数理解析研究所講究録
562巻 1985年 132-166

Some Identification Problem of Vibrating Systems

東大・理　山本昌宏 (Masahiro YAMAMOTO)

§1. Introduction.　発展系に対する同定化問題は、工学上の必要に応じて、さまざまに研究されてきた。また、一方では、数学的な立場からも多様な結果が得られている。(Kitamura [2], Kitamura-Nakagiri [3], Murayama [6], Nakagiri [7], Nakagiri-Kitamura-Murakami [8], Pierce [9], Suzuki-Murayama [13], Suzuki [11], [12] 等)

ここでは、以下に述べるような連立の一階双曲型方程式に関する同定化問題に対して、T. Suzuki [11], [12] などで開発された手法を応用しつつ考察を加える。

考える双曲系の例として、非一様な分布RLCG回路をとりあげる。すなわち、x軸上の区間$[0, 1]$におかれた導線を考え、時刻tにおける点xでの電流を$i(t, x)$、電圧を$v(t, x)$であらわす。このときiとvの初期時刻$t=0$に

おける状態を指定し、たとえば、$x=0$ では導線が開いており、$x=1$ ではアースされているものとすると、i と v は次の方程式を満たす。

(1); $E\langle R, L, C, G; a_0, a_1\rangle$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} + L(x)\dfrac{\partial i}{\partial t} + R(x)\, i = 0 \\ \dfrac{\partial i}{\partial x} + C(x)\dfrac{\partial v}{\partial t} + G(x)\, v = 0 \\ v(0,x) = a_0(x) \quad i(0,x) = a_1(x) \\ i(t,0) = 0 \quad v(t,1) = 0 \end{cases}$$

$$-T \leqq t \leqq T, \quad 0 \leqq x \leqq 1$$

ここで、$R(x)$, $L(x)$, $C(x)$, $G(x)$, はそれぞれ導線の x における単位長さあたりの抵抗, インダクタンス, 容量, (もれ)コンダクタンスとする。我々は、次のような問題から出発することにする。

<u>問題</u>　端末の電流および電圧を測定することによって、導線の一次定数(すなわち、$R(x)$, $L(x)$, $C(x)$, $G(x)$)が定まるか?

ここでは、この問題を同定化問題として以下のように定式化する。但し、$E\langle R_0, L_0, C_0, G_0; a_0, a_1\rangle$ や $E\langle R, L, C, G; e_0, e_1\rangle$ は(1)と同様に定義しておく。

<u>*Definition 1'*</u>

(2); $M_T\langle R_0, L_0, C_0, G_0; a_0, a_1\rangle \overset{def}{\equiv}$

$\{(R, L, C, G;\ t_0, t_1) \in C^1[0,1]^6;$

$i(t,1) = i_0(t,1)$ かつ $v(t,0) = v_0(t,0)$

$(-T \leqq t \leqq T)\}$

但し，(i_0, v_0)，(i, v) はそれぞれ，$E(R_0, L_0, C_0, G_0;\ a_0, a_1)$，$E(R, L, C, G;\ t_0, t_1)$ に対する解であるとする。 //

(注意1) $E(R_0, L_0, C_0, G_0;\ a_0, a_1)$ が、適当な関数のクラスで一意的な解をもつためには、$R_0, L_0, C_0, G_0 \in C^1[0,1]$，$a_0, a_1 \in C^1[0,1]$ の下で、両立条件 $a_0(1)=0$，$a_1(0)=0$ を仮定しておけば十分である。以下、初期値に対して常に、この種の両立条件は仮定しておく。

我々の問題は、このとき

$$\boxed{M_T(R_0, L_0, C_0, G_0;\ a_0, a_1)\ \text{の 決定}}$$

ということになる。ここで、$E(R_0, L_0, C_0, G_0;\ a_0, a_1)$ は、モデルとして完全にわかっているシステムであり、未知のシステム $E(R, L, C, G;\ t_0, t_1)$ がモデルとしての $E(R_0, L_0, C_0, G_0;\ a_0, a_1)$ と端点で電流と電圧に関して一致しているときに、R，L，C，G，t_0，t_1 について何らかの情報を得ようという問題を考えることになる。従って、特に

$M_T(R_0, L_0, C_0, G_0;\ a_0, a_1) = \{(R_0, L_0, C_0, G_0;\ a_0, a_1)\}$

ということは、端点の電流と電圧によって方程式と初期値が

一意に定まる（可同定である）ことを意味している。

ところで、システム$E(R_0, L_0, C_0, G_0; a_0, a_1)$は、以下の方法でかきかえることができる。

1°）　独立変数の変換

(3)；　　$x \longrightarrow z$　　$z \overset{\mathrm{df}}{\equiv} \int_0^x \sqrt{L_0(y)C_0(y)}\,dy$

で定義する。（$L_0(y)C_0(y) > 0$ に注意）　$l \equiv \int_0^1 \sqrt{L_0(y)C_0(y)}\,dy$

とおく。

2°）(4)；$u_1(t, z) \equiv \dfrac{v_0(t, x)}{2\sqrt{\tilde{L}_0(z)}}$，　$u_2(t, z) \equiv \dfrac{i_0(t, x)}{-2\sqrt{\tilde{C}_0(z)}}$

$$u \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

とおく。但し　$\tilde{L}_0(z) \equiv L_0(x)$ 等とする。以下、簡単化のため$\tilde{L}_0(z)$をあらためて$L_0(z)$とかく。$\tilde{C}_0, \tilde{R}_0, \tilde{G}_0, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1$についても同様。

1°), 2°）によって、$E(R_0, L_0, C_0, G_0; a_0, a_1)$は次のシステムと同値になる。

$$(5)\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,z)}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dfrac{\partial u(t,z)}{\partial z} \\ \qquad + \begin{pmatrix} -\dfrac{G_0(z)}{C_0(z)} & \dfrac{C_0'(z)}{2C_0(z)} \\ \dfrac{L_0'(z)}{2L_0(z)} & -\dfrac{R_0(z)}{L_0(z)} \end{pmatrix} u(t,z) \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq z \leqq l \\ -T \leqq t \leqq T \end{pmatrix} \\ u_1(0, z) = \dfrac{a_0(z)}{2\sqrt{L_0(z)}}, \quad u_2(0, z) = \dfrac{-a_1(z)}{2\sqrt{C_0(z)}}, \qquad \begin{matrix} u_1(t, l) = 0 \\ u_2(t, 0) = 0 \end{matrix} \end{cases}$$

そこで、これからしばらくの間、(5)のようなシステムについて考えていくことにする。

(注意2) (5)のようなシステムは、弦の微小振動を記述する方程式も含む；

$$
(6)\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - p_1(x)\dfrac{\partial w}{\partial t} - p_2(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 & 0 \leqq x \leqq 1 \\
\dfrac{\partial w}{\partial x}(t,0) = 0 & \\
\dfrac{\partial w}{\partial x}(t,1) = 0 & \text{(自由端振動に対応する境界条件)} \\
w(0,x) = a_1(x), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t}(0,x) = a_2(x) &
\end{cases}
$$

(6)に対して $u \equiv \begin{pmatrix} w_t \\ w_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$
(7)\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u \\
u_2(t,0) = 0 \quad u_2(t,1) = 0 \qquad u(0,x) = \begin{pmatrix} a_2(x) \\ a_1'(x) \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

これは(5)の特別な場合である。

§2. 問題の定式化。 以下、次の記法を用いる。

$$
B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix} \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{pmatrix}
$$

($p_{ij}, q_{ij} \in C^1[0,1]$ で実数値), $h, H \in \mathbb{R}$,

$$
E(P,a)\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = B\dfrac{\partial u}{\partial x} + P(x)u & -T \leqq t \leqq T \\
u_2(t,0) + h\,u_1(t,0) = 0 & 0 \leqq x \leqq 1 \\
u_2(t,1) + H\,u_1(t,1) = 0 & \\
u(0,x) = a(x) \equiv \begin{pmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \end{pmatrix} & \left(但し\ u \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right)
\end{cases}
$$

$E(Q, \ell)$も同様に定義しておく。さて問題の定式化のため、

Definition 1.

$M_T(P, a) \equiv \{(Q, \ell) \in C^1[0,1]^6 ;$

$v(0, t) = u(0, t), \quad v(1, t) = u(1, t) \quad -T \leqq t \leqq T\}$

但し、v, uはそれぞれ、$E(Q, \ell)$, $E(P, a)$の解とする。//

(注意1) $E(P, a)$などの初期値に対しては§1の(注意1)と同様に両立条件 $a_2(0) + h a_1(0) = 0$, $a_2(1) + H a_1(1) = 0$ を仮定しておく。 //

この時、我々の問題は

$$\boxed{M_T(P, a)\text{の決定}}$$

になる．$M_T(P, a)$を特徴付けるための準備として若干の概念を導入する。以下、境界条件にあらわれる定数h, Hに対して、

(1); $|h|, |H| \neq 1$

を仮定しておく。仮定(1)の下に

(2); $-B\dfrac{d\cdot}{dx} + {}^tP(x)\cdot$ （${}^tP$は行列Pの転置をあらわす）

に境界条件

(3); $v_2(0) - h v_1(0) = 0 \quad v_2(1) - H v_1(1) = 0$

を$L^2(0,1)^2$においてつけて考えた作用素$A^*_{P,h,H}$はそのスペクトルが全て~~離散~~固有値からなり、それらの重複度は全て1であることを示すことができる。(Appendix I も参照。)

(2)に(3)をつけて考えた作用素は E(P.a)の方程式の右辺の作用素にE(P.a)で与えられた境界条件をつけた作用素の$L^2(0.1)^2$ における共役作用素にあたることに注意する。以上のことから、

(4); $\{\overline{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{Z}} = \sigma(A_{P.h.H}^{*})$ ($\bar{\ }$ は複素共役を、$\sigma(\cdot)$ はスペクトルをあらわす。)とおける。φ_n^* をλ_nに対応する$A_{P.h.H}^{*}$の固有関数とする。このとき

Definition 2.

$a \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in L^2(0.1)^2$ が ($A_{P.h.H}^{*}$に関して) "$*$-generating" であるとは $(a, \varphi_n^*)_{L^2(0.1)^2} \neq 0$ ($^\forall n \in \mathbb{Z}$) であることと定義する。(但し $(\cdot,\cdot)_{L^2(0.1)^2}$ は$L^2(0.1)$の直積空間$L^2(0.1)^2$での内積をあらわす。) //

(注意2) "generating性"は熱方程式の同定化問題に関連して[13]等で導入された。但し[13]では $A_{P.h.H}^{*}$に相当する作用素は自己共役なので共役を考える必要はない。 //

以上の準備の下で $M_T(P.a)$を特徴付ける次の定理が得られる。

Theorem.

aを $*$-generating であるとし, $T \geq \tau$であるとする。その時、$(Q, b) \in M_T(P.a)$ であることと次の(i)~(iv)が、成立することは同値である。

(i) $(q_{11}(x)+q_{12}(x)-q_{21}(x)-q_{22}(x)-p_{11}(x)-p_{21}(x)+p_{12}(x)+p_{22}(x))$

$+(q_{11}(x)+q_{21}(x)-q_{12}(x)-q_{22}(x)-p_{11}(x)-p_{12}(x)+p_{21}(x)+p_{22}(x))$

$\times\ \exp(2\theta_2(x))=0 \qquad 0\leqq x\leqq 1$

(ii) $(q_{11}(x)+q_{12}(x)-q_{21}(x)-q_{22}(x)-p_{12}(x)-p_{22}(x)+p_{11}(x)+p_{21}(x))$

$+(q_{12}(x)+q_{22}(x)-q_{11}(x)-q_{21}(x)-p_{11}(x)-p_{12}(x)+p_{21}(x)+p_{22}(x))$

$\times\ \exp(2\theta_2(x))=0 \qquad 0\leqq x\leqq 1$

(iii) $b(x)=R(x)\,a(x)$

(iv) $\theta_1(1)=0 \quad \theta_2(1)=0$

但し

$$\left.\begin{aligned}
\theta_1(x) &\equiv \frac{1}{2}\int_0^x (q_{12}(s)+q_{21}(s)-p_{12}(s)-p_{21}(s))\,ds \\
\theta_2(x) &\equiv \frac{1}{2}\int_0^x (q_{11}(s)+q_{22}(s)-p_{11}(s)-p_{22}(s))\,ds \\
R(x) &\equiv e^{-\theta_1(x)}\begin{pmatrix} \cosh\theta_2(x) & -\sinh\theta_2(x) \\ -\sinh\theta_2(x) & \cosh\theta_2(x)\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

//

この定理の証明の概略はAppendixで与える。定理より$M_T(P.a)$の元を、P, a を用いて記述することは可能であるがきわめて複雑なことになるので次の節では、Qの成分のうちのいくつかがあらかじめモデルとなっているPの対応する成分と等しいことがわかっている場合について$M_T(P.a)$を決定してみる。

§3. 応用.

以下記法の約束として

$$M_T(p_{12},p_{21},p_{22};a)\equiv\left\{(Q,b)\in M_T(P.a);\ Q(x)=\begin{pmatrix}p_{11}(x) & q_{12}(x)\\ q_{21}(x) & q_{22}(x)\end{pmatrix}\right\}$$

$$M_T(P_{11}, P_{22}\,;\,a) \equiv \left\{(Q, b) \in M_T(P, a)\,;\, Q(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x) & P_{12}(x) \\ P_{21}(x) & \varepsilon_{22}(x) \end{pmatrix}\right\}$$

$$M_T(P_{11}\,;\,a) \equiv \left\{(Q, b) \in M_T(P, a)\,;\, Q(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(x) & P_{12}(x) \\ P_{21}(x) & P_{22}(x) \end{pmatrix}\right\}$$

などと書き、さらに §3 を通じて

$$a : *\text{-generating} \quad \text{かつ} \quad T \geqq 2$$

を仮定する。

§3. I. $\underline{Q(x)\text{ のうちの三成分の固定化}}$. 次が得られる。

<u>Theorem I. 1.</u>

$$M_T(P_{12}, P_{21}, P_{22}\,;\,a) = M_T(P_{11}, P_{12}, P_{21}\,;\,a)$$

$$= \left\{\left(\begin{pmatrix} P_{11}(x) & d(x) + P_{12}(x) - P_{21}(x) \\ d(x) & P_{22}(x) \end{pmatrix},\ b\right);\ \int_0^1 (d(s) - P_{21}(s))\,ds = 0,\right.$$

$$\left. d \in C^1[0, 1],\quad b_k(x) = \exp\left(\int_0^x (d(s) - P_{21}(s))\,ds\right) \times a_k(x) \quad (k = 1, 2)\right\}$$

証明) たとえば、$M_T(P_{12}, P_{21}, P_{22}\,;\,a)$ については、§2 の定理の (i), (ii) から

$$(1)\,;\ (\varepsilon_{12}(x) - \varepsilon_{21}(x) - \varepsilon_{22}(x) - P_{21}(x) + P_{12}(x) + P_{22}(x))$$
$$+ (\varepsilon_{21}(x) - \varepsilon_{12}(x) - \varepsilon_{22}(x) - P_{12}(x) + P_{21}(x) + P_{22}(x)) \times \exp(2\theta_2(x)) = 0$$

$$(2)\,;\ (\varepsilon_{12}(x) - \varepsilon_{21}(x) - \varepsilon_{22}(x) - P_{12}(x) - P_{22}(x) + P_{21}(x) + 2P_{11}(x))$$
$$+ (\varepsilon_{12}(x) + \varepsilon_{22}(x) - \varepsilon_{21}(x) - P_{12}(x) + P_{21}(x) + P_{22}(x) - 2P_{11}(x))$$
$$\times \exp(2\theta_2(x)) = 0$$

但し (3); $\quad \theta_2(x) \equiv \frac{1}{2}\int_0^x (\varepsilon_{22}(s) - P_{22}(s))\,ds \quad ,$

が得られ、g_{21}を$d(x)$とおいて(1), (2)を$g_{12}(x)$と$g_{22}(x)$に関する(非線形)積分方程式とみなして不動点定理を用いて解くと, $g_{12} = d + p_{12} - p_{21}$, $g_{22} = p_{22}$ がわかる。あとは同じ定理(§2)の(iii), (iv)を用いればよい。 //

二成分の同定化問題については、Theorem I.1から直ちに、

Corollary I.1.

(i) $M_T(p_{11}, p_{12}; a) = M_T(p_{11}, p_{21}; a) = M_T(p_{12}, p_{22}; a)$

$= M_T(p_{21}, p_{22}; a) = \{(P, a)\}$

(ii) $M_T(p_{12}, p_{21}; a)$

$$= \left\{\left(\begin{pmatrix} p_{11}(x) & d(x)+p_{12}(x)-p_{21}(x) \\ d(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, b\right);\ \int_0^1 (d(s)-p_{21}(s))\,ds = 0\right.$$

$$\left. d \in C^1[0,1],\quad b_k(x) = \exp\left(\int_0^x (d(s)-p_{21}(s))\,ds\right) a_k(x)\ (k=1,2)\right\}$$

(iii) $M_T(p_{ij}; a) = \{(P, a)\}\quad (1 \leqq i, j \leqq 2)$ //

Corollary I.1 (ii)よりQの成分のうち、非対角成分の方が「同定化しにくい」ことがわかる。さらに、Corollary I.1 (i)より、§1の(注意2)も考慮して、

Corollary I.2. (ある種の振動に対する同定化問題)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p_1(x)\dfrac{\partial u}{\partial t} - p_2(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0 \\ u(0, x) = a_1(x) \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = a_2(x) \end{cases}$$

$$0 \leqq x \leqq 1 \quad -T \leqq t \leqq T \qquad ,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - q_1(x)\dfrac{\partial v}{\partial t} - q_2(x)\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(t,0) = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x}(t,1) = 0 \\ v(0,x) = b_1(x) \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}(0,x) = b_2(x) \end{cases}$$

に対して、 $v(t,0) = u(t,0)$ かつ $v(t,1) = u(t,1)$

が $-T \leqq t \leqq T$ に対して成り立つ $\Longleftrightarrow$

$p_1(x) \equiv q_1(x),\ p_2(x) \equiv q_2(x),\ a_1(x) \equiv b_1(x),\ a_2(x) \equiv b_2(x)$ //

さらに初期値がわかっていると三成分でも可同定になる場合がある。すなわち Theorem I.1 から

<u>Corollary I.3.</u>

$b(x) \equiv a(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ しかも $a(x)$の零点は全て孤立しているとすると

$M_T(p_{11}, p_{12}, p_{21}) = M_T(p_{12}, p_{21}, p_{22}) = \{(P, a)\}$

但し $M_T(p_{11}, p_{12}, p_{21}) \equiv \left\{(Q, a) \in M_T(P, a) ;\ Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}\right\}$ //

などとおいた。

三成分の同定化問題のうちで、残る2つの場合である $M_T(p_{11}, p_{12}, p_{22} ; a)$, $M_T(p_{11}, p_{21}, p_{22} ; a)$ については結果はきわめて複雑になる。そこで次にそれらを簡単化した場合である $M_T(p_{11}, p_{22} ; a)$ について $x \in [0,1]$ について局所的に調べることにする。（$M_T(p_{11}, p_{22} ; a)$ を $[0,1]$ 全体で決定することさえもかなり厄介である。）

§3. II. $M_T(P_{11}, P_{22}; a)$ について． この節に限り P_{ij} は十分なめらか，特に

(4)； $P_{ij} \in C^2[0,1]$ $(1 \leqq i, j \leqq 2)$

としておく。記述を簡単にするため次のような記法を用いる。

(5)； $J \equiv \{ x \in [0,1] ; |P_{11}(x) - P_{22}(x)| = |P_{12}(x) - P_{21}(x)| \}$

(6)； $\alpha(x) \equiv P_{11}(x) - P_{22}(x)$ $\beta(x) \equiv P_{12}(x) - P_{21}(x)$

$x \notin J$ に対して

(7)； $$d(x) \equiv \frac{\alpha'(x)\beta(x) - \alpha(x)\beta'(x)}{\alpha^2(x) - \beta^2(x)}$$

(8)； $$Q_0(x) \equiv \begin{pmatrix} P_{22}(x) + d(x) & P_{12}(x) \\ P_{21}(x) & P_{11}(x) + d(x) \end{pmatrix}$$ //

このとき，$M_T(P_{11}, P_{22}; a)$ の元を局所的に特徴付ける次の定理が得られる。（証明は Theorem I.1 と同じく §2の定理の (i), (ii) に由来する積分方程式の解の性質を調べることに帰着される。 Appendix II. も参照のこと。）

Theorem II.1.

J が孤立点のみからなるとする。$[\delta, \delta'] \subseteq [0,1]$ とする。このとき $\forall (Q, t) \in M_T(P_{11}, P_{22}; a)$ に対して以下の (i)～(iv) が成り立つ。

(i) $d(x) \neq 0$ が (δ, δ') で成り立つとすると，

(a) $x \in [\delta, \delta'] \setminus J$ に対して

$Q(x) = P(x)$ か又は $Q(x) = Q_0(x)$

であってしかも　$Q_0(x) \neq P(x)$　である。

(b) もし、$[\delta, \delta'] \setminus J$ で　$Q(x) = Q_0(x)$ となっているならば、$(\delta, \delta') \setminus J$ で　$|\beta(x)| > |\alpha(x)|$　かつ

$\forall \gamma \in [\delta, \delta'] \cap J$ で　$\alpha(\gamma+) = \alpha(\gamma-)$, $\alpha'(\gamma+) = \alpha'(\gamma-)$

でなくてはならない。

(ii) $[\delta, \delta']$ で　$\alpha(x) \equiv 0$　ならば $[\delta, \delta']$ で

$Q(x) \equiv P(x)$　である。

(iii) ($\alpha(x)$ の孤立した零点での性質)　γ を $\alpha(x)$ の $(0, 1)$ における孤立した零点であるとする。$\varepsilon > 0$ を十分小さな数として

(a)　$Q(x) = Q_0(x)$　in $(\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon)$

$\Longrightarrow$ α は $(\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon)$ で　C^1 級である

(b)
$$Q(x) = \begin{cases} P(x) & \gamma-\varepsilon < x \leqq \gamma \\ Q_0(x) & \gamma \leqq x < \gamma+\varepsilon \end{cases}$$

$\Longrightarrow$　α は $[\gamma, \gamma+\varepsilon)$ で C^1 級であって　$\alpha(\gamma+) = \alpha'(\gamma+) = 0$

(c)
$$Q(x) = \begin{cases} Q_0(x) & \gamma-\varepsilon < x \leqq \gamma \\ P(x) & \gamma \leqq x < \gamma+\varepsilon \end{cases}$$

$\Longrightarrow$　α は $(\gamma-\varepsilon, \gamma]$ で C^1 級であって　$\alpha(\gamma-) = \alpha'(\gamma-) = 0$

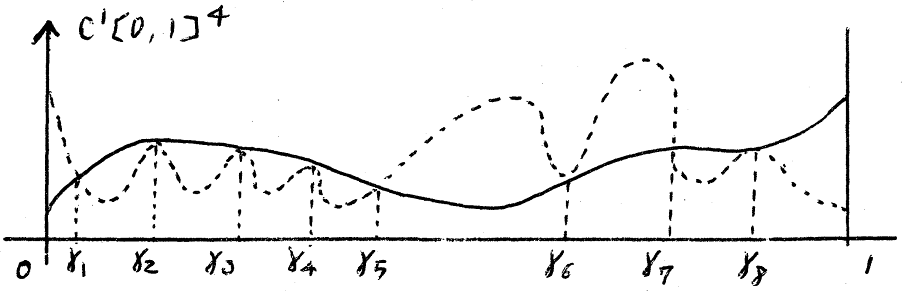
(iv) (端点での性質) (a) $[0, \delta)$ で　$\alpha(x) \neq 0 \Longrightarrow [0, \delta]$ で $Q(x) = P(x)$　(b) $(\delta, 1]$ で　$\alpha(x) \neq 0 \Longrightarrow$ $[\delta, 1]$ で　$Q(x) = P(x)$，でなくてはならない。　//

(注意1) Theorem II.1 を例で説明してみる。$P(x)$ としては次のようなものを考える;

$\alpha(x)$ の零点は $\{\gamma_k\}_{k=1}^{8} \subset (0,1)$ のみである。 //

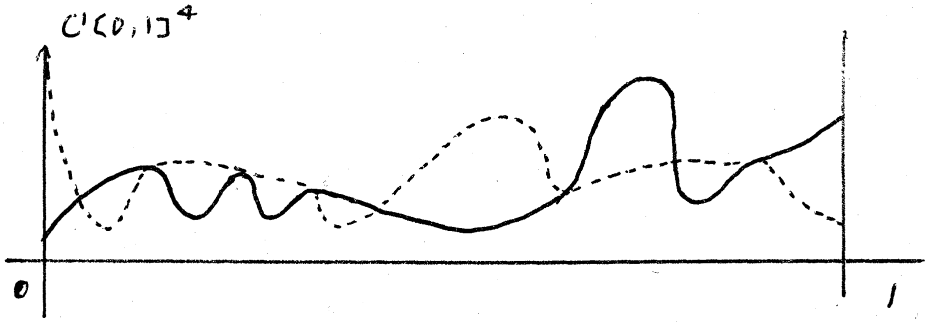
このとき、$Q_0(x)$ と $P(x)$ が交わるのは、$x=\gamma_k$ のみにおいてであり、しかも Theorem II.1 (i) より、Q_0 と P とは α のとなりあう零点の間では分離しており、そこでは Q として可能な枝は Q_0 か P かのいずれかである。さらに(iii)の意味で $x=\gamma_k$ において P と Q_0 が「なめらかに」接続しているときに限り、Q として P から Q_0 へ、又は Q_0 から P へと「枝を変える」場合がありうる。そのうえ、今考えている α については、$\alpha(0)\neq 0$, $\alpha(1)\neq 0$ なので (iv)より、$[0,\gamma_1]$ ならびに $[\gamma_8,1]$ では $Q=P$ でなくてはならない。

以上のことを図式的に書くと、次の通りである。



——— ; $P(x)$

- - - - - ; $Q_0(x)$



——— ; 可能なQの例

この場合、$\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_6, \gamma_8$ で $P \leftrightarrow Q_0$ という「転移」がおこり得る。例として図示した Q は $\gamma_2, \gamma_4, \gamma_6, \gamma_8$ で実際にそのような「転移」をしているものである。 //

以上のことから、特に

<u>Corollary II.1.</u>

$J = \phi$ かつ $\alpha(x)$ の $[0,1]$ における零点の個数は有限個であるとして それらを $\{\gamma_i\}_{i=1}^{m}$ とおく。そのとき、$\forall (Q, b) \in M_T(P_{11}, P_{22}; a)$ に対して $1 \leq i \leq m-1$ なる各 i に関して (γ_i, γ_{i+1}) の点 x_i が存在して $Q(x_i) = P(x_i)$ が成り立つ。$\Longrightarrow$ $[0,1]$ において $Q(x) \equiv P(x)$ かつ $b(x) \equiv a(x)$ である。 //

すなわち、Corollary II.1 の仮定の下では、可同定であることをいうためには、さらに Q に関して有限個の付加的な情報が必要である。

<u>(注意2)</u> §2の定理からもわかることであるが、$x \in J$ については $e(x)$ を勝手な C^1 級の関数として
$Q(x) = P(x) + e(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ しかわからない。(J は、同定化についていわば「退化した」集合と解釈できる。)従って、J が、内点を含む場合は、J において、Q についての自由度は「∞」になってしまう。実際、モデルとして、

$P(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & p(x) \end{pmatrix}$ をとると、$J=[0,1]$ であり

$$M_T(P_{11}, P_{22}\,;\,a) \supset \left\{ \left(\begin{pmatrix} r(x) & q(x) \\ q(x) & r(x) \end{pmatrix}, b(x) \right) ;\ r \in C^1[0,1], \right.$$

$$\left. b(x)=R(x)a(x),\ \int_0^1 (r(s)-p(s))\,ds = 0 \right\}$$

を示すことができる。

§3.Ⅲ. <u>Qの局所一意性について</u>. §3.Ⅰと§3.Ⅱでは Qのいくつかの成分を$[0,1]$<u>全体</u>で与えておいて、残りの成分を$[0,1]$<u>全体</u>で決定する問題を考えた。ここでは、Qのいくつかの成分が$[0,1]$の<u>部分集合</u>$[\delta,\delta']$でモデルと一致しているときに、Qの残りの成分を同じ部分集合上で決定する問題を考える。以下 $[\delta,\delta'] \subset [0,1]$ とおく。

Theorem Ⅰ.1, Ⅱ.1 と類似のやり方で以下を示すことができる。まず、三成分が未知でそのうちの一成分について$[\delta,\delta']$上でモデルと一致している場合については、

<u>Theorem Ⅲ.1.</u>

$\forall (Q, b) \in M_T(P_{12}, P_{21}, P_{22}\,;\,a)$ に対して

$[\delta,\delta']$ において $q_{21}(x) \equiv p_{21}(x)$ か又は $q_{12}(x) \equiv p_{12}(x)$

$\Longrightarrow [\delta,\delta']$ で $Q(x) \equiv P(x)$

しかし $[\delta,\delta']$ において $q_{22}(x) \equiv p_{22}(x)$ であっても、これは同定化に対して情報を何ら与えるものではない。(Corollary Ⅰ.1の(ii)) $M_T(P_{11}, P_{12}, P_{21}\,;\,a)$ についても同様である。

Theorem III.2.

$^\forall(Q, b) \in M_T(P_{11}, P_{12}, P_{22}; a)$ に対して

(i) $[\delta, \delta']$ で $g_{12}(x) \equiv P_{12}(x)$ ならば §3. IIの仮定の下で Theorem III.1 の(i), (ii), (iii) が成り立つ。$\delta = 0$, $\delta' = 1$ のときは(iv)も成り立つ。

(ii) (a) $[\delta, \delta']$で $\alpha(x) \equiv 0$ かつ $\beta(x) \equiv 0$ の場合:

$g_{22}(x) \equiv P_{22}(x)$ が $[\delta, \delta']$ で成り立つ $\Longrightarrow$ $[\delta, \delta']$ で $Q(x) \equiv P(x)$

(b) (a)でない場合: $g_{22}(x) \equiv P_{22}(x)$ が $[\delta, \delta']$ で成り立つとする。$\alpha(x_0) \neq 0$ 又は $\beta(x_0) \neq 0$ なる $x_0 \in [\delta, \delta']$ が存在して $g_{11}(x_0) = P_{11}(x_0)$ かつ $g_{12}(x_0) = P_{12}(x_0)$, (9)

が満たされる。$\Longrightarrow$ $[\delta, \delta']$ で $Q(x) \equiv P(x)$ //

(注意3) この Theorem の(ii)の(b)において $\delta = 0$ 又は $\delta' = 1$ の場合は、それぞれ $x_0 = 0$, $x_0 = 1$ ととればよい。すなわち、$\delta = 0$ 又は $\delta' = 1$ ならば $^\forall(Q, b) \in M_T(P_{11}, P_{12}, P_{22}; a)$ に対して $[\delta, \delta']$ で $g_{22}(x) \equiv P_{22}(x)$ が成り立つならば、常に $[\delta, \delta']$で $Q(x) \equiv P(x)$ でなくてはならない。

さらに、(9)なる仮定は除去できない。(反例をつくることが可能であるが紙数の都合上これ以上ふれない。) //

最後に四成分が未知でそのうちの三成分について $[\delta, \delta']$ でモデルと一致している場合については,

<u>Theorem II.3.</u>

$\forall (Q, b) \in M_T(P, a)$ に対して

(i)(a) $[\delta, \delta']$ で $\alpha(x) \equiv 0$ かつ $\beta(x) \equiv 0$ である場合：

$[\delta, \delta']$ で $q_{12}(x) \equiv p_{12}(x)$, $q_{21}(x) \equiv p_{21}(x)$, $q_{22}(x) \equiv p_{22}(x)$

$\Longrightarrow [\delta, \delta']$ で $q_{11}(x) = p_{11}(x)$

(b) (a)でない場合：$[\delta, \delta']$ で $q_{12}(x) \equiv p_{12}(x)$, $q_{21}(x) \equiv p_{21}(x)$, $q_{22}(x) \equiv p_{22}(x)$ が成立したとする。このとき

$\left.\begin{array}{l}\alpha(x_0) \neq 0 \text{ 又は } \beta(x_0) \neq 0 \text{ なる } x_0 \in [\delta, \delta'] \text{ が存在して} \\ q_{11}(x_0) = p_{11}(x_0) \text{ が満たされる。}\end{array}\right\} (10)$

$\Longrightarrow [\delta, \delta']$ で $q_{11}(x) = p_{11}(x)$

(ii)(a)ある定数 λ が存在して $[\delta, \delta']$ で $\beta(x) \equiv \lambda\alpha(x)$ となり、しかも $[\delta, \delta']$ で $\beta(x) \not\equiv 0$ となる場合：

$[\delta, \delta']$ で $q_{11}(x) \equiv p_{11}(x)$, $q_{21}(x) \equiv p_{21}(x)$, $q_{22}(x) \equiv p_{22}(x)$ が成立したとする。このとき

$\left.\begin{array}{l}\alpha(x_0) \neq 0 \text{ 又は } \beta(x_0) \neq 0 \text{ なる } x_0 \in [\delta, \delta'] \text{ が存在して} \\ q_{12}(x_0) = p_{12}(x_0) \text{ が満たされる。}\end{array}\right\} (11)$

$\Longrightarrow [\delta, \delta']$ で $q_{12}(x) \equiv p_{12}(x)$

(b) (a) でない場合：$[\delta, \delta']$ で $q_{11}(x) \equiv p_{11}(x)$, $q_{21}(x) \equiv p_{21}(x)$, $q_{22}(x) \equiv p_{22}(x) \Longrightarrow [\delta, \delta']$ で $q_{12}(x) \equiv p_{12}(x)$ //

<u>(注意4)</u> この Theorem の (i)の(b)および (ii)の (a)において、$\delta = 0$ 又は $\delta' = 1$ ならば 前の (注意3) と同じことが

いえる。さらに仮定(10),(11)はそれぞれ除去できない。
(反例がある。) //

以上考えてきたTheorem III.1〜III.3、たとえばTheorem III.3の(i)で考えている場合は、$M_T(P_{11};a)$の決定とは本質的に異なることに注意する。すなわち，$\forall Q \in M_T(P_{11};a)$に対しては$[\delta,\delta']$の外側でも$g_{12}(x)\equiv p_{12}(x)$ $g_{21}(x)\equiv p_{21}(x)$, $g_{22}(x)\equiv p_{22}(x)$が成立しているが、Theorem III.3の(i)ではそうとは限らない。特に$\delta=0$, $\delta'=1$にとれば$M_T(P_{11};a)$を決定する問題に帰着することは(注意4)からわかる。

§4. <u>分布RLCG回路への1つの応用.</u> §1で考えた非一様な分布RLCG回路の場合にもどって、§3の結果の応用例として，Theorem II.1を用いて、抵抗RとコンダクタンスGの同定化問題を考えてみることにする。なおそれ以外の一次定数の決定に関しては紙数の都合もあり、ふれることはできないので別の機会にまわしたい。

$E(R_0,L_0,C_0,G_0;a_0,a_1)$, $E(R,L,C,G;b_0,b_1)$ は§1の(1)式のように定義されているものとする。この節では

(I); $L_0(x)\equiv L(x)$, $C_0(x)\equiv C(x)$

を仮定して、GとRについての同定化問題を考える。

§1の最後でふれたように、独立変数の変換

(2); $z = \int_0^x \sqrt{L_0(y)C_0(y)}\,dy$ （但し $l \equiv \int_0^1 \sqrt{L_0(y)C_0(y)}\,dy$）

によって，$E(R_0, L_0, C_0, G_0; a_0, a_1)$, $E(R, L_0, C_0, G; b_0, b_1)$ は、§2で考えた $E(P, a)$の形になおせ、§3のTheorem II.1を用いることができる。その際、初期値 a_0, a_1 について *-generating 性を記述する必要があるが、その準備として，

$$\psi_n(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_n^{(1)}(x) \\ \psi_n^{(2)}(x) \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{Z})$$ を、

$$(3);\ \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L_0(x)} \\ -\frac{1}{C_0(x)} & 0 \end{pmatrix} \frac{d\cdot}{dx} + \begin{pmatrix} \frac{G_0(x)}{C_0(x)} & \frac{L_0'(x)}{L_0^2(x)} \\ \frac{C_0'(x)}{C_0^2(x)} & \frac{R_0(x)}{L_0(x)} \end{pmatrix} \cdot$$

に境界条件

$$u_2(0) = 0,\quad u_1(1) = 0$$

（但し $u(x) \equiv \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}$ とおく。）をつけた作用素のn番目の固有関数とする。

さらに、$T \geqq 2$に相当する条件は変数変換をしたので、この場合、$T \geqq 2l$，となることにも注意して

<u>Theorem 4.1.</u>

$E(R_0, L_0, C_0, G_0; a_0, a_1)$ と $E(R, L_0, C_0, G; b_0, b_1)$ に対して、

1°) $\int_0^1 (a_0(x)\psi_n^{(1)}(x) + a_1(x)\psi_n^{(2)}(x))\,dx \neq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$

2°) $T \geqq 2l$

3°) $J \equiv \{x \in [0,1]\ ;\ |\alpha(x)| = |\beta(x)|\}$

は孤立点のみからなる.

と仮定する。但し、ここで

$$(4);\ \begin{cases} \alpha(x) \equiv \dfrac{R_0(x)}{L_0(x)} - \dfrac{G_0(x)}{C_0(x)} \\ \beta(x) \equiv \dfrac{1}{2\sqrt{L_0(x)C_0(x)}}\left(\dfrac{C_0'(x)}{C_0(x)} - \dfrac{L_0'(x)}{L_0(x)}\right) \end{cases}$$

とおいた。1°) ~ 3°) の下で

$$v(t,0) = v_0(t,0)\ ,\quad i(t,1) = i_0(t,1)$$
$$(-T \leqq t \leqq T)$$

$\Longrightarrow$ *Theorem* II.1 (§3) が

$$(P_{11},\ P_{22}) \Leftarrow \left(-\frac{G_0}{C_0},\quad -\frac{R_0}{L_0}\right)$$

$$(\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22}) \Leftarrow \left(-\frac{G}{C_0},\quad -\frac{R}{L_0}\right)$$

とおきかえて成り立つ。 //

さらに、§3 の Corollary II.1, *Theorem* II.1 の (ii) をそれぞれ用いて、

<u>Corollary 4.1.</u> $T \geqq 2l$ とする。

$J = \phi$ かつ $R_0(x)C_0(x) - L_0(x)G_0(x)$ の $[0,1]$ における零点の個数は有限個であるとして、それらを $\{x_i\}_{i=1}^m$ とおく。

このとき、 $v(t,0)=v_0(t,0)$, $i(t,1)=i_0(t,1)$
が、$-T\leqq t\leqq T$に対して成立し、かつ (γ_i, γ_{i+1})のある一点x_iで $R(x_i)=R_0(x_i)$, $G(x_i)=G_0(x_i)$ が
$1\leqq i\leqq m-1$ なる各iに対して成立する $\Longrightarrow$ $[0,1]$で、
$R(x)\equiv R_0(x)$, $G(x)\equiv G_0(x)$, $b_0(x)\equiv a_0(x)$, $b_1(x)\equiv a_1(x)$ //

<u>Corollary 4.2.</u> $T\geqq 2l$とする。
$[0,1]$で $R_0(x)C_0(x)\equiv L_0(x)G_0(x)$ である(すなわち、$R_0L_0C_0G_0$回路が無ひずみである)とする。このとき、
$v(t,0)=v_0(t,0)$, $i(t,1)=i_0(t,1)$ が $-T\leqq t\leqq T$
に対して成立するならば、$[0,1]$で
$R(x)\equiv R_0(x)$, $G(x)\equiv G_0(x)$, $b_0(x)\equiv a_0(x)$, $b_1(x)\equiv a_1(x)$
である。 //

<u>(注意1)</u> これまでは分布RLCG回路としては、線路が単一である場合に限り考えてきたが、線路が多数存在するときも同様の考察が可能である。すなわち、

$$\mathring{i}\equiv\begin{pmatrix} i_1\\ \vdots \\ i_n\end{pmatrix}$$: i_k; k番目の線路の電流

$$\mathring{v}\equiv\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}$$: v_k; k番目の線路の電圧

とおくと、$\mathring{i}(t,x)$, $\mathring{v}(t,x)$ は

(5); $$\begin{pmatrix} -L(x) & 0 \\ 0 & -C(x) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R(x) & 0 \\ 0 & G(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を満たす。但し $L(x)$, $C(x)$, $R(x)$, $G(x)$ は $n \times n$ 行列で、それぞれ分布インダクタンス行列、分布容量行列、分布抵抗行列、分布コンダクタンス行列とよばれる。(たとえば Matsumoto [Chap. VIII, 5]) E_n は n 次の単位行列である。このとき、

(6); $$L(x)C(x) = \alpha(x) E_n$$

α: あるスカラー値関数で $\alpha(x) > 0$

が成り立つとすると(これが成立する場合については[5])、独立変数を

(7); $$z \equiv \int_0^x \sqrt{\alpha(y)}\, dy$$

で x から z に変換することによって、§2の手法を適用することができ、$M_T(P, Q)$ の特徴付けに関する§2の定理に対応する結果を得られる。 //

Appendix. I. §2の定理の証明のスケッチ.

証明には、

$$\frac{\partial v}{\partial t} = B\frac{\partial v}{\partial x} + Q(x)\,v \quad \text{の解} v \text{ を}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B\frac{\partial u}{\partial x} + P(x)\,u \quad \text{の解} u \text{ を用いて}$$

あらわす"変形公式"が必要となる。

以下、 $\Omega \equiv \{ (y, x) ;\ 0 \leqq y \leqq x \leqq 1 \}$ とおく.

まず、

Lemma A.1.

次の(i)〜(iv)を満たす $K(y, x) = \begin{pmatrix} k_{11}(y, x) & k_{12}(y, x) \\ k_{21}(y, x) & k_{22}(y, x) \end{pmatrix}$ $\in C^1(\overline{\Omega})^4$ が、唯一存在する。

(i) $B\dfrac{\partial K}{\partial x}(y, x) + Q(x)K(y, x) - K(y, x)P(y)$

$$= -\frac{\partial K}{\partial y}(y, x)B \qquad (y, x) \in \Omega$$

(ii) $k_{12}(0, x) = h\,k_{11}(0, x)$, $k_{22}(0, x) = h\,k_{21}(0, x)$

$$(0 \leqq x \leqq 1)$$

(iii) $k_{12}(x, x) - k_{21}(x, x)$

$= \dfrac{1}{4}\exp(-\theta_1(x) - \theta_2(x)) \times$

$(q_{11}(x) + q_{12}(x) - q_{21}(x) - q_{22}(x) - p_{11}(x) - p_{21}(x) + p_{12}(x) + p_{22}(x))$

$+ \dfrac{1}{4}\exp(-\theta_1(x) + \theta_2(x)) \times$

$(q_{11}(x) + q_{21}(x) - q_{12}(x) - q_{22}(x) - p_{11}(x) - p_{12}(x) + p_{21}(x) + p_{22}(x))$

$$(0 \leqq x \leqq 1)$$

(iv) $k_{11}(x, x) - k_{22}(x, x)$

$$= \frac{1}{4} \exp(-\theta_1(x) - \theta_2(x)) \times$$
$$(\xi_{11}(x) + \xi_{12}(x) - \xi_{21}(x) - \xi_{22}(x) - P_{12}(x) - P_{22}(x) + P_{11}(x) + P_{21}(x))$$
$$+ \frac{1}{4} \exp(-\theta_1(x) + \theta_2(x)) \times$$
$$(\xi_{12}(x) + \xi_{22}(x) - \xi_{11}(x) - \xi_{21}(x) - P_{11}(x) - P_{12}(x) + P_{21}(x) + P_{22}(x))$$
$$(0 \leqq x \leqq 1) \quad //$$

証明は(i)〜(iv)を、積分方程式にかきかえて不動点定理を用いる。

さて、変形公式は次のように述べることができる。

<u>Proposition A.1.</u>

$\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ をそれぞれ

$$B\frac{d\varphi}{dx} + P(x)\varphi = \lambda\varphi \qquad \varphi_1(0,\lambda) = 1 \quad \varphi_2(0,\lambda) = -h,$$
$$B\frac{d\psi}{dx} + Q(x)\psi = \lambda\psi \qquad \psi_1(0,\lambda) = 1 \quad \psi_2(0,\lambda) = -h$$

の解とする。(但し $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$, $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ である。)

このとき Lemma A.1 の K と §2 の(?)式で与えられた R によって、

$$(A.1); \quad \psi(x,\lambda) = R(x)\varphi(x,\lambda) + \int_0^x K(y,x)\varphi(y,\lambda)\,dy$$
$$0 \leqq x \leqq 1$$

とあらわすことができる。 //

<u>Proposition A.2.</u>

$\Omega_T \equiv \{(x,t);\ x \geqq 0,\ x - T \leqq t \leqq -x + T\}$ とする。

$u = u(t,x)$ が Ω_T において

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B\frac{\partial u}{\partial x} + P(x)u, \quad u_2(t,0) + h\, u_1(t,0) = 0$$

を強解の意味で満たす $\Longrightarrow$

(A.2); $V(t,x) = R(x)u(t,x) + \int_0^x K(y,x)\,u(t,y)\,dy$

は Ω_T において

$$\frac{\partial V}{\partial t} = B\frac{\partial V}{\partial x} + Q(x)V, \quad V_2(t,0) + h\, V_1(t,0) = 0$$

を強解の意味で満たす。 //

(注意1) $u = u(t,x)$ が $\frac{\partial u}{\partial t} = B\frac{\partial u}{\partial x} + P(x)u$ を強解の意味で満たすことの定義は後述する。 //

(注意2) Proposition A.1, A.2はそれぞれ[11], [12]で導入された変形公式を今我々が考えている場合に対して、modifyしたものである。[11], [12]にくらべて、「変形するべき」係数が複数あるので若干の工夫が必要である。 //

よって以下ではこれらのPropositionを証明するかわりにProposition A.1 を例にしてどのようにして(A.1)のような形の式があらわれてきたかを述べる。R, K は、

(A.3); $\quad B\frac{d\psi}{dx} + (Q(x) - \lambda)\psi = 0$ が満たされる

ように定められなくてはならないが、(A.1)の右辺を(A.3)に代入すると

(A.4); $BR(x)\frac{d\varphi}{dx} + (BR'(x) + BK(x,x) + Q(x)R(x))\varphi$

$\quad - \lambda R(x)\varphi$

$\quad + \int_0^x BK_x(y,x)\varphi\,dy + (Q(x) - \lambda)\int_0^x K(y,x)\,\varphi\,dy = 0$

λを消去することが当面の目標となるので、まず（A.4）の左辺の第四、五項目の積分のλっている項同士組み合わせてλを消去することを試みる。そのためには、

(A.5); $\int_0^x BK_x(y,x)\varphi\, dy = \int_0^x [\cdots] B\frac{d\varphi}{dy}\, dy$

となれば　$B\frac{d\varphi}{dy} = (\lambda - P(y))\varphi$　を用いて

$$\int_0^x BK_x(y,x)\varphi\, dy = \int_0^x [\cdots](\lambda - P(y))\varphi\, dy 。$$

Kが Lemma A.1 の(i)を満たせば、部分積分によって、（A.5）が求る。故に、部分積分を実行して

(A.6); $B\frac{d\varphi}{dx} + (Q(x) - \lambda)\varphi$

$= [BR'(x) + Q(x)R(x) - (K(x,x)B - BK(x,x))]\varphi$

$+ K(0,x)B\varphi(0)$

$+ [BR(x)\frac{d\varphi}{dx} - \lambda R(x)\varphi]$

次に（A.6）の右辺第二項を0にするため Lemma A.1 の(ii)が必要になる。さらに（A.6）の右辺第三項からλを消すために

(A.7);　　　$BR(x) = R(x)B$

となるように、従って　$R(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1(x) & \gamma_2(x) \\ \gamma_2(x) & \gamma_1(x) \end{pmatrix}$　の形にRをとっておくと、

(A.8);　$BR(x)\frac{d\varphi}{dx} = \lambda R(x)\varphi - R(x)P(x)\varphi$

が得られるので（A.6）は、

(A.9)； $B\dfrac{d\psi}{dx}+(Q(x)-\lambda)\psi$

$$=\left[BR'(x)+Q(x)R(x)-R(x)P(x)-(K(\alpha,x)B-BK(\alpha,x))\right]\varphi$$

となるので

(A.9)′； $BR'(x)+Q(x)R(x)-R(x)P(x)-(K(\alpha,x)B-BK(\alpha,x))=0$

となればよい。$K(\alpha,x)B-BK(\alpha,x)$ は $\begin{pmatrix} k(x) & l(x) \\ -l(x) & -k(x) \end{pmatrix}$

の形をしているので、(A.9)′ が成り立つためには

(A.10)； $(BR'(x)+Q(x)R(x)-R(x)P(x))_{11}$

$\qquad +(BR'(x)+Q(x)R(x)-R(x)P(x))_{22}=0$

(A.11)； $(BR'(x)+Q(x)R(x)-R(x)P(x))_{12}$

$\qquad +(BR'(x)+Q(x)R(x)-R(x)P(x))_{21}=0$

でなくてはならない。(但し $(\cdot)_{ij}$ は、行列の (i,j) 成分をあらわす。) 一方、φ と ψ の $x=0$ での初期条件より

(A.12)； $\begin{pmatrix} 1 \\ -h \end{pmatrix}=R(0)\begin{pmatrix} 1 \\ -h \end{pmatrix}$

あとは $R(x)$、従って γ_1, γ_2 に関する常微分方程式 (A.10), (A.11) を、初期条件 (A.12) の下で解けば、$R(x)$ が §2の (5) 式で与えられたものでなくてはならないことがわかる。これを (A.9)′ に代入すると $k(x), l(x)$ が定まり、K が Lemma A.1 の (iii), (iv) を満たさなくてはならないことがわかる。 //

次に 定理の証明のため $E(P,\alpha)$ についての考察も若干しておかなくてはならない。

$A_{P,h,H}$ を $B\frac{d\cdot}{dx} + P(x)\cdot$ に境界条件

$u_2(0) + h u_1(0) = 0$, $u_2(1) + H u_1(1) = 0$ をつけて考えた $L^2(0,1)^2$ での実現とする。(すなわち、$A_{P,h,H}$ の定義域

$$\mathcal{D}(A_{P,h,H}) = \{ u \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in H^1(0,1)^2 ;$$
$$u_2(0) + h u_1(0) = 0,\ u_2(1) + H u_1(1) = 0 \} \quad)$$

このとき

<u>Proposition A.3.</u> ($A_{P,h,H}$ のスペクトル解析)

$|h|, |H| \neq 1$ とする。(i) $\sigma(A_{P,h,H}) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ であり、λ_n は全て単純な固有値である。

(ii) $\gamma \equiv \frac{1}{2} \log \frac{(1+h)(1-H)}{(1-h)(1+H)}$ (主値をとる。),

$\theta \equiv \frac{1}{2}\int_0^1 (P_{11}(x) + P_{22}(x))\, dx$ とおくと、

(A.13); $\lambda_n = \gamma + \theta + n\pi\sqrt{-1} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \pm\infty)$

(iii) φ_n を λ_n に対応する $A_{P,h,H}$ の固有値とすると $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(0,1)^2$ で Riesz 基底をなす。 //

(<u>注意3</u>) $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(0,1)^2$ で Riesz 基底をなすとはある定数 $M>0$ が存在して $\forall u \in L^2(0,1)^2$ に対して $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ が一意に定まって $u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\varphi_n$ かつ

$$M^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leqq \|u\|^2_{L^2(0,1)^2} \leqq M \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

が成り立つことをいう。 //

(ii)の証明は Proposition A.1 で P, Q のかわりにそれぞれ 0, P を代入してたとえば、Levitan - Sargsjan [4] にならってできる。一方 (iii) は (ii)と Proposition A.1 と Bari の定理 (Gohberg - Krein [1]) を用いて示せる。 //

$A_{P,h,H}$ の共役 $A_{P,h,H}^{*}$ は、§2の(2), (3)式で与えた作用素と一致するが、$A_{P,h,H}^{*}$ の $\overline{\lambda_n}$ に対応する固有関数 φ_n^{*} を

$(\varphi_n, \varphi_m^{*})_{L^2(0,1)^2} = \delta_{mn}$ (Kronecker のデルタ)

となるように正規化しておく。($\sigma(A_{P,h,H}^{*}) = \overline{\sigma(A_{P,h,H})}$, $\overline{\cdot}$ は複素共役をあらわす, にも注意。) このとき

<u>Proposition A.4.</u> ($E(P,a)$ の解の表示)

$a \in \mathcal{D}(A_{P,h,H})$ とする。 (i) $E(P,a)$ は、唯一の強解 $u = u(t,x)$ をもつ。

(ii) $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_n t} (a, \varphi_n^{*})_{L^2(0,1)^2}\, \varphi_n(x)$

但し、右辺は $\forall t \in [-T,T]$ に対して x の関数として $H^1(0,1)^2$ で収束する。 //

(<u>注意4</u>) ここで $u = u(t,x)$ が $E(P,a)$ の強解であるとは (i) $u(t,\cdot) \in C_t^0((-T,T) \to L^2(0,1)^2)$

(ii) $\forall t \in [-T,T]$ に対して $\frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot) \in L^2(0,1)^2$ かつ $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}(A_{P,h,H})$ (iii) $\frac{\partial u}{\partial t} = B\frac{\partial u}{\partial x} + P(x)u$ が $\forall t \in (-T,T)$, a.e. $x \in [0,1]$ に対して成り立つ。 //

最後に 証明は省略するが

$$(A.14);\quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(1)}(1) \neq 0$$

但し $\varphi_n = \begin{pmatrix} \varphi_n^{(1)} \\ \varphi_n^{(2)} \end{pmatrix}$ は $A_{P.R.H}$ の固有関数とする，に注意する。//

以上で、定理の証明に必要な準備はおわったので、証明の概略を示すことにする。

u, v をそれぞれ、$E(P, a)$, $E(Q, b)$ の解として

$$(A.15);\quad u(0, t) = v(0, t),\quad u(1, t) = v(1, t) \qquad (-T \leqq t \leqq T)$$

において Proposition A.2 と Proposition A.4 (ii)（解の固有関数展開）を用いて

$$(A.16);\quad \begin{cases} (1-\alpha+h\beta)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_n t}(a, \varphi_n^*)\,\varphi_n^{(1)}(1) \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(K_1, \varphi_n)(a; \varphi_n^*)\,e^{\lambda_n t} \\ (h\alpha-\beta-h)\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_n t}(a, \varphi_n^*)\,\varphi_n^{(1)}(1) \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(K_2, \varphi_n)(a, \varphi_n^*)\,e^{\lambda_n t} \qquad -(T-1) \leqq t \leqq (T-1) \end{cases}$$

但し $K_1(y) \equiv \begin{pmatrix} K_{11}(y, 1) \\ K_{12}(y, 1) \end{pmatrix}$, $K_2(y) \equiv \begin{pmatrix} K_{21}(y, 1) \\ K_{22}(y, 1) \end{pmatrix}$

$R(1) \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ とおき、$\varphi_n^{(2)}(0) = -h\varphi_n^{(1)}(0)$ も用いた。

Proposition A.3 の (ii)（固有値の漸近挙動）と $T \geqq 2$ より non-harmonic Fourier analysis（たとえば、Russell [10], T. Suzuki [12]）を行なって、

$$\begin{cases}(1-\alpha+h\beta)(a,\varphi_n^*)\varphi_n^{(1)}(1)=(K_1,\varphi_n)(a,\varphi_n^*)\\(h\alpha-\beta-h)(a,\varphi_n^*)\varphi_n^{(1)}(1)=(K_2,\varphi_n)(a,\varphi_n^*)\end{cases}\quad({}^\forall n\in\mathbb{Z})$$

$*$-generating 性；$(a,\varphi_n^*)\neq 0$ より.

$$(A.17);\begin{cases}(1-\alpha+h\beta)\varphi_n^{(1)}(1)=(K_1,\varphi_n)\\(h\alpha-\beta-h)\varphi_n^{(1)}(1)=(K_2,\varphi_n)\end{cases}\quad({}^\forall n\in\mathbb{Z})$$

ここで (A.14) と $\{\varphi_n\}$ が Riesz 基底をなすこと (Proposition A.3 (iii)) から $\lim_{n\to\infty}(K_i,\varphi_n)=0$ $(i=1,2)$ なので

$$\begin{cases}1-\alpha+h\beta=0,\quad h\alpha-\beta-h=0\\(K_1,\varphi_n)=0\quad(K_2,\varphi_n)=0\quad({}^\forall n\in\mathbb{Z})。\end{cases}$$

$|h|\neq 1$ より $\alpha=1$，$\beta=0$ が得られる。これは定理の (iv) を示している。しかも $\{\varphi_n\}$ は Riesz 基底をなすので

$$K_1(y,1)\equiv K_2(y,1)=0\qquad(0\leqq y\leqq 1)$$

がわかり、K の満たす双曲型方程式 (Lemma A.1 の (i)) の依存領域を考えることにより

$$(A.18);\qquad K(y,x)\equiv 0\quad {}^\forall(y,x)\in\Omega$$

が示される。K の $y=x$ での境界条件 (Lemma A.1 の (iii), (iv)) を考えると 定理の (i), (ii) が得られる。最後に (A.18) と変形公式 (A.2) より，$b(x)=k(x)a(x)$，すなわち，定理の (iii) がわかる。

逆に定理の (i)～(iv) をみたす (a,b) に対して $V(t,x)=k(x)u(t,x)$ とおくと，直ちに

$(Q, t) \in M_T(P, Q)$ を示すことができる。

Appendix II. Theorem II. 1 の証明について.

さて定理の(i), (ii) はこの場合

$$\text{(A.19)} \quad (m(x) - \alpha(x) + 2\beta(x)) + (m(x) - \alpha(x) - 2\beta(x))\, e^{2\theta_2(x)} = 0$$

$$\text{(A.20)} \quad (m(x) + \alpha(x))\,(e^{2\theta_2(x)} - 1) = 0$$

となる。但し $m(x) = \gamma_{11}(x) - \gamma_{22}(x)$ とおいた。さらに、

$$J_1 \equiv \{x \in [0,1]\,;\ \alpha(x) + m(x) = 0,\ \alpha(x) - m(x) \neq 0\}$$

$$J_2 \equiv \{x \in [0,1]\,;\ \alpha(x) + m(x) \neq 0,\ \alpha(x) - m(x) = 0\}$$

$$J_3 \equiv \{x \in [0,1]\,;\ \alpha(x) + m(x) = 0,\ \alpha(x) - m(x) = 0\}$$

とする。証明の際の key-Lemma は次のものである。

Lemma A.2.

$[0,1] = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ かつ J_1, J_2 は開集合である。 //

Lemma A.3.

$[\delta, \delta'] \subset [0,1]$ かつ (δ, δ') で $\alpha(x) \neq 0$ であるならば、$(\delta, \delta') \subset J_1$ か又は $(\delta, \delta') \subset J_2$ のいずれかである。 //

あとは、これらの Lemma に注意して (A.19), (A.20) を調べればよいわけであるが、定められた紙数をすでに超過してしまったので証明は別の機会にゆずりたい。

REFERENCES

〔1〕 I.C.Gohberg and M.G.Kreĭn, Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1969.

〔2〕 S.Kitamura, 一階単独偏微分方程式で記述されるシステムのパラメータ可同定性について，本研究集会講究録

〔3〕 S.Kitamura and S.Nakagiri, Identifiability of spatially varying and constant parameters in distributed systems of parabolic type, SIAM J. Control and Optim., 15 (1977), pp.785-802.

〔4〕 B.M.Levitan and I.S.Sargsjan, Introduction to Spectral Theory, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1975.

〔5〕 A.Matsumoto (eds.), Microwave Filters and Circuits, Academic Press, New York and London, 1970.

〔6〕 R.Murayama, The Gel'fand-Levitan theory and certain inverse problems for the parabolic equation , J.Fac.Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math., 28 (1981), pp.317-330.

〔7〕 S.Nakagiri, Identifiability of linear systems in Hilbert spaces, SIAM J. Control and Optim., 21 (1983), pp.501-530.

〔8〕 S.Nakagiri, S.Kitamura and H.Murakami, Mathematical treatment of the constant parameter identifiability of distributed systems of parabolic type, Math.Sem.Notes Kobe Univ., 5 (1977), pp.97-105.

〔9〕 A.Pierce, Unique identification of eigenvalues and coefficients in a parabolic problem, SIAM J. Control and Optim., 17 (1979), pp.494-499.

[10] D.L.Russell, Nonharmonic Fourier series in the control theory of disributed parameter systems, J.Math.Anal.Appl., 18 (1967), pp.542-560.

[11] T.Suzuki, Uniqueness and nonuniqueness in an inverse problem for the parabolic equation, J.Differential Equations, 47 (1983), pp.296-316.

[12] T.Suzuki, Gel´fand-Levitan´s theory, deformation formulas and inverse problems, (preprint).

[13] T.Suzuki and R.Murayama, A unique theorem in an identification problem for coefficients of parabolic equations, Proc.Japan Acad.Ser.A Math.Sci., 56 (1980), pp.259-263.