数理解析研究所講究録
562巻 1985年 82-99

むだ時間を含む系の制御—関数解析的手法による設計法

山形大学工学部　渡部慶二　(Keiji Watanabe)

1. まえがき

通常の可制御な線形システムの極は，状態フィードバックにより任意の値に設定できる。これに対し状態にむだ時間をもつ系は一般に無限個の極をもつため，それらすべてを任意の値に設定することは事実上不可能である。したがって，状態にむだ時間をもつ系の極配置では何らかの工夫が必要であり，これまでに代数的手法[1)~6)]あるいは関数解析的手法[7)~14)]を用いて極配置が検討されてきた。ここでは，関数解析的手法にもとづく部分極配置[8)~13)]と有限極配置[15)~23)]について最近得られた結果を述べる。

本稿の構成は次の通りである。まず，次節で中立型むだ時間系のスペクトル分解，オ3節でそれを用いた部分極配置を述べる。オ4節ではretarded typeのむだ時間系の有限極配置，オ5節では入力，状態にむだ時間が混在する系の有限極配置，

第6節で多変数の有限極配置を述べる。

2. スペクトル分解[7]

始めに同次の中立型むだ時間系

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}A_{-i}\dot{x}(t-h_i)+\int_{-h}^{0}A_b(\theta)\dot{x}(t+\theta)d\theta+\sum_{i=1}^{N}A_i x(t-h_i)$$
$$+\int_{-h}^{0}A_{\#}(\theta)x(t+\theta)d\theta \qquad (2\cdot1)$$

$$x(\theta)=\phi(\theta) \qquad -h\le\theta\le 0$$

のスペクトル分解を考える。ただし，$x\in R^n$, $\phi(\cdot)\in C([-h,0],R^n)$，$A_{-i}, A_i\in R^{n\times n}$, $A_b(\cdot), A_{\#}(\cdot)\in L^\infty([-h,0],R^{n\times n})$, $0=h_0<h_1<\cdots<h_N=h$，Nは正の整数である。(2·1)式を簡単のため

$$\dot{x}(t)=\int_{-h}^{0}d\mu(\theta)\dot{x}(t+\theta)+\int_{-h}^{0}d\eta(\theta)x(t+\theta) \qquad (2\cdot2)$$

$\mu(\cdot)$, $\eta(\cdot)$ は $n\times n$ 有界変動関数行列

あるいは

$$\frac{d}{dt}Dx_t=Lx_t \qquad (2\cdot3)$$

と略記する。ただし，$x_t(\theta)=x(t+\theta)$，D, Lは $C([-h,0],R^n)\to R^n$ とする線形作用素である。(2·1)式は初期値関数 $\phi(\cdot)\in C([-h,0],R^n)$ に対し解$x(t)$をもち，その解軌道にそって$[-h,0]$上の関数 $x_t(\theta)\in C([-h,0],R^n)$ を $x_t(\theta)=x(t+\theta)$，解の生成作用素 $T(t)$ を $x_t(t)=T(t)\phi$ と定義する。また $T(t)$ の無限小生成作用素 A を

$$A\phi=\lim_{\Delta\to 0^+}\frac{1}{\Delta}\{T(\Delta)\phi-\phi\} \qquad (2\cdot4)$$

と定義すると次式が成立する。

$$A\phi = \begin{cases} \dfrac{d\phi(\theta)}{d\theta} & -h \le \theta < 0 \\ \int_{-h}^{0} d\mu(\theta)\dot{\phi}(\theta) + \int_{-h}^{0} d\eta(\theta)\phi(\theta) & \theta = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

$$D(A) = \{\phi \in \mathcal{C}([-h,0],R^n) \mid \dot{\phi} \in \mathcal{C}([-h,0],R^n),\ D\dot{\phi} = L\phi\}$$

ただし，$D(A)$ は A の定義域である。もし (2.1) 式の初期値関数 $\phi(\cdot)$ が $\phi(\cdot) \in D(A)$ であれば (2.1) 式は

$$\frac{d}{dt}x_t = Ax_t \tag{2.6}$$

で表すことができる。

無限小生成作用素 A に関して，$(A-\lambda I)\phi = 0$ をみたす $\lambda \in \mathbb{C}$（複素数）と非零の $\phi(\cdot) \in D(A)$ が存在するとき，λ を A の固有値，ϕ をその固有ベクトルと言う。固有値 λ の集合を（点）スペクトルと言い $\sigma(A)$ で表す。$\sigma(A)$ は次式で与えられる。

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det[\lambda(I - \int_{-h}^{0} d\mu(\theta)e^{\lambda\theta}) - \int_{-h}^{0} d\eta(\theta)e^{\lambda\theta}] = 0\} \tag{2.7}$$

固有値 $\lambda \in \sigma(A)$ に対する $(A-\lambda I)$ の零空間を $N(A-\lambda I) = \{\phi \in D(A) \mid (A-\lambda I)\phi = 0\}$，$N(A-\lambda I)^i$ $i=0,1,2,\cdots$ を含む最小部分空間を一般化固有空間と言い $N_\lambda(A)$ で表す。$\lambda \in \sigma(A)$ は有限の重複度をもつことが知られており，$N_\lambda(A) = N(A-\lambda I)^k$ をみたす正の整数 k が存在する。$(A-\lambda I)^k$ の値域を $R(A-\lambda I)^k = \{\psi \in \mathcal{C}([-h,0],R^n) \mid (A-\lambda I)^k \phi = \psi,\ \phi \in D(A)\}$ とすると，$\mathcal{C}([-h,0],R^n)$ は

$$\mathcal{C}([-h,0],R^n) = N(A-\lambda I)^k \oplus R(A-\lambda I)^k \tag{2.8}$$

に分解できる。$\oplus$ は直和を示す。

$\alpha(\cdot) \in \mathcal{C}([0,h],R^{1\times n})$ に対して A の随伴作用素 A^* を

$$A^*\alpha = \begin{cases} -\dfrac{d}{d\theta}\alpha(\theta) & 0 < \theta \leq h \\ \int_{-h}^{0}\dot{\alpha}(-\theta)d\mu(\theta) + \int_{-h}^{0}\alpha(-\theta)\,d\eta(\theta) & \theta = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$D(A^*) = \{\alpha \in \mathcal{C}([0,h], R^{1\times n}) \mid \dot{\alpha} \in \mathcal{C}([0,h], R^{1\times n}),\ -\dot{\alpha}(0) = \int_{-h}^{0}\dot{\alpha}(-\theta)\,d\mu(\theta) + \int_{-h}^{0}\alpha(-\theta)\,d\eta(\theta)\}$$

とする。A^*のスペクトルを$\sigma(A^*)$とおくと$\sigma(A^*) = \sigma(A)$が成立する。$\lambda \in \sigma(A^*)$に対し$\mathcal{C}([0,h], R^{1\times n})$は

$$\mathcal{C}([0,h], R^{1\times n}) = N(A^* - \lambda I)^k \oplus R(A^* - \lambda I)^k \tag{2.10}$$

に直和分解される。

ここで$\alpha(\cdot) \in \mathcal{C}([0,h], R^{1\times n})$, $\phi(\cdot) \in \mathcal{C}([-h,0], R^n)$に対し$(\alpha,\phi)$を

$$(\alpha,\phi) = \alpha(0)\phi(0) - \int_{-h}^{0}\Big[\frac{d}{d\xi}\int_{0}^{\xi}\alpha(\tau-\xi)\,d\mu(\theta)\,\phi(\tau)d\tau\Big]_{\xi=\theta} - \int_{-h}^{0}\int_{0}^{\theta}\alpha(\tau-\theta)\,d\eta(\theta)\,\phi(\tau)\,d\tau \tag{2.11}$$

と定義すると$\alpha(\cdot) \in N(A^* - \lambda I)^k$に対し

$$(\alpha,\phi) \begin{cases} \neq 0 & \phi(\cdot) \in N(A - \lambda I)^k \\ = 0 & \phi(\cdot) \in R(A - \lambda I)^k \end{cases} \tag{2.12}$$

が成立する。この性質を用いることによって(2.8)式の直和分解を実行することができる。すなわち，Aの固有値λに対する一般化固有空間$N(A-\lambda I)^k$の次数は$\lambda \in \sigma(A)$の重複度(有限)に一致する。それをdとすると$N(A-\lambda I)^k$は次の関係をみたす$\{\phi_\lambda^1 \cdots \phi_\lambda^d\}$を基底としてもつ。

$$\phi_\lambda^i(\theta) = \sum_{j=1}^{k} \nu_j \frac{\theta^{j-1}}{(j-1)!} e^{\lambda\theta} \qquad -h \leq \theta \leq 0 \tag{2.13}$$

ただし

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_k \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & P_2 \\ 0 & & & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{k-1} \\ \nu_k \end{bmatrix} = 0, \qquad P_{j+1} = \frac{1}{j!}\frac{d^j}{d\lambda^j}\left[\lambda\left(I - \int_{-h}^{0} d\mu(\theta) e^{\lambda\theta}\right) - \int_{-h}^{0} d\eta(\theta) e^{\lambda\theta}\right] \tag{2.14}$$

また，$N(A^*-\lambda I)^k$は次の関係をみたす$\{\bar{\psi}_\lambda^1, \cdots, \bar{\psi}_\lambda^d\}$を基底としてもつ。

$$\bar{\psi}_\lambda^i = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \frac{(-\theta)^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\lambda\theta}, \qquad 0 \le \theta \le h \tag{2.15}$$

ただし

$$[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k] \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_k \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & P_2 \\ 0 & & & P_1 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.16}$$

ここでΦ_λ, $\bar{\Psi}_\lambda$を

$$\Phi_\lambda = [\phi_\lambda^1 \cdots \phi_\lambda^d], \qquad \bar{\Psi}_\lambda = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_\lambda^1 \\ \vdots \\ \bar{\psi}_\lambda^d \end{bmatrix}$$

とおくと(2.12)式から$(\bar{\Psi}_\lambda, \Phi_\lambda)$は正則である。$\Psi_\lambda$を

$$\Psi_\lambda = (\bar{\Psi}_\lambda, \Phi_\lambda)^{-1} \bar{\Psi}_\lambda \tag{2.17}$$

とおくと，Ψ_λも$N(A^*-\lambda I)^k$の基底であり

$$(\Psi_\lambda, \Phi_\lambda) = I \tag{2.18}$$

をみたす。これらのことから(2.1)式の解x_tは

$$x_t = x_t^1 + x_t^2 \tag{2.19}$$

$$x_t^1 \in N(A-\lambda I)^k, \quad x_t^2 \in R(A-\lambda I)^k$$

に分解でき，$x_t^1 = \Phi_\lambda(\Psi_\lambda, x_t)$，$x_t^2 = x_t - x_t^1$である。

3. 部分極配置

(2.2)式に入力を加えた非同次中立型むだ時間系

$$\dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} d\mu(\theta)\dot{x}(t+\theta) + \int_{-h}^{0} d\eta(\theta) x(t+\theta) + Bu(t) \tag{3.1}$$

を考える。ただし，$u \in R^m$，$B \in R^{n\times m}$である。初期値関数$\phi(\cdot) \in D(A)$に対する解x_tは，解の生成作用素$T(t)$を用いて次式で表される。

$$x_t = T(t)\phi + \int_0^t T(t-\tau) X_0 B u(\tau) d\tau, \qquad X_0 = \begin{cases} 0 & -h \le \theta < 0 \\ I & \theta = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

前節のスペクトル分解を用いるとx_tは

$$x_t = x_t^1 + x_t^2, \qquad x_t^1 \in N(A-\lambda I)^k, \qquad x_t^2 \in R(A-\lambda I)^k \tag{3.3}$$

に分解できる。x_t^1は$x_t^1 = \Phi_\lambda \xi_\lambda(t)$，$\xi_\lambda(t) = (\Psi_\lambda, x_t)$である。ところで$N(A-\lambda I)^k$は$A$－不変なので$A\Phi_\lambda = \Phi_\lambda A_\lambda$（$A_\lambda$は固有値$\lambda$だけをもつ行列）が成立する。また，(2.4)式と上式から

$$\frac{d}{dt} T(t)\Phi_\lambda = T(t) A \Phi_\lambda = T(t)\Phi_\lambda A_\lambda \tag{3.4}$$

が成立し

$$T(t)\Phi_\lambda = T(0)\Phi_\lambda(\theta) e^{A_\lambda t} = \Phi_\lambda(\theta) e^{A_\lambda t} \tag{3.5}$$

が得られる。(2.12)，(2.18)，(3.5)式および$R(A-\lambda I)^k$は$T(t)$－不変という性質を用いると次式が成立する。

$$\begin{aligned}
\xi_\lambda(t) &= (\Psi_\lambda, x_t) \\
&= (\Psi_\lambda, T(t)\phi) + (\Psi_\lambda, \int_0^t T(t-\tau) X_0(\theta) B u(\tau) d\tau) \\
&= (\Psi_\lambda, T(t)\Phi_\lambda(\Psi_\lambda, \phi)) + (\Psi_\lambda, \int_0^t T(t-\tau)\Phi_\lambda(\Psi_\lambda, X_0(\theta) B u(\tau)) d\tau) \\
&= (\Psi_\lambda, \Phi_\lambda e^{A_\lambda t}(\Psi_\lambda, \phi)) + (\Psi_\lambda, \int_0^t \Phi_\lambda e^{A_\lambda(t-\tau)} \Psi_\lambda(0) B u(\tau) d\tau) \\
&= e^{A_\lambda t}\xi(0) + \int_0^t e^{A_\lambda(t-\tau)} \Psi_\lambda(0) B u(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.6)式をtで微分すると

$$\dot{\xi}(t) = A_\lambda \xi_\lambda(t) + \Psi_\lambda(0) B u(t) \tag{3.7}$$

が得られる。$(A_\lambda, \Psi_\lambda(0)B)$ が可制御のとき (3.1) 式の固有値 λ に対するモードは可制御であると言う。

[定理 3.1] (3.1) 式の固有値 λ に対するモードが可制御であるための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\left[\lambda\left(I-\int_{-h}^{0} d\mu(\theta)e^{\lambda\theta}\right)-\int_{-h}^{0} d\eta(\theta)e^{\lambda\theta},\ B\right]=n \tag{3.8}$$

が成立することである。

証明は文献 11) と同様にできる。[10] 詳細略。

(3.1) 式の固有値 λ に対するモードが可制御ならば，状態フィードバック

$$u(t)=F_\lambda \xi_\lambda(t)=F_\lambda(\Psi_\lambda, x_t) \tag{3.9}$$

により，固有値 λ を任意の値に移動できる。このとき他の固有値には影響を与えない。

上記のことは，さらに次のように拡張できる。$\lambda_1 \cdots \lambda_p \in \sigma(A)$ からなる部分集合を $\Lambda=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_p\}$，$P_\Lambda$, P_Λ^* を $P_\Lambda=N_{\lambda_1}(A)\oplus\cdots\oplus N_{\lambda_p}(A)$, $P_\Lambda^*=N_{\lambda_1}(A^*)\oplus\cdots\oplus N_{\lambda_p}(A^*)$ とする。P_Λ の基底を Φ_Λ, P_Λ^* の基底 Ψ_Λ を $(\Psi_\Lambda, \Phi_\Lambda)=I$ をみたすようにとると $\mathcal{C}([-h,0],R^n)$ は

$$\mathcal{C}([-h,0],R^n)=P_\Lambda\oplus Q_\Lambda \tag{3.10}$$

$$P_\Lambda=\{\phi\in\mathcal{C}([-h,0],R^n)\mid \phi=\Phi_\Lambda a,\ a\in\mathbb{C}^m\}$$

$$Q_\Lambda=\{\phi\in\mathcal{C}([-h,0],R^n)\mid (\Psi_\Lambda,\phi)=0\}$$

に分解される。これに伴い (3.1) 式の解 x_t も

$$x_t=x_t^1+x_t^2 \tag{3.11}$$

$$x_t^1 = \Phi_\Lambda \xi_\Lambda(t) = \Phi_\Lambda(\Psi_\Lambda^T, x_t) \in P_\Lambda, \quad x_t^2 = x_t - x_t^1 \in Q_\Lambda$$

に分解できる。P_Λ は A-不変なので $A\Phi_\Lambda = \Phi_\Lambda A_\Lambda$ （A_Λ は固有値として Λ のみをもつ定数行列）が成立する。Q_Λ は $T(t)$-不変なので，上記と同様にして解 x_t の P_Λ 上への射影 $\xi_\Lambda(t)$ は常微分方程式

$$\dot{\xi}_\Lambda(t) = A_\Lambda \xi_\Lambda(t) + \Psi_\Lambda^T(0) B u(t) \tag{3.12}$$

に支配される。定理3.1より

$$\mathrm{rank}\,[\lambda(I - \int_{-h}^{0} d\mu(\theta) e^{\lambda\theta}) - \int_{-h}^{0} d\eta(\theta) e^{\lambda\theta},\ B] = n, \quad \forall \lambda \in \Lambda \tag{3.13}$$

が成立するとき，そのときに限って $(A_\Lambda, \Psi_\Lambda^T(0)B)$ は可制御であり，状態フィードバック

$$\begin{aligned} u(t) &= F_\Lambda \xi_\Lambda(t) \\ &= F_\Lambda (\Psi_\Lambda^T, x_t) \\ &= F_\Lambda \{ \Psi_\Lambda^T(0) x(t) - \int_{-h}^{0} [\frac{d}{ds} \int_0^s \Psi_\Lambda^T(\tau - s) d\mu(\theta) x(t+\tau) d\tau]_{s=\theta} \\ &\qquad - \int_{-h}^{0} \int_0^\theta \Psi_\Lambda^T(\tau - \theta) d\eta(\theta) x(t+\tau) d\tau \} \end{aligned} \tag{3.14}$$

により，他の固有値はそのままに，固有値 Λ のみを"部分的"に任意の値に移動することができる。

4. 有限極配置

スペクトル分解にもとづく部分極配置は，無限個の極の中の任意の有限個の極だけを部分的に任意の値に移動する方法である。それを行うには，あらかじめそれらの極を求めなけ

ればならず，かなり大変である。これを避ける方法に有限極配置法がある[15)~23)]。有限極配置法は，閉ループの特性関数からむだ時間要素を消去し，n 個の極を任意の値に設定する方法である。n 個の極を任意の値に設定し，残りの極を s 平面左側無限遠点に追いやる制御と言える。したがって，すべての固有値のモードが可制御のとき，すなわちスペクトル可制御のときに可能な方法であり，閉ループの特性関数の係数さえわかれば実行できる方法である。現在，commensurate delay をもつ retarded type のむだ時間系に対しこのような有限極配置が可能なことがわかったので，以下，それについて述べる。

まず，制御対象として次の系を考える。

$$\dot{x}(t) = A(z)\,x(t) + b\,u(t) \tag{4.1}$$

ただし，$x \in R^n$，$u \in R$，$A(z) \in R^{n\times n}[z]$（その多項式上の $n\times n$ 行列），$b \in R^n$，z は移動演算子 $zx(t) = x(t-h)$，$h>0$ である。(4.1) 式に次の制御を考える。

$$u(t) = \sum_{i=0}^{N} F_i\, x(t-ih) + \int_{-Nh}^{0} \xi(\theta)\, x(t+\theta)\, d\theta \tag{4.2}$$

ただし，N は適当な正の整数，$F_i \in R^{1\times n}$，$\xi(\cdot) \in L_2([-Nh, 0], R^{1\times n})$ である。(4.1)，(4.2) 式がつくる閉ループ系の特性関数は次式で与えられる。

$$|sI - A(z) - bF(s,z)| = |sI - A(z)| - F(s,z)\,\mathrm{adj}\,(sI - A(z))\,b \tag{4.3}$$

ただし，この場合 z は $z = e^{-sh}$ で，

$$F(s,z)=\sum_{i=0}^{N}F_i z^i + \int_{-Nh}^{0}\xi(\theta)e^{s\theta}d\theta \tag{4.4}$$

である。(4.4)式右辺第2項は有限ラプラス変換になっていることに注目されたい。(4.3)式はさらに次のように展開される。

$$|sI-A(z)-bF(s,z)|$$
$$=s^n+\alpha_1(z)s^{n-1}+\cdots+\alpha_n(z)-F(s,z)M(z)v(s) \tag{4.5}$$

ただし

$$M(z)=[b,\ A(z)b,\cdots,A^{n-1}(z)b]\begin{bmatrix}\alpha_{n-1}(z) & \cdots & \alpha_1(z) & 1\\ \vdots & ⋰ & & \\ \alpha_1(z) & ⋰ & & \\ 1 & & & 0\end{bmatrix} \tag{4.6}$$

$$v(s)=\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{bmatrix} \tag{4.7}$$

である。もし，

$$K(s,z)M(z)v(s)=v(s) \tag{4.8}$$

をみたす $n\times n$ 行列

$$K(s,z)=\sum_{i=0}^{P}D_i z^i + \int_{-Ph}^{0}\eta(\theta)e^{s\theta}d\theta \tag{4.9}$$

$$D_i\in R^{n\times n},\quad \eta(\cdot)\in L_2([-Ph,0],R^{n\times n})$$

が存在すれば，任意の実数 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ に対し

$$F(s,z)=[\alpha_n(z)-\beta_n,\ \cdots,\ \alpha_1(z)-\beta_1]\,K(s,z) \tag{4.10}$$

とおくと (4.5)式から

$$|sI-A(z)-bF(s,z)|=s^n+\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_n \tag{4.11}$$

が得られる。閉ループ系の特性関数からむだ時間要素 z が消去され，n 個の極を任意の値に設定することができる。この制御を有限極配置と言う。

さて，(4.1) 式が有限極配置可能かどうかは (4.8) 式をみたす $K(s,z)$ が存在するかどうかにかかっている。(4.1) 式がスペクトル可制御，すなわち

$$\mathrm{rank}\,[\, sI - A(e^{-sh}),\ b\,] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C} \tag{4.12}$$

をみたすとき[19)20)]，そのときに限って[15)] (4.8) 式をみたす $K(s,z)$ が存在することが証明できる。その証明はかなり長くなるので，ここではその概略を示す。

(4.12) 式が成り立つとき

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{C}}[\, b,\ A(z)b,\ \cdots,\ A^{n-1}(z)b\,] = n \tag{4.13}$$

が成立する。(4.13) 式は有限個の $z \in \mathbb{C}$ 以外の任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し行列 $[b, A(z)b, \cdots, A^{n-1}(z)b]$ がフルランクをもつことを意味する。(4.6), (4.13) 式から $\mathrm{rank}_{\mathbb{C}} M(z) = n$ である。これより $M(z)$ に基本行変換を行い

$$T_1(z)M(z) = M_1(z) \tag{4.14}$$

$$M_1(z) = \begin{bmatrix} m_{11}(z) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ m_{n1}(z) & \cdots & m_{nn}(z) \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

にできる。ただし，$T_1(z)$ は基本行変換をまとめたユニモジュラ行列，$m_{ii}(z)$ は非零の z の多項式で，その次数は $m_{i+1\,i}(z)$ … $m_{ni}(z)$ の次数よりも高い。行列 $[b, A(z)b, \cdots, A^{n-1}(z)b]$ がユニモジュラのとき，$M_1(z) = I$ となるので，$K(s,z) = T_1(z)$ とおくと $K(s,z)\,M(z)\,v(s) = T_1(z)\,M(z)\,v(s) = M_1(z)\,v(s) = v(s)$ となり (4.8) 式を

みたすことができる。行列 $[b, A(z)b, \ldots, A^{n-1}(z)b]$ がユニモジュラでないとき，$M_1(z) \neq I$ となるので $M_1(z)v(s)$ から直接 $v(s)$ を生成することができない。この場合 $M_1(z)v(s)$ から $v(s)$ を生成するにはどうすればよいか，その答は適当な有限ラプラス変換上の行列 $R(s,z)$ を導入することである。すなわち $R(s,z)$ を $M_1(z)v(s)$ の左からかけ，$R(s,z)M_1(z)v(s) = M_3(z)v(s)$ をみたすその多項式上の行列 $M_3(z)$ が得られ，$K_1M_1(z) + K_2M_3(z) = I$ にできれば $[K_1 + K_2R(s,z)]M_1(z)v(s) = [K_1M_1(z) + K_2M_3(z)]v(s) = v(s)$ となり $v(s)$ を生成できる。例えば

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z = e^{-s}$$

を考えると

$$\mathrm{adj}\,(sI - A(z))b = M(z)v(s) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

である。$T_1(z) = I$ で

$$M_1(z) = M(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq I$$

である。有限ラプラス変換上の行列

$$R(s,z) = \left[\, 0 \qquad \frac{1-z}{s} \,\right]$$

を導入すると

$$R(s,z)M_1(z)v(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-z}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1-z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = M_3(z)v(s)$$

が得られる。K_1, K_2を

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とすると $K_1M_1(z) + K_2M_3(z) = I$ が成立する。これより

$$[K_1 + K_2R(s,z)]\,M_1(z)v(s)$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-z}{s} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix} = v(s)$$

が成立し有限極配置可能である。

このような有限ラプラス変換上の行列$R(s,z)$は一般的に次のようにして求められる[20]。

(i) $M_1(z)$の対角要素$m_{ii}(z)$の次数をp_iとすると$p_{i-1} - p_i \geq 0$が成立する。$p_{i-1} - p_i > 0$が$i = \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_l$でのみ成立するとし

$$\gamma_j = p_{\tau_j - 1} - p_{\tau_j} \qquad (j = 1, 2, \cdots, l) \qquad (4.16)$$

とおく。$M_1(z)$の第τ_i行にzをかけ，さらに基本行変換で第τ_i行，第$1 \cdots \tau_i - 1$列の要素の次数を対応する$M_1(z)$の列の次数より低くする。このようにして得られたτ_i行を$M_{2i1}(z)$とする。さらにτ_i行にzをかけ，基本行変換でτ_i行，第$1 \sim \tau_i - 1$列の要素の次数を，対応する$M_1(z)$の列の次数より低くする。このようにして得られたτ_i行を$M_{2i2}(z)$とする。これを繰返して$M_{2i3}(z) \cdots M_{2i\gamma_i - 1}(z)$を得る。これらを集めて

$$M_{2i}(z) = \begin{bmatrix} M_{2i1}(z) \\ \vdots \\ M_{2ir_i-1}(z) \end{bmatrix}, \quad M_2(z) = \begin{bmatrix} M_{21}(z) \\ \vdots \\ M_{2\ell}(z) \end{bmatrix}$$

とおく。これらの行変換をまとめたものを $T_2(z)$ とすると

$$T_2(z)\,M_1(z) = M_2(z) \tag{4.17}$$

が成立する。

(ii) 次式をみたす s の有理関数上の行列 $Q(s)$ を求める。

$$Q(s)\begin{bmatrix} M_1(z) \\ M_2(z) \end{bmatrix} v(s) = [\,I_{p_1} \quad 0\,]\,v(s) \tag{4.18}$$

ただし，I_{p_1} は $p_1 \times p_1$ 単位行列，また $Q(s)$ を

$$Q(s) = \begin{bmatrix} Q_1(s) \\ \vdots \\ Q_\ell(s) \end{bmatrix}, \quad Q_i(s) = \begin{bmatrix} Q_{i1}(s) \\ \vdots \\ Q_{ir_i}(s) \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

とおくと $Q_{ij}(s)$ の非零要素の分母の次数は分子の次数よりも少なくとも r_i-1 次高い。

(iii) $Q_{ij}(s)$ を用いて

$$R_{aij}(s) = \begin{bmatrix} Q_{ij}(s) \\ s\,Q_{ij}(s) \\ \vdots \\ s^{r_i-2}Q_{ij}(s) \end{bmatrix}, \quad R_{ai}(s) = \begin{bmatrix} R_{ai1}(s) \\ \vdots \\ R_{air_i}(s) \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$$R_a(s) = \begin{bmatrix} R_{a1}(s) \\ \vdots \\ R_{a\ell}(s) \end{bmatrix}$$

とおく。さらに $R_a(s) + R_b(s)e^{-sh}$ が有限ラプラス変換上の行列になるように $R_b(s)$ を選ぶ。すなわち，$R_a(s)$，$R_b(s)$ の (i,j)

要素を $a_{ij}(s)/b_{ij}(s)$, $c_{ij}(s)/d_{ij}(s)$ としたとき, $d_{ij}(s)=b_{ij}(s)$ にとり, $c_{ij}(s)$ を $d_{ij}(s)$ より1次低い多項式にとり, その係数を $b_{ij}(s)=0$ の単根 $s=s_0$ に対し

$$a_{ij}(s_0)+c_{ij}(s_0)e^{-s_0h}=0 \tag{4.21}$$

をみたすように, $b_{ij}(s)=0$ の重複度 p の根 $s=s_0$ に対し

$$\frac{d^k}{ds^k}\left[a_{ij}(s)+c_{ij}(s)e^{-sh}\right]_{s=s_0}=0 \qquad k=0,1,\cdots p-1 \tag{4.22}$$

をみたすように決める。$T_2(z)$, $R_a(s)$, $R_b(s)$ を用い

$$R(s,z)=\left(R_a(s)+R_b(s)z\right)\begin{bmatrix} I \\ T_2(z)\end{bmatrix} \tag{4.23}$$

とおいたものが求める有限ラプラス変換上の行列である。$R(s,z)$ の構造と有限ラプラス変換の性質から

$$R(s,z)M_1(z)v(s)=M_3(z)v(s) \tag{4.24}$$

をみたすその多項式上の行列 $M_3(z)$ が得られる。(4.1)式がスペクトル可制御のとき

$$K_1M_1(z)+K_2M_3(z)=I \tag{4.25}$$

をみたす実数上の行列 K_1, K_2 が存在する。[19)20)] したがって, (4.8)式をみたす $K(s,z)$ は

$$K(s,z)=\left(K_1+K_2R(s,z)\right)T_1(z) \tag{4.26}$$

で与えられ, (4.11)式をみたす $F(s,z)$ は

$$F(s,z)=\left[\alpha_m(z)-\beta_m,\cdots,\alpha_1(z)-\beta_1\right]K(s,z) \tag{4.27}$$

で与えられ, 有限極配置可能である。$u(s)=F(s,z)x(s)$ をラプラス逆変換したものが(4.2)式の形の制御則である。(4.2)式の

NはF(s,z)のその最大次数である。

この有限極配置は，入力にむだ時間を含む系，多入力系に拡張できる。[21) 23)]

5. あとがき

関数解析的手法にもとづくむだ時間系の制御について，最近得られた結果 ― 中立型むだ時間系の部分極配置とretarded型むだ時間系の有限極配置法について述べた。

謝辞

本研究集会での発表の機会を与えていただきました京都大学山本裕先生，荒木光彦先生始め諸先生に感謝いたします。

参考文献

1) A. S. Morse, Ring models for delay-differential systems, Automatica, 12, 529/531, 1976

2) E. Sontag, Linear systems over commutative rings, A survey, Ricerche di Automatica, 7, 1/34, 1976

3) 前田・山田，むだ時間を含む線形システムの安定化，計測自動制御学会論文集 11, 4, 444/450, 1975

4) E. W. Kamen, An operator theory of linear functional differential equations, J. Differential Equations, 27, 274/297, 1978

5) E. Emre, D. P. Hargonekar, Regulation of sprit linear systems over rings; coefficient assignment and observer, IEEE Trans. AC-27, 104/113, 1982

6) 山本，状態にむだ時間を含むシステムの制御II－代数的手法による設計法，システムと制御，28.5，299/308，1984

7) J Hale, Theory of Functional Differential Equations, New York, Springer-Verlag, 1977

8) Yu.S. Osipov, Stabilization of controlled systems with delays, Differentsial'nye Uravneniya, 1, 5, 605/618, 1965

9) L. Pandolfi, On feedback stabilization of functional differential equation, Bollotino, U.M.I. 4, 11, supplement of fascico 3, Giugno 1975, Serie IV, XI, 626/635

10) L. Pandolfi, Stabilization of Neutral functional differential equations, J. Opt. Theory. Appl. 20, 191/204, 1976.

11) K.P.M. Bhat, H.N. Koivo, Modal characterization of controllability and observability in time delay systems, IEEE. Trans. AC-21, 292/293, 1976.

12) D. Salamon, Observer and duality between observation and state feedback for time delay systems, IEEE. Trans. AC-25, 6, 1187/1192, 1980.

13) D. Salamon, Control and Observation of Neutral Systems, Research Note in Mathematics, VOL. 91, Pitman, 1984

14) A. Manitius and R. Triggiani, Function space controllability of linear retarded systems: A derivation from abstract operator conditions, SIAM. J. Contr. Optimiz. 16, 599/643, 1978

15) A. Manitius and A.W. Olbrot, Finite spectrum assignment problem for systems with delays, IEEE. Trans. AC-24, 4, 591/553 1979

16) A. Manitius and V. Manousiouthakis, On spectral controllability of multi-input time-delay systems.

17) K. Watanabe, M. Ito, M. Kaneko and T. Ouchi, Finite spectrum assignment problem for systems with delay in state variables, IEEE. Trans. AC-28, 4, 506/508, 1983

18) K. Watanabe, M. Ito and M. Kaneko, Finite spectrum assignment problem for systems with multiple commensurate delays in state variables, Int. J. Control, 38, 5, 913/926, 1983

19) K. Watanabe and M. Ito, A necessary condition for spectral controllability of delay systems on the basis of finite Laplace transforms, Int. J. Control, 39, 2, 363/374, 1984

20) K. Watanabe, Further study of spectral controllability of systems with multiple commensurate delays in state variables, Int. J. Control, 39, 3, 497/505, 1984

21) K. Watanabe, M. Ito and M. Kaneko, Finite spectrum assignment problem of systems with multiple commensurate delays in state and control, Int. J. Control, 39, 5, 1073/1082, 1984

22) K. Watanabe and T. Ouchi, An observer of systems with delays in state variables, Int. J. Control, 41, 1, 217/229, 1985

23) K. Watanabe, Finite spectrum assignment and observer of multivariable systems with commensurate delays, submitted