数理解析研究所講究録
562巻 1985年 19-29

部分的観測の場合の最適停止問題

神戸大理 西尾真喜子 (Makiko Nisio)

§1. Introduction. 確率微分方程式に従って時間発展している運動系 $X(t)$ を、許容される停止時間のクラスから、停止時間 τ をえらんで、運動を止めた時、$g(X(\tau))$ の gain が得られるとする。その平均値 $Eg(X(\tau))$ を最大にする様な停止時間を求める問題が、最適停止問題である。運動系 $X(t)$ が完全に観測出来る場合、$X(t)$ に適合した停止時間が許容されるが、$X(t)$ の代りに、雑音を伴った $Y(t) = W(t) + \int_0^t h(X(s))ds$ しか観測出来ない場合、$Y(t)$ に適合した停止時間しか許容されないことになる。この場合の問題が、部分的観測の最適停止問題である。$X(t)$ の $(Y(s),\ s \le t)$ に対する filtering を考えることにより、測度値マルコフ過程が得られ、これを新しく運動系と考えることにより、完全観測な場合に帰着する方法が取られているが、部分的な結果が得られているにすぎない、[1, 5]。この報告では、運動系が、以下に述べるように、観

測データーを利用して制御されている場合の部分的観測の最適停止問題を考える。

Control region Γ を R^k のコンパイト凸集合とし，$[0\,T]\times C([0\,T]\to R^1)$ 上で定義された発展的可測関数 F を admissible control とよぶ。i. e

(i) F は $\mathbb{B}_1([0\,T])\times\mathbb{B}(C([0\,T]\to R^1))$ - 可測．

(ii) 任意の t に対し，$F(t,\cdot)$ は $\mathbb{B}(C([0\,t]\to R^1))$ - 可測．

F を用いた場合の運動系 X（n 次元）と観測系 Y（1 次元）は次の controlled stochastic differential equation（CSDE）に従うとする．

$$(1\text{-}1)\quad \begin{cases} dX(t)=\alpha(X(t),F(t,Y))dB(t)+\gamma(X(t),F(t,Y))\,dt, & 0<t\le T \\ X(0)=\xi \quad (n\text{ 次元確率変数}) & \end{cases}$$

$$(1\text{-}2)\quad dY(t)=dW(t)+h(X(t))\,dt,\qquad Y(0)=0.$$

ここで，B は n 次元ブラウン運動，W は 1 次元ブラウン運動で，ξ, B, W は互に独立．

仮定　α, γ, h は充分なめらか，また，必要な微分迄こめて有界．

CSDE (1-1) (1-2) の解の存在と一意性は §2 で示される．Y- 適合な停止時間 τ で，$\tau\le T$ となるものを許容し，$E\,g(X(\tau))$ を最大にする様な admissible control F と停止時間 τ を求めることが問題になるが，これは未解決である。§3

で，filtering を用いて問題を定式化し，value function の特徴附けを §4 で行う．

§2. (1-1) (1-2) の弱解の存在と一意性． 確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$ 上に，$\mathfrak{F}_0$-可測な n 次元確率変数 ξ，$E|\xi|^2 < \infty$，$\mathfrak{F}_t$-ブラウン運動 B (n 次元)，$\tilde{w}$ (1 次元) が与えられ，B と $\tilde{w}$ は独立とする。 CSDE (2-1) (2-2) を考える

(2-1) $$\begin{cases} dX(t) = \alpha(X(t), F(t, Y))\, dB(t) + \gamma(X(t), F(t, Y))\, dt \\ X(0) = \xi. \end{cases}$$

(2-2) $$dY(t) = d\tilde{W}. \qquad Y(0) = 0.$$

この方程式は，$Y = \tilde{W}$ となる為，(2-1) は

$$X(t) = \xi + \int_0^t \alpha(X(s), F(s, \tilde{w}))\, ds + \int_0^t \gamma(X(s), F(s, \tilde{w}))\, ds$$

となり，α，γ のなめらかさより，逐次近似法により一意解がきまる．しかも，X は ξ と $(B, \tilde{w})$ に対し発展的可測．よく知られている様に，次のような girsanov 変換を行えば (1-1) (1-2) の解をもとめることが出来る．

(2-3) $$L(t) = \exp\left(\int_0^t h(X(s))\, dY(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |h(X(s))|^2 ds\right)$$

とおき，

(2-4) $$d\hat{P} = L(T)\, dP$$

により，新しい確率 $\hat{P}$ を導入すれば，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \hat{P})$ 上で，

(2-5) $\quad W(t) = Y(t) - \int_0^t h(X(s))\,ds$

は，B と独立な1次元ブラウン運動となる。ゆえに，(2-1)(2-2) の解 X, Y は，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \hat{P})$ 上で (B, W) に関する (1-1)(1-2) の解を与える。

分布の一意性．(X^*, Y^*) を $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathcal{F}_t^*, P^*)$ 上の (ξ^*, B^*, W^*) に関する (1-1)(1-2) の解とする。

$$L^*(t) = \exp\left(\int_0^t h(X^*(s))\,dY^*(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |h(X^*(s))|^2 ds\right)$$

とおけば，

$$L^*(t)^{-1} = \exp\left(\int_0^t -h(X^*(s))\,dW^*(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |h(X^*(s))|^2 ds\right)$$

は，平均1の $\mathcal{F}_t$－マルチンゲールで．

$$d\tilde{P} = L^*(T)^{-1}\,dP^*$$

により新しい確率 P^* を導入すれば，$(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathcal{F}_t^*, \tilde{P})$ 上で，Y^* は B^* と独立なブラウン運動になり，(2-1)(2-2) の場合になる。ゆえに，

$(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathcal{F}_t^*, \tilde{P})$ 上の (ξ^*, X^*, Y^*, B^*) の分布

$= (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上の (ξ, X, Y, B) の分布.

即ち，任意の有界連続関数 H に対し

$$E^* H(X^*(t_1), \cdots X^*(t_n), Y^*(t_1), \cdots Y^*(t_n))$$
$$= \tilde{E}\, H(X^*(t_1) \cdots Y^*(t_n)) \exp\left(\int_0^T h(X^*(s))\,dY^*(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |h(X^*(s))|^2 ds\right).$$

$$= E\, H(X(t_1), \cdots, Y(t_n)) \exp\left(\int_0^T h(X(s))\,dY(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |h(X(s))|^2 ds\right)$$

$$= \hat{E}\, H(X(t_1), \cdots, Y(t_n)).$$

ゆえに、 P^* に対する (X^*, Y^*) の分布 $= \hat{P}$ に対する (X, Y) の分布.

以上のことを Proposition としに書いておく.

<u>Proposition 1</u> CSDE (1-1) (1-2) は一意的な弱解をもつ.

弱解 (X, Y) の分布は, ξ の分布 μ と admissible control F により定まる為, 必要な場合には, $X(\cdot, \mu, F)$ の様に書く.

§3. Controlled Zakai equation. $X(t)$ の $(Y(s), s \le t)$ に対する unnormalized conditional probability が Zakai equation に従うことを示し, 適当な条件 (A1) (A2) の下でその解として特徴附けられることを述べる.

(X, Y) を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \hat{P})$ 上の (1-1) (1-2) の解とする。既に述べたように, Girsanov 変換を行うことにより, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上で, Y は1次元ブラウン運動となり, (ξ, B, Y) は互に独立になる. ゆえに, 有界 Borel 関数 g に対する条件附平均は次式で計算出来る

(3-1) $\qquad E\left(g(X(t))\,L(t) / \sigma_t(Y)\right) = E^{(\xi, B)}\left(g(X(t))\,L(t)\right)$, a.e.

但し, $\sigma_t(Y) = (Y(s), s \le t)$ の生成する σ-加法族で, $E^{(\xi, B)}$ は (ξ, B) についての平均.

(3-1) の右辺は, Y の path 毎に, $L_\infty(R^N)$ 上の正の線型

汎関数として確定する為，測度値確率過程 $M(t,\cdot)$ が，次の(3-2)をみたす様に存在する．

$$(3\text{-}2)\quad E\left(g(X(t))L(t)/\sigma_t(Y)\right) = \int_{R^N} g(x)\,M(t,dx) \equiv \langle g, M(t)\rangle \quad a.e.$$

g がなめらかな場合，Itoの公式により，

$$(3\text{-}3)\quad \begin{cases} d\langle g, M(t)\rangle = \langle G(F(t,Y))g,\ M(t)\rangle dt + \langle hg, M(t)\rangle dY \\ \langle g, M(0)\rangle = \langle g, \mu\rangle. \end{cases} \quad (\mu\text{ は }\xi\text{ の分布})$$

ここで

$$(3\text{-}4)\quad G(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} r_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a = \frac{1}{2}d^2$$

したがって，$M(t,dx) = Z(t,x)\,dx$ と密度 Z が存在するとき．

$$(3\text{-}5)\quad \begin{cases} dZ(t,x) = G^*(F(t,Y))Z(t,x)\,dt + h(x)Z(t,x)\,dY(t). \\ Z(0) = \lambda\ (= \mu') \end{cases}$$

$U(t) = F(t,Y)$ とおき，関数空間上のCSDE，

$$(3\text{-}6)\quad \begin{cases} dZ(t) = G^*(U(t))Z(t)\,dt + hZ(t)\,dY(t) \\ Z(0) = \lambda \end{cases}$$

を controlled Zakai equation とよぶ．

(3-6)に関して既に知られている結果を記しておく．その為に，既に仮定した係数のなめらかさと有界性以外に，次の(A1)と(A2)を以後仮定する．

(A1) $a_{ij}(x,u)$ は u に依存しない．$i,j=1\cdots n$.

(A2) $\exists\, c>0\ ;\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u) \geq c|x|^2, \quad \forall x \in R^n,\ u \in \Gamma.$

$$\mathcal{U} = \{ U \ ; \ U(t) = F(t, Y), \ F: \text{adm. control} \}$$

$$\mathcal{S}(t) = \{ \tau \ ; \ Y\text{-適合な停止時間}, \quad \tau \le t \}$$

$$W = \{ \varphi \in W_2^2(R^n) \ ; \ \varphi \ge 0 \}.$$

Proposition 2 [2, 3]. (3-6) の解を $Z(\ ,\lambda, U)$ と書く.

初期値 $\lambda \in W$ とする. 前記の仮定の下で, (i) ～ (vi) が成立つ.

(i). Y-適合な一意解 $Z(\ ,\lambda, U)$ が存在する

(ii) 確率 1 で "$Z(t, x, \lambda, U)$ は (t, x)-連続, 且 $\forall t$ に対し

$Z(t, \cdot, \lambda, U) \in W$"

(iii) 初期値に関する連続性, $\exists K(T) > 0$;

$$\sup_{U \in \mathcal{U}} E \sup_{t \le T} \| Z(t, \cdot, \lambda, U) - Z(t, \tilde{\lambda}, U) \|^2 \le K(T) \| \lambda - \tilde{\lambda} \|^2$$

但し $\| \ \| = \| \ \|_{L^2(R^n)}$

(iv) $\exists K_1(T) > 0$;

$$\sup_{U \in \mathcal{U}} E \sup_{t \le T} \| Z(t, \lambda, U) \|_{H^1}^2 \le K_1(T) \| \lambda \|_{H^1}^2$$

(v) 時間に関する連続性; $\exists K_2(T) > 0$; $\tau, \sigma \in \mathcal{S}(T)$.

$$|\tau - \sigma| \le \theta \Rightarrow \sup_{U \in \mathcal{U}} E \| Z(\tau, \lambda, U) - Z(\sigma, \tilde{\lambda}, U) \|^2 \le K_2(T) \theta \| \varphi \|_{H^1}^2$$

(vi) 有界連続関数 g と $\tau \in \mathcal{S}(T)$ に対し

$$E(g(X(\tau, \lambda, F)) L(\tau) / \sigma_\tau(Y)) = \int_{R^N} g(x) Z(\tau, x, \lambda, U) dx.$$

但し. $U(t) = F(t, Y)$.

i.e. (3-6) の解 Z は, X の Y に関する unnormalized conditional probability の density に他ならない.

(vi) と (2-4) を考え合せると, 初めの pay-off function は次の様に計算出来る

$$(3\text{-}7) \qquad \hat{E}(g(X(\tau, \lambda, F))) = E\int g(x)\, Z(\tau, x, \lambda, U)\, dx.$$

この事実を考慮して, 我々の問題を次の様に定式化しよう. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ を確率空間, Y を1次元 $\mathcal{F}_t$ −ブラウン運動, Y に適合した Γ 値確率過程を admissible control とよび, その全体を $\mathcal{a}$ と記す. $\mathcal{S}(t) = \{\tau \,;\, Y\text{-}$適合な停止時間, $\tau \le t\}$.
$U \in \mathcal{a}$ を適用した場合の系 Z の運動は次の controlled Zakai eq. に従うとする

$$(3\text{-}8) \qquad \begin{cases} dZ(t) = \mathcal{L}^*(U(t))\, Z(t)\, dt + h\, Z(t)\, dY(t), & 0 < t \le T. \\ Z(0) = \varphi\ (\in W). \end{cases}$$

次の (3-9) をみたす Lipschitz 連続な W 上の実数値関数 Φ の全体を $\mathcal{L}$ とする

$$(3\text{-}9) \qquad K_\Phi \equiv \sup_{\varphi \ne \psi} \frac{|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)|}{\|\varphi - \psi\|} < \infty.$$

$\Phi \in \mathcal{L}$ が pay-off function として与えられたとき,

$$(3\text{-}10) \qquad V(t, \varphi, \Phi) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}(t),\ U \in \mathcal{a}} E\, \Phi(Z(\tau, \varphi, U))$$

を value function とよぶ. 従って, V を与える最適制御 $U \in \mathcal{a}$ と最適停止時間 $\tau \in \mathcal{S}(t)$ を求めること, 及び value function V の特徴附けが問題になる.

§4. V の特徴附け. 先ず, value function V が $\mathcal{L}$ 上の

半群を導入することに注意し，この立場より1つの特徴附けをあたえる [4]. Proposition 2 (V) により $V(t,\varphi,\Phi)$ は t の連続増加関数になるが，次の命題が証明出来る

<u>Proposition 3</u> $\Phi \in \mathcal{L} \Longrightarrow V(t,\cdot\,\Phi) \in \mathcal{L}$.

(i)
$$\left|\sup_{\tau\in S(t),\ U\in\Omega} E\,\Phi(Z(\tau,\varphi,U)) - \sup_{\tau\in S(t),\ U\in\Omega} E\,\Phi(Z(\tau,\psi,U))\right|^2$$
$$\leq \sup_{\tau,U} E\,|\Phi(Z(\tau,\varphi,U)) - \Phi(Z(\tau,\psi,U))|^2$$
$$\leq \sup_{\tau,U} K_\Phi^2\ E\,\|Z(\tau,\varphi,U) - Z(\tau,\psi,U)\|^2$$
$$\leq K_\Phi^2\ K(t)\,\|\varphi-\psi\|^2$$

i.e. $V(t,\cdot\,\Phi)$ も Lipschitz 条件 (3-9) をみたす.

ゆえに，operator $V(t):\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}$ が (3-11) により定義出来る

(3-11) $\qquad V(t)\,\Phi = V(t,\cdot\,\Phi)$.

<u>Proposition 4</u> $V(0) = \text{identity}$. $V(t+s) = V(t)\,V(s)$.

i.e. $V(t)$ は $\mathcal{L}$ 上に半群性をもつが，この事は次の様な Bellman Principle を意味する.

(3-12) $\qquad V(t+s,\varphi,\Phi) = V(t,\varphi,V(s,\cdot\,\Phi))$

<u>Outline of proof</u> 次のような time discrete approximation による.

$$J_N\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi) \vee \sup_{U\in\Omega} E\,\Phi(Z(2^{-N},\varphi,U))$$

但し $a \vee b = \max(a,b)$, とおけば，J_N も $\mathcal{L}$ 上の

作用素となり，J_N^k, $k=1,2,\cdots$ が順次定義出来る．一方，停止時間も離散化し，$\{j2^{-N}, j=0,1,2\cdots\}$ の値をとる $\mathcal{S}(t)$ の要素の全体を $S(t,N)$ とする．$\sigma_0(Y)$ が trivial な場合，$\tau\in\mathcal{S}(2^{-N},N)$ に対し $(\tau=0)\in\sigma_0(Y)$ より $P(\tau=0)=1 \sim 0$.

ゆえに，$P(\tau=2^{-N}) = 1-P(\tau=0) = 0 \sim 1$. 即ち

$$E\Phi(Z(\tau,\varphi,U)) = \Phi(\varphi) \sim E\Phi(Z(2^{-N},\varphi,U))$$

∴ $J_N\Phi(\varphi) = \sup\limits_{U\in\mathfrak{A},\ \tau\in S(2^{-N},N)} E\Phi(Z(\tau,\varphi,U))$ が成立つ．

より一般に次の (3-13) が証明出来る．

(3-13) $$J_N^k\Phi(\varphi) = \sup_{U\in\mathfrak{A},\ \tau\in\mathcal{S}(k2^{-N},N)} E\Phi(Z(\tau,\varphi,U)),$$

$V_N(t)\Phi(\varphi) = J_N^k\Phi(\varphi)$ for $t=k2^{-N}$ とおけば，$V_N(t)$ は $\mathcal{L}$ 上の離散時間の半群となり，$V_N(t)\Phi(\varphi)\le V_{N+1}(t)\Phi(\varphi)$ と N につき増大する．したがって，(3-13) より

(3-14) $$V(t)\Phi(\varphi) = \lim_{N\to\infty} V_N(t)\Phi(\varphi) \quad \text{for } t=\text{binary}.$$

一方 $V_N(t)$ は半群性をもつから，binary t, s に対し，

(3-15) $$\begin{aligned} V(t+s)\Phi(\varphi) &= \lim_{N\to\infty} V_N(t+s)\Phi(\varphi) \\ &= \lim_{N\to\infty} V_N(t)\,(V_N(s)\Phi)(\varphi) = V(t)\,(V(s)\Phi)(\varphi). \end{aligned}$$

$V(t)\Phi(\varphi)$ の t に関する連続性より，(3-15) は任意の t, s に対し成立つ．

以上のことを定理としてまとめておく．

<u>Theorem 1.</u> $V(t): \mathcal{L}\to\mathcal{L}$, $t\in[0,T]$ は次の性質をもつ．

(i) $V(0)=$ identity. $V(t+s)=V(t)V(s)$. (半群性).

(ii) $V(t)\Phi(\varphi)$ は t の連続増大関数

(iii) $V(t)\Phi(\varphi) \le V(t)\Psi(\varphi)$ $\forall \varphi \in W$, if $\Phi(\varphi) \le \Psi(\varphi)$ $\forall \varphi \in W$.

$u \in \Gamma$ に対し, $S(t,u)$ を $S(t,u)\Phi(\varphi) = E\Phi(Z(t,\varphi,u))$ とおけば, $S(t,u)$. $t \in [0,T]$ は $\mathcal{L}$ 上の半群になる。これを用いて, 次の特徴付けが出来る.

<u>Theorem 2</u> $\mathcal{L}$ 上の order を "$\Phi \le \Psi \Leftrightarrow \forall\varphi\in W.\ \Phi(\varphi) \le \Psi(\varphi)$" とする.

(i) $\Phi \le V(t)\Phi$ $\forall t, \Phi$.

(ii) $S(t,u)\Phi \le V(t)\Phi$. $\forall t, \Phi, u$.

(iii) $Q(t)$ が (i)(ii) をみたす $\mathcal{L}$ 上の半群ならば $V(t)\Phi \le Q(t)\Phi$.

i.e. $V(t)$ は identity と $S(t,u)$ $u \in \Gamma$ を dominate する最小の半群として特徴付けられる.

証明は, $\gamma(x,u)$ の u に関するなめらかさより, $Z(t,\varphi,U)$ が U に連続的に依存する。したがって, step control で近似出来ることに注意して, $V_N(t)\Phi(\varphi) \le Q(t)\Phi(\varphi)$, $t = k2^{-N}$, を導けば $N \to \infty$ として (iii) が成立つ.

References.

[1]. V. E. Benes, Lect. Notes in Control & Inf. Sci. 42 (1982), 38-53.

[2] A. Bensoussan, Stochastics, 9 (1983) 162-222.

[3] Y. Fujita, Tohoku Math. J. (to appear)

[4]. Y. Fujita, & M. Nisio, Preprint

[5]. G. Mazziotto, Preprint.