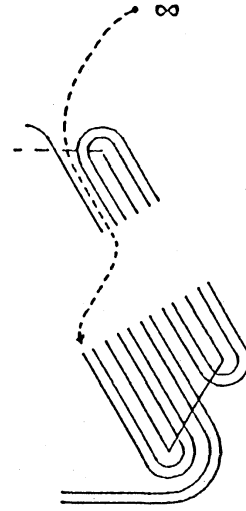


図15. Case 6

$\gamma$  と under bridge との交点数は right jump moveを行なっても変化しないから

$$b'_i = c_{i-1} - a'_i$$

である。

以上のことにより  $i$  番目の bridge における jump moveによる paramaterの変化は次の表のようになる。( left jump move による paramaterは、 right jump moveの paramater の変化の表において

- $a \rightarrow b$
- $i \rightarrow i$
- $i+1 \rightarrow i-1$
- $i-1 \rightarrow i+1$

とすればよい。)

(i-1)番目の bridge	条件	$a'_i$
lo, l+ or l-	$2b_i < a_{i-1}$ のとき $2b_i \geq a_{i-1}$ のとき	$-2b_i + a_{i-1} - 1$ $-2b_i + 2a_{i-1} + b_{i-1}$
ll+		$-2b_i + a_{i-1} - 1$
ll-	$2b_i < a_{i-1}$ のとき $a_{i-1} \leq 2b_i < 2a_{i-1} + b_{i-1} + 1$ のとき $2b_i \geq 2a_{i-1} + b_{i-1} + 1$ のとき	$-2b_i + a_{i-1} - 1$ $-2b_i + 2a_{i-1} + b_{i-1}$ $-2b_i + 3a_{i-1} + 2b_{i-1} + 1$

表16. i番目の over bridgeにおける right jump move

(i-1)番目の bridge	条件	$b'_i$
lo, l+ or l-	$2a_i < b_{i+1}$ のとき $2a_i \geq b_{i+1}$ のとき	$-2a_i + b_{i+1} - 1$ $-2a_i + 2b_{i+1} + a_{i+1}$
ll+	$2a_i < b_{i+1}$ のとき $b_{i+1} \leq 2a_i < 2b_{i+1} + a_{i+1} + 1$ のとき $2a_i \geq 2b_{i+1} + a_{i+1} + 1$ のとき	$-2a_i + b_{i+1} - 1$ $-2a_i + 2b_{i+1} + a_{i+1}$ $-2a_i + 3b_{i+1} + 2a_{i+1} + 1$
ll-		$-2a_i + b_{i+1} - 1$

表17. i番目の over bridgeにおける left jump move

今までは over bridgeに関する jump moveについて考えてきたが、それだけでは片手落ちであり、under bridge に関しても同様な jump moveを行わなければならない。そのために projection に対して reverseと呼ばれる操作を施す。この操作は、まず  $S^2(L)$ を裏返すことによって、与えられた projection  $p(L)$ の上交差点と下交差点が逆になった projection を作り、これを図1の形をした projection  $p^*(L)$ に変形する操作である。あとは over bridgeの jump moveと同様に jump moveを行えばよい。

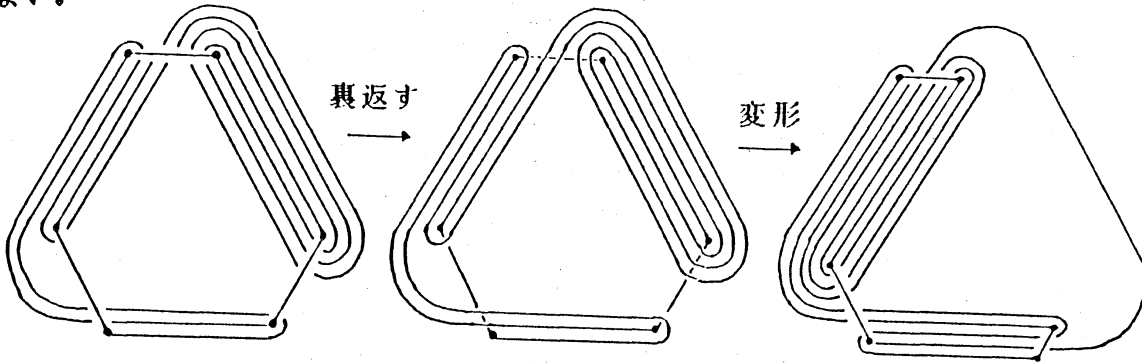


図18. reverse

reverse の操作を数式で表わすことは今のところできていない。従って、reverse の projection は、実際に projection の絵を画いてそれをもとに arcをたどることによって求めるしかない。しかし操作自体はごく簡単であるから、これもコンピュータを用いて求めることを考える。

もとの projection を  $p(L)$  とし  $p(L)$  の paramaterを

$$(a_i, b_i) (a_{i+1}, b_{i+1}) (a_{i-1}, b_{i-1})$$

reverse した後の projection を  $p^*(L)$ とし  $p^*(L)$ の paramaterを

$$(a_i^*, b_i^*) (a_{i+1}^*, b_{i+1}^*) (a_{i-1}^*, b_{i-1}^*)$$

とする。また reverseによって、bridge の番号は図19のようになるものとする。

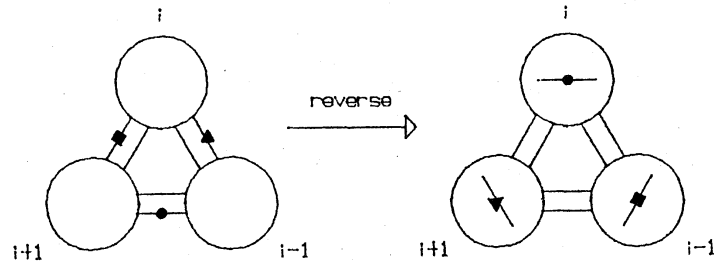


図19. reverse の projection の bridge の番号

まず  $p(L)$  の構造をコンピュータ上に表現するために、 $s[3][length]$  という配列を用意する。 $p(L)$  の  $i$  番目の over bridgeのちょっと下をその bridge と平行に切ると  $2(a_i+b_i+1)$  個の arcの切り口が現われる。この切り口の左から順番に  $s[i][0], s[i][1], \dots, s[i][2(a+b)+1]$  が対応しているものとする。ここで、左から数えて  $j$  番目の arcが  $i$  番目の over bridgeに接続している場合には  $s[i][j-1]$  に 0、 $i$  番目の bridge に接続しておらず、 $(i+1)$  番目の over bridgeへ向かっている場合には  $s[i][j-1]$  に -1、 $(i-1)$  番目の over bridgeに向かっている場合には  $s[i][j-1]$  に 1 をそれぞれ代入する。これで  $p(L)$  の構造が  $s[3][length]$  という配列で表わされたことになる。

$p^*(L)$  の parameterを求めるには、まず  $p(L)$  において  $S^2(L)$  の  $\infty$  の点から  $i$  番目の under bridge ( $i = 0, 1, 2$ ) に至る path を考え、その path と under bridge の交点を始点としてある over bridgeの端点にたどりつくまで arcをたどって行ったときの over bridgeとの交点数を求めればよい。このとき右方向にたどったときの交点数が  $a_i^*$  であり、左方向にたどったときの交点数が  $b_i^*$  である。arc をたどるといふことは

操作 1. over bridge の端点を中心に  $180^\circ$  回転

操作 2. ある over bridgeの下から他の over bridgeの下への移動

の繰り返しである。

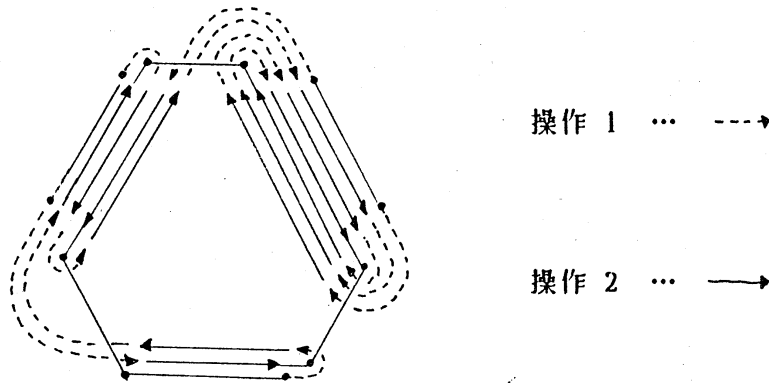


図20. 操作 1 と操作 2

これらの操作をコンピュータ上で実現するには次のようにすればよい。今、注目している arc の位置が  $s[i][j]$  に対応しているとしよう。まず操作 1 には次の 2 通りの場合がある。

Case 1. arc が  $\infty$  の点から over bridge へ至る path と over bridge との交点より右側にある場合

over bridge の左側の端点を中心に  $180^\circ$  回転するから、回転した後 arc の位置は  $s[i][2a_i - j]$  になる。従って、

$$j := 2a_i - j$$

を実行すればよい。

Case 2. arc が  $\infty$  の点から over bridge へ至る path と over bridge との交点より右側にある場合

over bridge の右側の端点を中心に  $180^\circ$  回転するから、回転した後 arc の

$$j := 2(2a_i + b_i + 1) - j$$

を実行すればよい。

また操作 2 は、次の 2 通りの場合がある。

Case 1.  $s[i][j] = -1$  の場合

この場合、arc は (i+1) 番目の over bridge へ向かっているので、arc の位置は

$$s[i+1][2(a_{i+1} + b_{i+1}) + 1 - j]$$

となる。従って、

$$i := i + 1, j := 2(a_i + b_i) + 1 - j$$

を実行すればよい。

Case 2.  $s[i][j] = 1$  の場合

この場合、arc は (i+1) 番目の over bridge へ向かっているので、arc の位置は

$$s[i-1][2(a_i + b_i) + 1 - j]$$

となる。従って、

$$j := 2(a_i + b_i) + 1 - j, i := i + 1$$

を実行すればよい。

以上により、 $a_i^*$  を求めるには以下のような手順を踏めばよいことがわかる。

Step 0  $a_i^* := 0, k := i - 1, j := 2a_i + b_i + 1$

Step 1  $s[k][j] = 0$  であるなら Stop。

$s[k][j] = 0$  でないなら、 $a_i^* := a_i^* + 1$  を実行し Step 2 へ行く。

Step 2  $j \leq 2a_i$  であるなら  $j := 2a_i - j$

$j > 2a_i$  であるなら  $j := 2(2a_i + b_i + 1) - j$

を実行し Step 3 へ行く。

Step 3  $s[k][j] = -1$  であるなら  $k := k + 1$ ,  $j := 2(a_i + b_i) + 1 - j$

$s[k][j] = 1$  であるなら  $j := 2(a_i + b_i) + 1 - j$ ,  $k := k - 1$

を実行し Step 1 へ戻る。

また  $b$  を求めるには、上のアルゴリズムで Step 0 を

Step 0  $b_i^* := 0$ ,  $k := i + 1$ ,  $j := 0$

とすればよい。

以上により over bridge の jump move および under bridge の jump move がコンピュータを用いて計算可能になった。従って、2つの projection  $p(L)$ ,  $p(L')$  が同じ 3-bridge link から得られる projection であるか否かを判定するには、次のようにすればよい。

Step 0  $Q_\omega(L) = \{p(L)\}$

Step 1 もし  $p(L') \in Q_\omega(L)$  であるなら 2つの projection  $p(L)$  と  $p(L')$  が同じ 3-bridge link から得られる projection である。

もし  $p(L') \in Q_\omega(L)$  でないなら Step 2 へ行く。

Step 2  $Q_\omega(L)$  の各要素に対して高々 6 通りの jump move を行ない、それによっ



て得られる projection を  $Q_w(L)$  の要素に加え Step 1 へ戻る。

しかし、特定の 3-bridge link ( trivial knot, splittable link, Hopf link, trefoil knot, figure-eight knot ) を除いて  $Q_w(L)$  は無限集合となってしまうので、上のアルゴリズムは有限終了しない。そこで jump move にある方向性を与えることを考える。上に挙げた方法では、ただやみくもに可能な jump move をすべて行うことによって  $Q_w(L)$  を求めようとしていたわけであるが、こんどは交点数の減少する jump move のみに注目して、交点数が極小な projection を求めようという考えである。

そこで、まず jump move によって交点数がどのように変化するかを調べてみよう。

$i$  番目の over bridge における jump move によって  $p(L)$  が  $p'(L)$  に変換された時の交点数の変化を考えてみる。先程と同じように  $p(L)$  の  $i$  番目の over bridge を  $\alpha$ 、 $(i+1)$  番目の over bridge を  $\beta$ 、 $(i-1)$  番目の over bridge を  $\gamma$ 、parameter を

$$(a_i, b_i) (a_{i+1}, b_{i+1}) (a_{i-1}, b_{i-1})$$

とし、 $p'(L)$  の parameter を

$$(a'_i, b'_i) (a'_{i+1}, b'_{i+1}) (a'_{i-1}, b'_{i-1})$$

とする。また  $|p(L)|$  は  $p(L)$  の交点数を表わすものとする。right jump move の場合 bridge  $\beta$ 、bridge  $\gamma$  は動かないから、各々の over bridge と under bridge との交点数は変化しない。表16より jump した後の bridge  $\alpha$  近傍の parameter は

$$a'_{i-1} = b_i, \quad b'_{i-1} = a_i + x_i - y_i$$

であるから、

$$|p(L)| - |p'(L)| = x_i - y_i$$

となる。left jump moveと right jump moveとは鏡像の関係にあったからやはり、

$$|p(L)l - lp'(L)l = x_i - y_i$$

となる。従って、以上のことと表4により表20を得る。

i番目の bridge	$ p'(L)l - lp(L)l$
I+	$2(c_{i+1} - a_i) + 1$
I-	$2(c_{i-1} - b_i) + 1$
II+	$2(c_{i-1} - c_i)$
II-	$2(c_{i+1} - c_i)$

表21. 交点数の差

これを用いることにより次のことがわかる。

『 projection の paramaterを

$$(a_i, b_i) (a_{i+1}, b_{i+1}) (a_{i-1}, b_{i-1})$$

とし、i番目の over bridgeの type を I+、(i+1)番目の over bridgeの type を

I+ とする。このとき、i番目の over bridgeにおける jump moveで交点数が減少し、かつ (i+1)番目の over bridgeにおける jump moveで交点数が減少することはない。』

(証明) i番目の over bridgeの type が I+、(i+1)番目の over bridgeの type が I+ であるから表3 より、

$$a_i < c_i + c_{i+1} - c_{i-1} + 1 < 2a_i + 1 \cdots \cdots (1)$$

$$a_{i+1} < c_{i+1} + c_{i-1} - c_i + 1 < 2a_{i+1} + 1 \cdots (2)$$

がなりたつ。今、両方の jump move で交点数が減少すると仮定すると表21より以下の不等式が成り立たなければいけない。

$$2(c_{i+1} - a_i) + 1 < 0$$

$$2(c_{i-1} - a_{i+1}) + 1 < 0$$

$a, c$  は整数であるから、

$$c_{i+1} - a_i \leq -1$$

従って

$$c_{i+1} - c_i = c_{i+1} - (a_i + b_i) \leq c_{i+1} - a_i \leq -1$$

また

$$c_{i-1} - a_{i+1} \leq -1$$

ゆえに

$$\begin{aligned} c_{i+1} + c_{i-1} - c_i + 1 - a_{i+1} \\ = (c_{i+1} - c_i) + (c_{i-1} - a_{i+1}) + 1 < 0 \end{aligned}$$

となりこれは (2) に矛盾する。□

同様の議論を行なうことにより表22を得る。

1±	増加	増加	減少
1±	増加	減少	増加

11+	減少
11+	増加

11-	増加
11-	減少

11+	増加	減少	不変
11-	減少	増加	不変

11-	増加
11+	増加

1±	増加	増加	増加	減少
11+	増加	減少	不変	増加

11-	増加	増加	減少	不変
1±	増加	減少	増加	増加

1±	増加	増加	増加
11-	増加	減少	不変

11+	増加	減少	不変
1±	増加	増加	増加

表22.  $i, (i+1)$ 番目の bridge の type による交点数の増減

与えられた projection に関して over bridge または under bridge のみの jump move を考えた場合 3通りが可能であるが、上の結果より交点数の減少する jump move は高々 1通りであることがわかる。よって、ある projection が与えられたときまず交点数が減少しなくなるまで over bridge のみの jump move を行ない、次に交点数が減少しなくなるまで under bridge のみの jump move を行なう、という操作を繰り返すことにより同じ 3-bridge link の projection で極小の交点数を持つものが得られる。もし任意の projection に関して極小な交点数を持つ projection が有限個であり、それを求めることができるなら、3-bridge link type の判定ができることになる。しかし今の段階では、ある projection に対して極小な交点数を持つ projection をすべて求めるアルゴリズムはわかっていない。