

Non-harmonic Fourier series とその応用

東大・理 鈴木 貴

§1. Introduction

Non-harmonic Fourier series とは? Non-harmonic Fourier series とは

$\omega_{-n} = -\omega_n (n \in \mathbb{Z})$ なる相異なる実数列 $\{\omega_n | n \in \mathbb{Z}\}$ に対して
 複素数 $J_n (n \in \mathbb{Z})$ を係数として

$$(1) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n e^{-i\omega_n t} \quad (-T \leq t \leq T)$$

と表わされるものじあって、Harmonic Fourier series : $\omega_n = n\pi$
 を一般化したものじある。評価

$$(2) \quad \|f\|_{L^2(-T, T)}^2 \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} |J_n|^2$$

が成り立つかどうか、又 $(J_n) \in \ell^2$ を動かすことによつて f
 が $L^2(-T, T)$ を張るかどうか、即ち $\{e^{-i\omega_n t} | n \in \mathbb{Z}\}$ が
 $L^2(-T, T)$ の Riesz basis になるかどうかという問題は、 ω_n の
 $n \rightarrow \infty$ における漸近挙動と、 $T > 0$ の大きさとの関係してあり、
 古くより調べられてきた。(Palay-Weiner [6], Levinson [3], Schwartz
 [9], Young [15]) この問題の困難さは、一般に $\{e^{-i\omega_n t} | n \in \mathbb{Z}\}$
 が $L^2(-T, T)$ において直交性を持たない所であり、現在までに
 例えは次のような事実が知られている。

1. E. Ingham (1936 [1]): $P = (\text{gap}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_{n+1} - \omega_n) > \frac{\pi}{T}$.

\Rightarrow 評価 $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{J}_n|^2 \lesssim \|f\|_{L^2(-T, T)}^2$ が成り立つ。

2. R. M. Redheffer (1950 [7]): $\overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x+y) - \Lambda(x)}{y} < \frac{1}{\pi}$.

$\Lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{w_n \mid w_n < x\} \Rightarrow \{e^{-i w_n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $L^2(-T, T)$ を張らない。

3. M. I. Kadec (1964. [2]): $\exists D = \text{density} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{w_n} = 1/P$.

$\sup_n |w_n - \frac{\pi}{D}| < \frac{1}{4D} \Rightarrow T = \pi D$ に対し, $\|f\|_{L^2(-T, T)}^2 \approx \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{J}_n|^2$.

これは Dirichlet series に対する Müntz-Szász の定理に対応する結果と考えられる。但し次の点が注目される:

a) $\{w_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ を固定するとき, T が大きい時は関数系 $\{e^{-i w_n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $L^2(-T, T)$ の Riesz basis になるためには相対的に数が不足することになる。しかし, 一次独立性は保証され, 評価 (2) が成立する。

b) これに反し, T が小さい時は $\{e^{-i w_n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は相対的に数が多く, $L^2(-T, T)$ を張るけれども一次独立性がこたれ, 評価 (2) が成り立たなくなる。

c) 両者の境目は, $T = \pi D$ である。

このことは, 双曲型方程式の有限展開性の性質を想起させるかもしれない。

Russell の仕事. 実際, 1967年に D. L. Russell は w_n が Sturm-Liouville

作用素の固有値 λ_n の平方根である場合に、上の問題を完全に解決して双曲型方程式の可制御性 (exact controllability) の研究に応じた ([8])。また、いま Sturm-Liouville 作用素の区間の長さを l とする時、 $\omega_n = \lambda_n^{1/2}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) の $n \rightarrow \infty$ における挙動は、次の 3 つの場合に分かれる。

a. 両端で Dirichlet 条件を与える時、

$$\omega_n = \lambda_n^{1/2} = (n+1)\pi/l + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

b. 片側の端点で Dirichlet、反対側で第 3 種条件を与える時、

$$\omega_n = \lambda_n^{1/2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi/l + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

c. 両端で第 3 種条件を与える時、

$$\omega_n = \lambda_n^{1/2} = n\pi/l + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

これらに対する Russell の解答は次の様である。

1. $T > l$ の時、いずれの場合も評価 (1) が成り立つ。しかし

$\{e^{-i\omega_n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $L^2(-T, T)$ を張らない。

2. $T < l$ の時、いずれの場合も評価 (1) は成り立たない。しかし

$\{e^{-i\omega_n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $L^2(-T, T)$ を張る。

3. $T = l$ の時

a の場合、 $\{e^{-i\omega_n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ に適当な関数を 1 つだけ加えると、

$L^2(-T, T)$ の Riesz basis になる。

b の場合、 $\{e^{-i\omega_n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $L^2(-T, T)$ の Riesz basis である。

c の場合、 $\{e^{-i\omega_n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ の適当な関数を 1 つ取り除いたも

のは $L^2(-T, T)$ の Riesz basis になる。

Russell の研究した制御問題は次のようなものである。

ρ, p を正値で滑らかな関数. $X = L^2(0, 1)$

$$V = \begin{cases} H_0^1(0, 1) & (\text{a の場合}) \\ H^1(0, 1) \equiv \{a \in H^1(0, 1) \mid a|_{x=1} = 0\} & (\text{b } \nu = 1 \text{ の Dirichlet } a \text{ 時}) \\ H^1(0, 1) & (\text{c の場合}) \end{cases}$$

に対し, 双曲型方程式

$$(3) \begin{cases} \rho(x) \partial_t^2 u - \partial_x (p(x) \partial_x u) = g(x) f(t) \quad (0 \leq t < \infty, 0 \leq x \leq 1) \\ \text{奇次境界条件 (Dirichlet 又は Neumann)} \\ u|_{t=0} = a_0 \in V, \quad \partial_t u|_{t=0} = a_1 \in X \end{cases}$$

を考える。 $\hat{V} \subset V, \hat{X} \subset X$ を固定するとき, 与えられた $T > 0$, $g(x)$ に対して, 任意の $(a_0, a_1) \in \hat{V} \times \hat{X}$ を $u|_{t=T} = 0, \partial_t u|_{t=T} = 0$ とするならば制御関数 $f = f(t) \in L^2(0, T)$ が存在する。

5日では良く知られているように, この問題はある Moment 問題に書き換えられ, それは Banach の原理 (Yosida [13]) によって評価 (2) が成り立つかどうか帰着される。実際, Russell は ρ に対するある仮定の下で, $T_0 > 0$ が存在し,

1. $T > T_0 \Rightarrow$ そのような $f = f(t)$ が存在する。
2. $T < T_0 \Rightarrow$ " " は存在しない。
3. $T = T_0 \Rightarrow$ 境界条件による

ことを示している。

辻岡邦夫氏等の問題提起. (3) を抽象的に

$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} + Bf$ と書くとき, $a_0 \in \hat{V}$, $a_1 \in \hat{X}$ は $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \in D(A)$ を意味する。辻岡邦夫氏は, $a \in D(A)$ であっても Russell の f のとり方, g に対する仮定から $\begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix} \in D(A)$ ($t > 0$) になっ
てしまうことを指摘している。Russell の考えた \hat{V} , \hat{X} のとり
方は不自然であり, $f = f(t) \in L^2(0, T)$ のままに $\hat{V} = V$, $\hat{X} = X$ とす
ることはできない, であろうか。[12] によると exact な意味では
難かしい様である。

又, Russell の仕事と関連して 成川公昭氏は [5] の Bang-Bang
制御による可制御性の研究において $a \in D(A^2)$ のとき $f = f(t) \in H^1(0, T)$ による Russell と同様の問題を考えている。

新たな問題 次のような問題を考えよう。 β を実数として,

$$\ell^{2,\beta} = \left\{ (j_n) \mid \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)^\beta |j_n|^2 < \infty \right\} \text{ とおとき,}$$

$$\|f\|_{H_f^\beta(-T, T)}^2 \approx \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)^\beta |j_n|^2 \equiv \|(j_n)\|_{\ell^{2,\beta}}^2$$

成り立っているか。又 $(j_n) \in \ell^{2,\beta}$ を動かすことにより
 f は $H_f^\beta(-T, T)$ を張るであろうか。(この成り立っている時, 以下
 $\{e^{-i\omega_n t} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $\ell^{2,\beta}$ を係数として $H_f^\beta(-T, T)$ の Riesz basis とな
るといふ。)

筆者は [10] において, ω_n を Russell と同様のものとする時, $T \geq 0$, $\beta \geq 1 \Rightarrow \|(j_n)\|_{\ell^{2,\beta}} \approx \|f\|_{H_f^\beta(-T, T)}$ を示して,

双曲型方程式のある逆問題の^(安定性の)研究に応用した。([11] も参照
 せよ。) 上の問題は $\beta=0$ に対しては Russell の考えた
 ものであり, $\beta=-1$ に対しては, Nomikawa [5] と対応するも
 のである。 β が負の場合も含めて一般的な結果を得ておくこ
 とは, 様々な応用の上から重要なことと考えられる。 実際
 以下で見えるように, β を導入すると微妙で興味深い現象が現
 われるからである。

この研究は成川公昭氏 (鳴門教育大) との共同研究である
 が, 残念ながら最終的な結果には到っていない。 筆者の [11]
 に続く中間的な報告であることをご断りする。 我々の研究は
 双曲型方程式の有限伝達性に着目したもので, 複素関数論や
 Fourier 解析による従来のものとは異なる方法を用いる。 この
 論稿はその方向をくみとっていただければ幸である。

§2. Summary.

$p \in C^0[0, 1]$, $R \in \mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}$ に対し, $A = A_p, R, H$ を Sturm-Liouville 作用素

$$-\frac{d^2}{dx^2} + p(x) \text{ in } L^2(0, 1) \text{ with } (-\frac{d}{dx} + R) \cdot |_{x=0} = (\frac{d}{dx} + H) \cdot |_{x=1} = 0,$$

$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, $-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots \rightarrow \infty$ とその固有値

$\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\|g_n\|_{L^2(0, 1)} = 1$, $g_n(0) > 0$ とその固有関数とする。

漸近挙動

$$(4) \quad w_n \equiv \lambda_n^{1/2} = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が知られている。(Yosida [14]) 特に $\alpha \geq 0, \lambda > -\lambda_0$ に対し.

$$D((A+\lambda)^{\frac{\alpha}{2}}) = \{a \in L^2(0,1) \mid \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)^{\alpha} |(a, g_n)|^2 < \infty\}$$

が成り立つ。ここで $(,)$ は $L^2(0,1)$ の内積である。

$$\beta \in \mathbb{R} \text{ に対し, } \underline{X}_{\beta} = L^{2,\beta} \times L^{2,\beta}, \text{ 即ち}$$

$$J = (J^0, J^1) \in X_{\beta} \iff \|J\|_{X_{\beta}}^2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)^{\beta} \{|J_n^0|^2 + |J_n^1|^2\} < \infty$$

と置く。 $N=1, 2, \dots$ に対し.

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N \{J_n^0 \cos \omega_n x + J_n^1 \sin \omega_n x\} \quad \text{と置く。}$$

但し、応用の便利のために、 $\omega_n=0$ の時は $\sin \omega_n x$ は関数を表わすものと約束する。 ω_n は有限個を除き実数である。

$\dot{Y}_{\beta} = H_{+}^{\beta}(-T, T)$ と置く。又簡単のため $\beta = \beta(x)$ は十分滑らかであるとす。現在まで次のことか、 $\beta \geq 1, \beta \neq \frac{1}{2} + \text{integer}$ に対して得られている。

定理 1. $J \in X_{\beta}$ のとき f_N は \dot{Y}_{β} において収束する。

極限 $f = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N \in \Phi(J)$ と書き、non-harmonic Fourier series と呼ぶ。

$$\text{ii. } \underline{Y}_{\beta} = \Phi(X_{\beta}) \subset \dot{Y}_{\beta} \quad \text{と置く。}$$

定理 2. $T < 1$ の時、 $\underline{Y}_{\beta} = \dot{Y}_{\beta} \quad (1 \leq \beta < 3/2)$
 $\subsetneq \dot{Y}_{\beta} \quad (3/2 < \beta)$ である。

$\|\Phi(J)\|_{\underline{Y}_{\beta}} \lesssim \|J\|_{X_{\beta}}$ が成り立つ。但し Φ は 1対1ではない。

定理3. $T > 1$ の時. $\Upsilon_\beta \subset \dot{\Upsilon}_\beta$ であるが, $\Phi: X_\beta \rightarrow \Upsilon_\beta$ は同型写像. 即ち評価 $\|f\|_{H_\beta^0(-T, T)}^2 \approx \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)^\beta (|\delta_n^0|^2 + |J_n^1|^2)$ が成り立つ。

定理4. $T=1$ の時. $\Phi: X_\beta \rightarrow \Upsilon_\beta$ は同型写像であり.
 $\Upsilon_\beta = \dot{\Upsilon}_\beta$ ($1 \leq \beta < 3/2$) が成り立つ。
 $\Upsilon_\beta \subset \dot{\Upsilon}_\beta$ ($3/2 < \beta$)

定理5. 一般に $0 < \alpha - \beta < 1/2$ の時, $\Upsilon_\beta \wedge H_\beta^\alpha(-T, T) = \Upsilon_\alpha$ が成り立つ。

$\beta=0$ の時は. 前述の Russell の結果より Φ は同型写像ではない ($T=1$ の時) ことに注意しておく. この点については後の節で述べる。

以下簡単に証明の荒筋を説明したい。

1°. $\lambda > -\lambda_1$ に対して, $\underline{\Sigma}_\beta = \mathcal{D}((A+\lambda)^{\frac{\beta}{2}}) \times \mathcal{D}((A+\lambda)^{\frac{\beta-1}{2}})$ ($\beta \geq 1$) とおく。 (4) より $0 < \inf_n |g_n(0)| \leq \sup_n |g_n(0)| < \infty$, $w_n = n\lambda + O(\frac{1}{n})$ ($n \rightarrow \infty$) なること. 及び $\{g_n | n \geq 0\}$ が $L^2(0, 1)$ で連続なることより.

$$\mathcal{J}: \mathcal{J} = (\mathcal{J}^0, \mathcal{J}^1) \in X_\beta \longmapsto a = (a_0, a_1) \in \underline{\Sigma}_\beta.$$

$$a_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 g_n, \quad a_n^0 = \mathcal{J}_n^0 / g_n(0)$$

$$a_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^1 g_n, \quad a_n^1 = \hat{w}_n \cdot \mathcal{J}_n^1 / g_n(0) \quad (\hat{w}_n = \begin{cases} w_n & (w_n \neq 0) \\ 1 & (w_n = 0) \end{cases})$$

は同型写像になる。

2°. $\omega_n = 0$ の時, $\sin \omega_n t / \omega_n$ は関数 t を表わすことにして.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_n \cos \omega_n t + a_n' \sin \omega_n t / \omega_n \} \varphi_n(x) \quad \text{と } a' < 0. \quad u \text{ は}$$

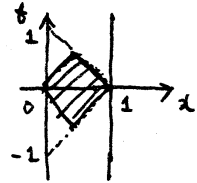
双曲型方程式
$$\begin{cases} \partial_t^2 u + (-\partial_x^2 + p(x)) u = 0 \\ (-\partial_x + h) u|_{x=0} = (\partial_x + H) u|_{x=1} = 0 \\ u|_{t=0} = a_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = a_1 \end{cases}$$

の解であり, 形式的に $u|_{x=0} = f(t) (= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, t))$ なる関係がある. この写像が $f = \mathfrak{R}(\mathfrak{J})$ と表わされるものである.

3°. 最も基本的な $T=1$ の場合を考えよう. $\beta \geq 1, \beta \neq \frac{1}{2} + \text{integer}$, $\rho \geq 1$ の滑らかなとする.

$\hat{\Sigma}_\beta = H_x^\beta(0, 1) \times H_x^{\beta-1}(0, 1) \quad (\beta \geq 1)$ と $a' < 0$, $\hat{\Sigma}_\beta > \Sigma_\beta$ である. $(a_0, a_1) \in \hat{\Sigma}_\beta$ に対し, d'Alembert の公式 (即ち特性曲線の方法) \times Picard による反復法によつて,

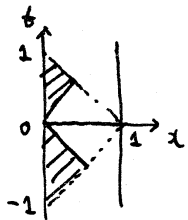
$$\begin{cases} \partial_t^2 u + (-\partial_x^2 + p(x)) u = 0 \\ u|_{t=0} = a_0(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = a_1(x) \end{cases}$$



なる $u = u(x, t)$ が図の斜線部において Volterra 型積分方程式の解として構成できる. (波動方程式の Cauchy 問題) 次に

$g_\pm = u|_{t=\pm x} \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$ と $a' < 0$ とし, 同じ方法によつて

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^\pm + (-\partial_x^2 + p(x)) u^\pm = 0 \\ (-\partial_x + h) u^\pm|_{x=0} = 0, \quad u^\pm|_{t=\pm x} = g_\pm \end{cases}$$



なる $u^\pm = u^\pm(x, t)$ が, 図の斜線の上部, 下部

それぞれにおいて構成できる. そこで,

$$f_{\pm} = u^{\pm}|_{x=0}, \quad f = f_+ \oplus f_- \quad \text{とおく。}$$

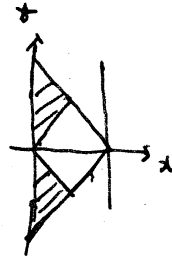
$$f \in \hat{Y}_{\beta} \equiv H_{\beta}^{\beta}(0,1) \oplus H_{\beta}^{\beta}(-1,0) \cap \{f_+|_{x=0} = f_-|_{x=0}\} \quad (\beta \geq 1)$$

となることかわかる。

これにより、有界写像 $\hat{F}: a \in \hat{Z}_{\beta} \mapsto f \in \hat{Y}_{\beta}$ が構成されたが、実はこの \hat{F} は同型写像になる。それを見るのには、有用な逆写像 \hat{G} を構成すればよい。実際、

$$f = f_+ \oplus f_- \in \hat{Y}_{\beta} \text{ に対し、}$$

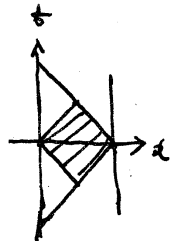
$$\begin{cases} \partial_x^2 u^{\pm} + (-\partial_x^2 + p(x)) u^{\pm} = 0 \\ u^{\pm}|_{x=0} = 0, \quad \partial_x u^{\pm}|_{x=0} = f_{\pm} \end{cases}$$



なる $u^{\pm} = u^{\pm}(x, \beta)$ を図の斜線部において前と同様に構成し、次に

$g_{\pm} = u^{\pm}|_{x=\pm 1}$ に対して、

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + (-\partial_x^2 + p(x)) u = 0 \\ u|_{x=\pm 1} = g_{\pm} \end{cases}$$



なる $u = u(x, \beta)$ を

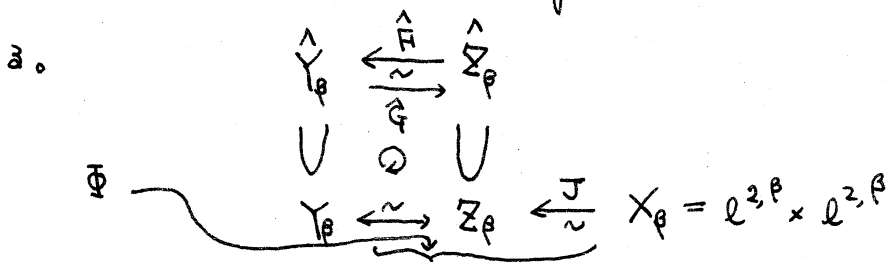
図の斜線部において同様に構成した後、

$$a_0 = u|_{x=0}, \quad a_1 = \partial_x u|_{x=0} \quad \text{とすれば、}$$

有界写像 $\hat{G}: f \in \hat{Y}_{\beta} \mapsto a = (a_0, a_1) \in \hat{X}_{\beta}$ が得られ、関係

$$\hat{G} \circ \hat{F} = \text{id}, \quad \hat{F} \circ \hat{G} = \text{id} \text{ が成り立つこと確かめられる。}$$

以上のことを、下の diagram のまゝに表わすことができる。



$Y_\beta = \hat{H}(\Sigma_\beta)$ とおけば, 上の diagram より $X_\beta \cong Y_\beta$ となる. この同型写像が non-harmonic Fourier series を与える写像 Φ に他ならない.

±°. $Y_\beta \times \dot{Y}_\beta = H_x^\beta(-1, 1)$ の関係をみるのには $f = \hat{H}(a)$ の f_+, f_- の $x=0$ における指数 $[\beta - 1/2]$ までのつながり具合を見ればよい. とこの写像 \hat{H} の γ がわかる. これは $a = (a_0, a_1)$ の左端点 $x=0$ における指数 $[\beta - 1/2] \times [\beta - 1/2]$ までの作用素 $A = A_{p, R, H}$ に関する適合性の条件 (境界条件) で置き換えられることが知られている. $\hat{\Sigma}_\beta$ の部分空間でそのような条件をみたすもの全体を $\dot{\Sigma}_\beta$ とおくと, $\dot{\Sigma}_\beta \supset \Sigma_\beta$ であり, 再び diagram

$$\begin{array}{ccc} \dot{Y}_\beta & \xleftrightarrow{\sim} & \dot{\Sigma}_\beta \\ \cup & & \cup \\ Y_\beta & \xleftrightarrow{\sim} & \Sigma_\beta \xleftrightarrow{\sim} X_\beta = \mathcal{L}^{3, \beta} \times \mathcal{L}^{3, \beta} \end{array} \quad \text{を得られ, } Y_\beta \subset \dot{Y}_\beta \text{ が}$$

わかる.

更に $\text{codim}(Y_\beta; \dot{Y}_\beta) = \text{codim}(\Sigma_\beta; \dot{\Sigma}_\beta)$ であり, 後者は積型作用素の分数中の定義域の特徴付け (Stone-Magenes [4] etc.) によって完全に押さえることができる. 即ち, Σ_β には右端点 $x=1$ における指数 $[\beta - 1/2] \times [\beta - 1/2]$ までの境界条件が involve されてくる. これによって特に定理 4 の証明ができる.

53. Harmonic の場合.

以上の節書を実行するときには、双曲型方程式の解、そのある線分への制限に関する修正則性、involve されてくる境界条件の意味等を暗味しなげなければならない。βが負になる場合も含めて $P=0, A=0, H=0$ の場合について、具体的な計算を示してみたい。

この場合、 $\omega_n = n\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$) であり、関数系 $S \equiv \{ \cos n\pi x, \sin m\pi x, t \mid n \geq 0, m \geq 1 \}$ を $L^{2,p}$ を係数として $H_{\beta}^p(-1, 1)$ の Riesz basis になるかどうかを調べることになる。

写像 \hat{A} の表示:

$$1^\circ \quad a = (a_0, a_1) \text{ に對し, } \begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \\ u|_{t=0} = a_0(x), \quad \partial_x u|_{t=0} = a_1(x) \end{cases} \quad \text{なる } u = u(x, t)$$

$$\text{は, } u(x, t) = \frac{1}{2} \{ a_0(x+t) + a_0(x-t) \} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a_1(s) ds \quad \text{である。}$$

$$2^\circ \quad g_+(x) = u|_{t=x} \\ = \frac{1}{2} \{ a_0(2x) + a_0(0) \} + \frac{1}{2} \int_0^{2x} a_1(s) ds \quad \text{である。}$$

$$\begin{cases} \partial_t^2 u^+ - \partial_x^2 u^+ = 0 \\ u^+|_{t=x} = g_+, \quad \partial_x u^+|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad \text{なる } u^+ = u^+(x, t) \text{ は}$$

$$u^+(x, t) = g_+\left(\frac{x+t}{2}\right) + g_+\left(\frac{t-x}{2}\right) - g_+(0) \\ = \frac{1}{2} \{ a_0\left(\frac{t+x}{2}\right) + a_0\left(\frac{t-x}{2}\right) \} + \frac{1}{2} \left(\int_0^{t+x} + \int_0^{t-x} \right) a_1(s) ds \quad \text{である。}$$

$$\text{従って } f_+(t) = u^+|_{x=0} = a_0\left(\frac{t}{2}\right) + \int_0^t a_1(s) ds \quad (0 \leq t \leq 1) \text{ となる。}$$

3° 同様に、

$$g_-(x) = u|_{t=-x} = \frac{1}{2} \{ a_0(0) + a_0(2x) \} + \frac{1}{2} \int_{2x}^0 a_1(s) ds \quad \text{である。}$$

$$u^-(x, t) = g_-\left(\frac{x-t}{2}\right) + g_-\left(\frac{x+t}{2}\right) - g_-(0)$$

$$= \frac{1}{2} \{a_0(x-t) + a_0(-(x+t))\} + \frac{1}{2} \left(\int_{x-t}^0 + \int_{-(x+t)}^0 \right) a_1(s) ds$$

と与えられた。従って、 $f_-(t) = a_0(-t) + \int_{-t}^0 a_1(s) ds$ ($-1 \leq t \leq 0$) である。

写像 \hat{G} の表示 :

$$d_t^2 u^\pm - d_x^2 u^\pm = 0$$

1° $f = f_+ \oplus f_-$ に対し、 $\left\{ \begin{array}{l} u^\pm|_{x=0} = f_\pm, \quad d_x u^\pm|_{x=0} = 0 \end{array} \right.$ なる $u^\pm = u^\pm(x, t)$

は、 $u^\pm(x, t) = \frac{1}{2} \{f_\pm(t+x) + f_\pm(t-x)\}$ と与えられた。

2° 従って、 $g_+(x) = u^+|_{t=x} = \frac{1}{2} \{f_+(2x) + f_+(0)\}$

$$g_-(x) = u^-|_{t=-x} = \frac{1}{2} \{f_-(0) + f_-(-2x)\} \quad \text{である。}$$

$$\begin{cases} d_t^2 u - d_x^2 u = 0 \\ u|_{t=\pm 1} = g_\pm \end{cases}$$

なる $u = u(x, t)$ は、 ~~$u(x, t) =$~~

$$u(x, t) = g_+\left(\frac{x+t}{2}\right) + g_-\left(\frac{x-t}{2}\right) - c \quad (c = g_+(0) = f_+(0) = g_-(0) = f_-(0))$$

$$= \frac{1}{2} \{f(t+x) + f(t-x)\}$$

$$\text{(但し、 } f(s) = \begin{cases} f_+(s) & (0 \leq s \leq 1) \\ f_-(s) & (-1 \leq s \leq 0) \end{cases})$$

と与えられた。

3° 従って、 $a_0(x) = u|_{t=0} = \frac{1}{2} \{f_+(x) + f_-(x)\}$,

$$a_1(x) = d_t u|_{t=0} = \frac{1}{2} \{f'_+(x) + f'_-(x)\} \quad \text{である。}$$

$\beta \geq 1, \beta \neq 1/2 + \text{integer}$ の時. $\hat{\Sigma}_\beta = H_x^\beta(0,1) \times H_x^{\beta-1}(0,1), \quad \hat{\Upsilon}_\beta = H_f^\beta(0,1) \oplus H_f^\beta(-1,0)$
 $\cap \{f|_{t=0} = f|_{t=0}\}$

とすると、確かに $\hat{\Upsilon}_\beta \xrightleftharpoons[\hat{G}]{\hat{H}} \hat{\Sigma}_\beta$ は同型写像になっている。
 $\hat{\Upsilon}_\beta = H_f^\beta(-1,1)$ に対応する $\hat{\Sigma}_\beta$ の部分空間として、 $A = A_{0,0,0}$ の

$x=0$ における境界条件を $[\beta-\frac{1}{2}] \times [\beta-\frac{3}{2}]$ までみたすもの。即ち

$$\dot{\Sigma}_\beta = \dot{H}_x^\beta(0,1) \times \dot{H}_x^{\beta-1}(0,1), \quad \text{但し } d \geq 0, \text{ ~~かつ~~ } d+\frac{1}{2} \text{ integer に対し,}$$

$$\dot{H}_x^d(0,1) = \{a \in H_x^d(0,1) \mid \partial_x^l a|_{x=0} = 0, \text{ } l \text{ は } [d-\frac{1}{2}] \text{ 以下の奇数}\}$$

を得る。 $\dot{Y}_\beta \leftrightarrow \dot{\Sigma}_\beta$ なる同型を得る。一方において

$$\Sigma_\beta = D((A+\lambda)^{\frac{\beta}{2}}) \times D((A+\lambda)^{\frac{\beta-1}{2}}) = \dot{H}_x^\beta(0,1) \times \dot{H}_x^{\beta-1}(0,1), \quad \text{但し,}$$

$$\dot{H}_x^d(0,1) = \{a \in H_x^d(0,1) \mid \partial_x^l a|_{x=0} = \partial_x^l a|_{x=1} = 0, \text{ } l \text{ は } [d-\frac{1}{2}] \text{ 以下の奇数}\}$$

ならば,

$$\dot{\Sigma}_\beta \supset \Sigma_\beta, \quad \text{codim}(\Sigma_\beta; \dot{\Sigma}_\beta) = \text{codim}(Y_\beta; \dot{Y}_\beta) = [\beta-\frac{1}{2}] \text{ となる。}$$

$1 \geq \beta > \frac{1}{2}$ の時。Paley の定理によつて $L^2(0,1)^* \cong L^2(0,1)$ と同一視し,

$$\hat{\Sigma}_\beta = H_x^\beta(0,1) \times (H_x^{-(\beta-1)}(0,1))^*, \quad \hat{\Sigma}_\beta = D((A+\lambda)^{\frac{\beta}{2}}) \times D((A+\lambda)^{\frac{\beta-1}{2}})^* \text{ と表す。}$$

J によつて $X_\beta = \mathcal{L}^{2,\beta} \times \mathcal{L}^{2,\beta} \cong \hat{\Sigma}_\beta$ である。 $X(s) = X_{[0,t]}(s)$ と

$[0,t]$ の定義関数とするととき, $X \in V = H_x^{-(\beta-1)}(0,1)$ であるから,

$a_1 \in V^*$ に対し,

$$\int_0^t a_1(s) ds = \langle X_{[0,t]}, a_1 \rangle_{V^*} \text{ とおこなふことができる。}$$

\hat{H} をこのように解釈すれば, $\hat{Y}_\beta \xleftrightarrow[\hat{H}]{\hat{\Sigma}_\beta}$ は同型写像である。

$\beta \geq 1$ と同様にして, $\dot{Y}_\beta = H_x^\beta(-1,1) = \hat{Y}_\beta$ $(\hat{Y}_\beta = H_x^\beta(0,1) \oplus H_x^{\beta-1}(-1,0) \cap \{f_1|_{t=0} = f_1|_{t=1} = 0\})$

$$\dot{\Sigma}_\beta = \hat{\Sigma}_\beta \text{ に対し,}$$

$$\text{codim}(Y_\beta; \dot{Y}_\beta) = \text{codim}(\Sigma_\beta; \dot{\Sigma}_\beta) = 0. \quad \text{即ち } Y_\beta = \dot{Y}_\beta \text{ と等しい}$$

とすることができる。

$0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ の時. 前と同様に $\Sigma_\beta = D((A+\lambda)^{\frac{\beta}{2}}) \times (D((A+\lambda)^{-\frac{\beta-1}{2}}))^*$ とおくと,
 $\Sigma_\beta \xrightarrow{\sim} X_\beta$ である. $\hat{Y}_\beta = H_\mp^\beta(-1,1)$ ~~と~~ に対応する $\hat{\Sigma}_\beta$ を
 おく構成し. $\int_0^* a_\pm(s) ds$ の意味をとりて \hat{A} の実現を与える.
 簡単のため $\beta \geq 0$ とする.

$f = f_+ \oplus f_- \in \hat{Y}_0 = L_\mp^2(-1,1)$ に対し,

$$\{f\}_e = f \text{ の even part} = \frac{1}{2}(f + \check{f}) \quad (\check{f} \text{ は } f \text{ の表返し})$$

$$\{f\}_o = f \text{ の odd part} = \frac{1}{2}(f - \check{f})$$

を定義できる. 前に表示した \hat{G} は $a_0 = \{f\}_e|_{[0,1]}$, $a_1 = \frac{d}{dt}\{f\}_o|_{[0,1]}$ と考えられる.

$a_0 \in L^2(0,1)$ に対し a_0 の even な拡張 ($a_0|_e \in L^2(-1,1)$) によって

$L^2(0,1) \cong \{L^2(-1,1)\}_e$ とみなせる. — is Poincaré の不等式 によって

同型 $\frac{d}{dt} L^2(-1,1) \cong (H_0^1(-1,1))^*$ を得られる.

$$\frac{d}{dt} b = \frac{d}{dt} B \mapsto \tilde{b}, \quad \langle \tilde{b}, \varphi \rangle_{H_0^1} = - \langle B, \varphi' \rangle_{L^2}$$

これによって

$$\frac{d}{dt} \{L^2(-1,1)\}_o \cong \{H_0^1(-1,1)\}_e^* \cong (\{H_0^1(-1,1)\}_e)^*$$

$H^1(0,1) = \{a_1 \in H^1(0,1) \mid a_1|_{x=1} = 0\}$ とおくと, $H^1(0,1) \cong_{[0,1]_e} H_0^1(-1,1)$

であるから. $\frac{d}{dt} \{L^2(-1,1)\}_o \cong (H^1(0,1))^*$ とみなせる. この

同一視は. even な拡張 $[\cdot]_e$ に対応するものであるから.

この記法を用いることにすると, 前の写像 \hat{G} は

$$\hat{G}: \hat{Y}_0 = L_\mp^2(-1,1) \rightarrow L^2(0,1) \times (H^1(0,1))^* \cong \hat{\Sigma}_0$$

$$f \mapsto (a_0, a_1) \quad ; \quad [a_0]_e = \{f\}_e, \quad [a_1]_e = \frac{d}{dt}\{f\}_o$$

と実現される。次に $\frac{d}{dt} : \{L^2(-1,1)\}_0 \rightarrow \frac{d}{dt} \{L^2(-1,1)\}_0$ は injection である。即ち、 $b \in \frac{d}{dt} \{L^2(-1,1)\}_0$ に対し $b = \frac{d}{dt} B$ なる $B \in \{L^2(-1,1)\}_0$ は一意である。この B を $B = \int_0^t b(s) ds$ と書くことにすれば、

$$\hat{G} \text{ の逆写像 } \hat{F} : \hat{\Sigma}_0 = L^2(0,1) \times (H^1(0,1))^* \rightarrow L^2(-1,1) = \hat{Y}_0$$

$$(a_0, a_1) \mapsto f, \quad \{f\}_e = [a_0]_e, \quad \{f\}_o = \int_0^1 [a_1]_e(s) ds$$

と実現される。即ち、 $\hat{Y}_0 \xrightleftharpoons[\hat{G}]{\hat{F}} \hat{\Sigma}_0$ は同型である。

一方において、 $\Sigma_0 = L^2(0,1) \times (H^1(0,1))^*$, ~~$H^1(0,1) \subset H^1(0,1)$~~
 $\text{codim}(H^1(0,1); H^1(0,1)) = 1$ であるので、 $\hat{\Sigma}_0 \subset \Sigma_0$, $\text{codim}(\hat{\Sigma}_0; \Sigma_0) = 1$ とできる。この埋込みは $H^1(0,1)$ の $H^1(0,1)$ に対する余空間のとり方に依存する。

φ_R を任意の固有関数として固定し、 $a \in H^1(0,1)$ に対し

$$a(x) = \underbrace{\left(a(x) - \frac{a(x)}{\varphi_R(x)} \varphi_R(x) \right)}_{\in H^1(0,1)} + \frac{a(x)}{\varphi_R(x)} \varphi_R(x)$$

なる直和分解を与えよと、

$b \in (H^1(0,1))^*$ を $\tilde{b} \in (H^1(0,1))^*$, $\langle \tilde{b}, \varphi_R \rangle_{H^1} = 0$ と同一視することになる。従って $\hat{\Sigma}_0$ を $X_0 = \mathcal{Q}^{2,0} \times \mathcal{Q}^{2,0}$ の部分空間に引きもとしてやることにより、 $\{\sin m\pi t, t \mid m \geq 1\}$ の任意の関数をひとつとり除いたものと $\{\cos n\pi t \mid n \geq 0\}$ を合わせたものは、 $\mathcal{Q}^{2,0}$ を係数として $L^2_+(-1,1)$ の Riesz basis になることがわかる。

以上をまとめると $\beta > \frac{1}{2}$, $\beta \neq \frac{1}{2} + \text{integer}$ の時、 $S = \{\cos n\pi t,$

$\{\sin m\pi x, \cos m\pi x \mid m \geq 0, m \geq 1\}$ に $[\beta - \frac{1}{2}]$ 個の適当な関数を加えたものは $L^{2,\beta}$ を係数として $H_{\beta}^p(-1,1)$ の Riesz basis になる。

$\frac{1}{2} > \beta \geq 0$ の時. S より $\{\sin m\pi x, \cos m\pi x \mid m \geq 1\}$ の任意の関数を 1 つとり除いたものは $L^{2,\beta}$ を係数として $H_{\beta}^p(-1,1)$ の Riesz basis になる。

$\beta \leq 0$ の場合. 研究の方向には 2通りある。

A. $\beta = 0$ の場合のまじりに不定積分 $\int_0^x a_1(s) ds$ の意味付けをする。

B. $S_1 \equiv \{\cos n\pi x, \sin m\pi x \mid m \geq 0, m \geq 1\}$ が $L^2(-1,1)$ の完全直交系をなすことを利用し. Φ の S_1 上への制限 Φ_1 の双対写像 Φ_1^* によつて $\beta \geq 0$ の結果を $\beta \leq 0$ に引き込む。

結果としては. H_{β}^p を $(H_{\beta}^{-p})^*$ におき換えて. $-\beta_{(2)}$ の場合と全く同様のことが成り立つものと思ふ。

§4. Non-harmonic の場合

同様

$\beta \geq 1$ に対しては Harmonic と類似の議論ができて. ~~類似~~ の結論を得る。前節の A の方法で β を下げてやることができる。 $\beta \geq 1$ のまじりは Harmonic と同様の結論が得られるが. これ以上下げるのには技術的困難がある。

方法 B は直交性がこわれるので. そのままでは使えない。しかし適当な修正によつてこの方法は有効なのではないかと. 筆者は現在の所考えている。

文献

- [1] Ingham, E., Some trigonometrical inequalities in the theory of series, *Math. Z.*, 41 (1936) 367-379.
- [2] Kudec, M.J., The exact value of the Paley-Wiener constant, *Sov. Math.*, 5-2 (1964) 559-561.
- [3] Levinson, N., Gap and Density Theorems, *Collg. Public.* vol 26, AMS, Providence, 1970.
- [4] Lions, J.L., Magenes, E., *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications* I., Springer, 1972.
- [5] Nankawa, K., Complete controllability of one-dimensional vibrating systems with bang-bang controls, *SIAM J. Control & Optim.*, 22 (1984) 788-804.
- [6] Paley, R.E.A.C., Wiener, N., *Fourier Transforms in Complex Domain*, *Collg. Public.* vol 19, AMS, Providence, 1934.
- [7] Radheffer, R.M., Elementary remarks on completeness, *Duke Math. J.*, 35 (1968) 103-116.
- [8] Russell, D.L., Nonharmonic Fourier series in the control theory of distributed systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 18 (1967) 542-580.
- [9] Schwartz, L., *Etude des Somme d'Exponentielles*, 2nd ed., Herman, Paris, 1950.
- [10] Suzuki, T., A stability theorem on the boundary identification for coefficients of hyperbolic equations, *Proc. Japan Acad.*, 60 (1984) 209-211.
- [11] —, Non-harmonic Fourier series と双曲型方程式の逆問題, 実関数論 (23回), 関数解析 (22回) 合同シンポジウム, 日本数学会, 1984.
- [12] Tsujioka, K., Remarks on controllability of second order evolution equations in Hilbert spaces, *SIAM J. Control*, 8 (1970) 90-99.
- [13] Yosida, K., *Functional Analysis*, Springer, 1964.
- [14] —, 積分方程式論 (第2版), 岩波, 1978
- [15] Young, R.M., *An Introduction to Non-harmonic Fourier Series*, A.P., 1980.