数理解析研究所講究録
563巻 1985年 223-254

DS-diagrams の非基本変形

神戸大学教養部 池田裕司 (Hiroshi Ikeda)

1. 問題の説明: 3-manifold の分類問題を扱う時, その幾何学的表現方法の一つとして DS-diagram なる概念がある。以下では, それを定める 3-regular graph は connected なものとする。

$DS^n = \{$頂点数 $4n$ の DS-diagram 全体$\}$ とおく。

この時, 自然に

Problem 1. DS^n の全ての要素を構成する具体的な手順を示せ。

Problem 2. DS^n の二つの要素の相互関係を幾何学的に記述せよ。

などが考えられるが, これを直接ではなく, 次のように考え直す。

L を頂点数 n の 4-regular (connected) graph とする時, DS^n の subset $DS(L)$ を次で定める。

$$DS(L) = \{ \text{DS-diagram } (S^2, G) \longrightarrow P \mid S_2(P) = L \}。$$

このDS(L)に対してProbem 1と2を考えてみる。だから，我々の目論見は次のようになる。

Problem 3．(1) DS(L)に同値関係を定義するようにDS-diagramの幾何学的変形を与える。

(2) 上の同値関係を ～ と書く時，$DS_0(L) = DS(L)/\sim$ を決定する。

Problem 3の(1)で述べられている変形は，後で解る事ではあるが，確実に"非"基本変形である。が，基本変形と全く関係ないと云う訳でもない。場合によっては，山下(東京大)，横山(上智大)，石井(慶応大)の各氏によって進行中の理論にも役立つかも知れない。

石井理論で得られるflow-spineの性格が非常に良い事は今や周知の事実である。flow-spineからDS-diagramを作って，昔flowであった事を忘れるとE-cycle付きのDS-diagramになる。E-cycleはflowをcombinatorialに記述したものではないかと云う気がするのであるが判然としない。今でもflowは使いようで切れている。

それはとも角として，上の問題をDS-diagram with E-cycle —— DS_E^n，$DS_E(L)$とか書く事にする —— について同様に考える事が出来る。少なくとも，最初と

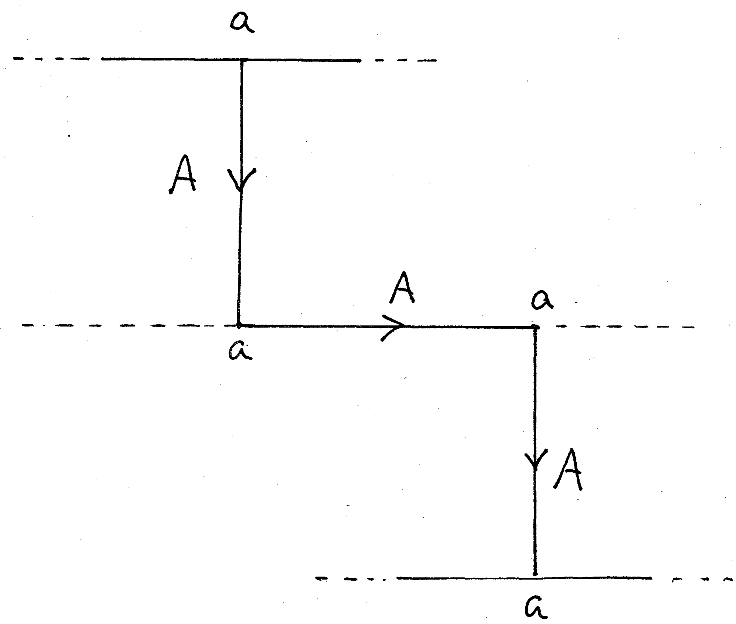
最後に関してはこの方が正しいと思われる。現実と願望は往々にして異なると知りつつ

願望: $\forall$ closed 3-manifold M, $\exists\, n \geq 1$

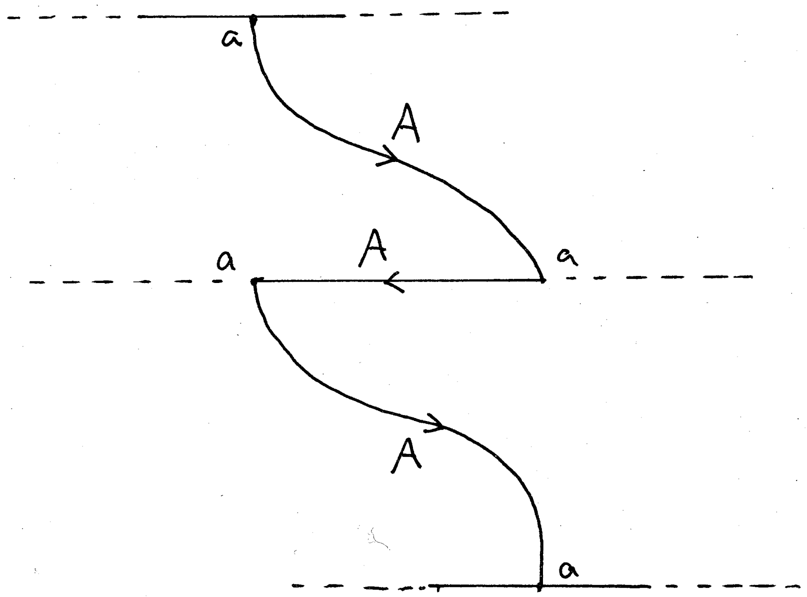
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{(i)} & M \in DS_E^n \\ \text{(ii)} & DS_E^n \text{ での } M \text{ の表現は唯一つ。} \\ \text{(iii)} & \forall m < n, \quad M \notin DS_E^m \end{cases}$$

2. 変形(Ⅱ), (Ⅰ).: 最初に横変形(Ⅱ)についての定義を行なう。$S_2(P) = L$ の loop A (directed), その頂点 a に対して, DS-diagram 上に次の図が現われる事がある。

<u>Def</u>. 1.



この時, この部分だけを, 他には触れずに, 次図のように変化させるのが, 横変形(Ⅱ)であると定義する。

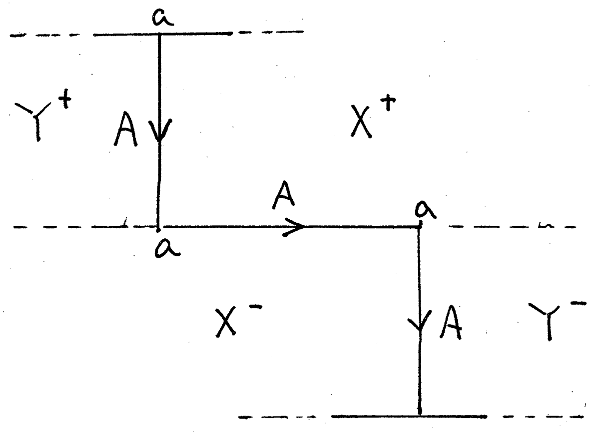


<u>Prop.</u> 1. $\begin{cases} \mathrm{II}(DS^n) = DS^n, & \mathrm{II}(DS(L)) = DS(L) \\ \mathrm{II}(DS^n_E) = DS^n_E, & \mathrm{II}(DS_E(L)) = DS_E(L) \end{cases}$

これは次のように読む。

" DS-diagram に横変形(II)を行った結果は再び DS-diagram であって，その頂点数，L，E-cycle 付きと云う条件は保存されている"

<u>Proof.</u> face の identification だけが問題である。

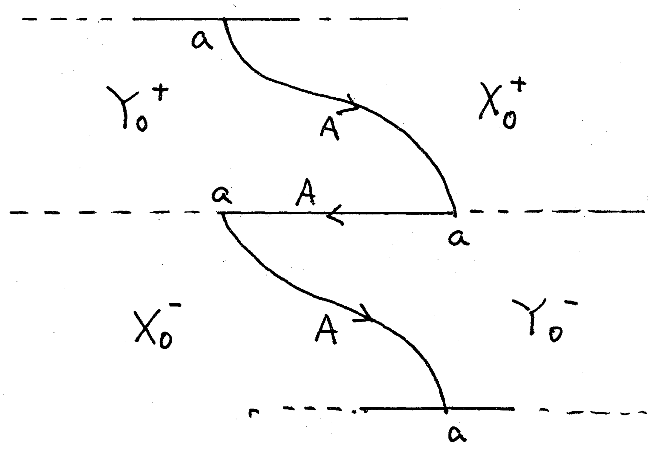


変形前はこのようになっている。但し

$$\begin{cases} X^+ = Y^+ \Longrightarrow X^- = Y^- \\ X^+ = Y^- \Longrightarrow X^- = Y^+ \end{cases}$$

である。

さて，上のDS-diagramに(II)を行った後，



でfaceのidentificationが出来ている事が解れば良い。

(i) $[X] = A^2 w_X \neq [Y] = A w_Y$ の時。

$$[X_0^+] = A w_X = [X_0^-]$$

$$[Y_0^+] = A^2 w_Y = [Y_0^-]$$

となっているから上図の X_0^+ と X_0^- 及び Y_0^+ と Y_0^- は自然にidentifyが出来る。

(ii) $X^+ = Y^+$ の時。

$[X] = A^2 w_1 A^{-1} w_2$ と書ける。

この時，$X_0^+ = Y_0^+$，$X_0^- = Y_0^-$ であって，

$$[X_0^+] = A w_1 A^{-2} w_2 = [X_0^-]$$

であるから，X_0^+ と X_0^- は identify 可能である。

(iii)　$X^+ = Y^-$ の時。

$$[X] = A^2 w_1 A w_2 \quad \text{と書ける。}$$

この時，$X_0^+ = Y_0^-$，$X_0^- = Y_0^+$ であって，

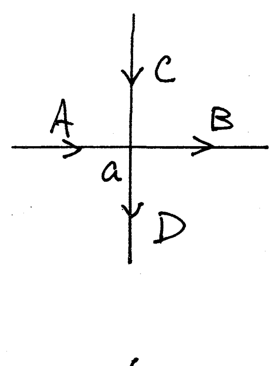
$$[X_0^+] = A w_1 A^2 w_2 = [X_0^-]$$

であるから，X_0^+ と X_0^- が identify 出来る。

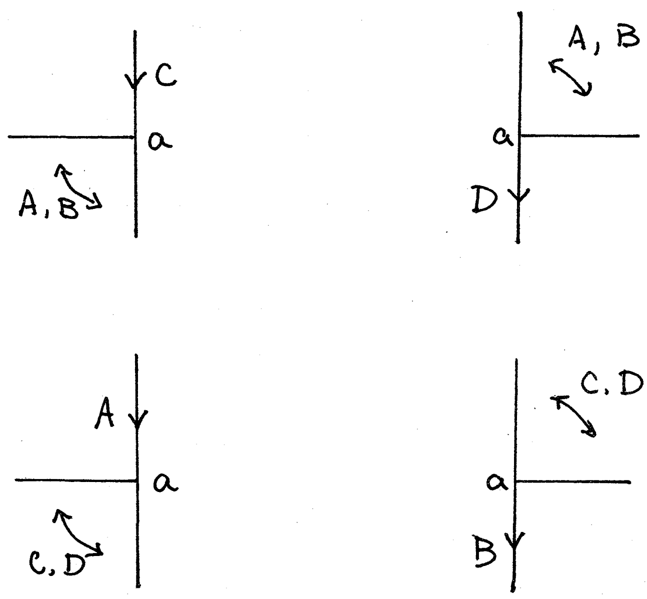
横変形(II) を E-cycle について考えて見ると，その一筆描きを L の loop A の部分で逆回りにしていると解釈出来る。従って，L の一筆描きのある部分を逆回りにする変形を本来横変形(II) であると呼ぶべきである。これについてはまだ不明の点があるので別の機会に述べる事にする。

次に横変形(I) について述べる。

L を(direction が一筆描きで与えられている) 4-regular graph と考えると，L の頂点 a の L での近傍は

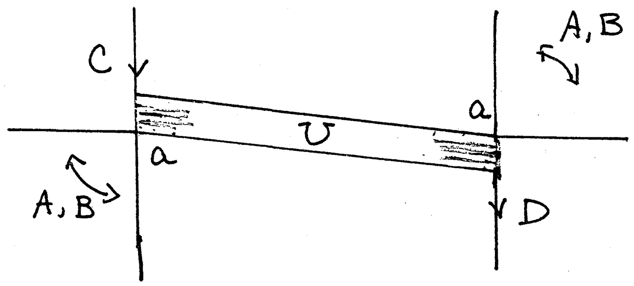


と書けて，この部分は DS-diagram 上で



の4個所に対応している。

<u>Def</u>. 2. U が (C, D) に関する lateral stripe であるというのは，



即ち，

(i) $U = I \times I$, 但し $I = [0, 1]$

(ii) G をこの DS-diagram を定めている 3-regular graph とする時，$U \cap G = \{0\} \times I \cup \{1\} \times I$ で $\{0\} \times I \subset C$, $\{1\} \times I \subset D$

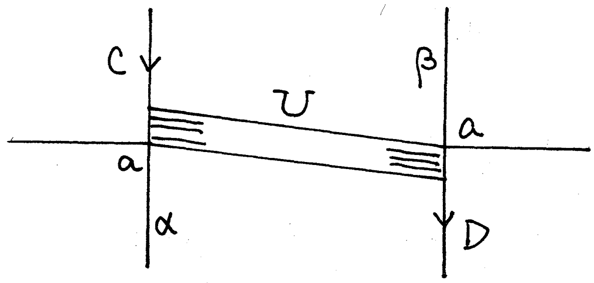
(iii) $U \cap v(G) = \{(0,0), (1,1)\}$

$$= \{左の\, a,\ 右の\, a\}.$$

である。

ここで、$\tilde{C} = (C - \{0\} \times I) \cup I \times \{1\}$, 及び
$\tilde{D} = (D - \{1\} \times I) \cup I \times \{0\}$ を夫々, C, D の延長と呼ぶ事にする。

<u>Prop</u>. 2　(C, D) に関する *lateral stripe* U が存在して,



とおくと,　$\alpha = A \iff \beta = B$

<u>Prop</u>. 3　(C, D) に関する *lateral stripe* U が X^+ に含まれる

$\Longrightarrow$　X^- に含まれる (A, B) に関する *lateral stripe* V が存在する。

この *lateral stripes* の組 (U, V) を *pair of lateral stripes* と云う。

Def. 3 (横変形(I)の定義)
(S^2, G) をDS-diagram, (U, V) を (S^2, G) 上のpair of lateral ~~stripes~~ とする。

Step 1　G から U, V と交わるedges A, B, C, D を取り除く。このgraphを G_1 とおく。

~~Step 2~~　G_1 に A, B, C, D の延長 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ を付け加えて G_2 とする。

Step 3　G_2 のedges $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ の名前を A, B, C, D として，そのdirectionは元の A, B, C, D から自然に定まるものにする。これを G' と書く。

$(S^2, G) \longrightarrow (S^2, G')$ を横変形(I)と云う。

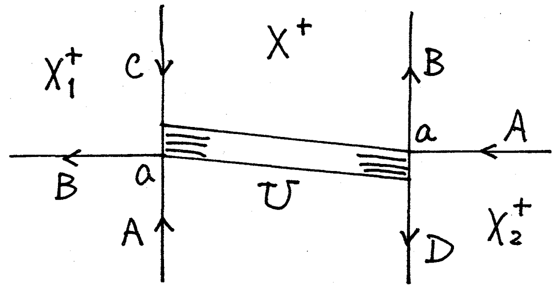
Prop. 4　G' で
(i) 同じ名前のvertexは丁度4個
(ii) 同じ名前のedgeは丁度3本

従って，(S^2, G') が我々の望むDS-diagramであるか否かはfaceの変化の仕方だけで判断出来る。

Remark　(S^2, G') がDS-diagramになっているならば，$(S^2, G') \longrightarrow (S^2, G)$ の横変形(I)が存在する事は明らかである。

(S^2, G') が DS-diagram である時，(S^2, G) は a で横変形(I)実行可能と云う事にする。

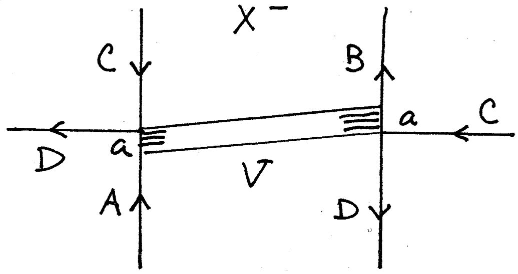
Prop. 5



で，$[X_1] \neq [X_2] \Rightarrow$ a で横変形(I)実行可能

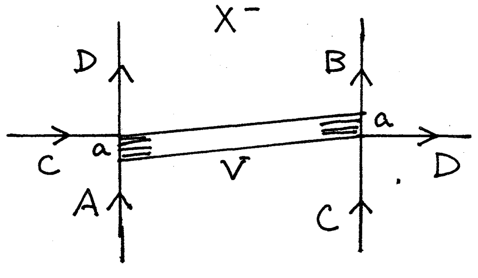
次に，必要条件について少し述べる。

Prop. 6



となっている。

Prop. 6 は



ではないと云う事を意味するもので，$[X_1] \neq [X_2]$ の場合は自動的に満たされている。 ついでに，Prop. 2，Prop. 3 を

思い起すと，pair of lateral stripes の在り方は Prop. 6 で決定されていると考えられる。

<u>Prop</u>. 7 $\quad [X_1]=[X_2] \Longrightarrow [X]=[X_1]$

<u>Prop</u>. 8 $\quad [X_1]=[X_2]$ の時，横変形(I)実行可能

$\Longrightarrow$ $[X]=AC^{-1}w_1B^{-1}Dw_2$ とおいて

(i) $w_1 \supset CB$ かつ $w_2 \supset D^{-1}A^{-1}$

又は (ii) $w_1 \supset D^{-1}A^{-1}$ かつ $w_2 \supset CB$ 。

さて，Prop. 5，Prop. 8 はそれぞれ十分条件，必要条件として述べたが，実は合わせて必要十分条件になっているのである。即ち，次が成立する。

<u>Prop</u>. 9 $\quad [X]=AC^{-1}w_1B^{-1}Dw_2$ とおく時，横変形(I)が実行可能である

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} [X_1]=[X_2] \\ \Longrightarrow \text{(i)} \quad w_1 \supset CB \text{ かつ } w_2 \supset D^{-1}A^{-1} \\ \text{or (ii)} \quad w_1 \supset D^{-1}A^{-1} \text{ かつ } w_2 \supset CB \end{cases}$$

以上の証明は多少 case が多くなるのが不愉快ではあるが，Prop. 1 と同様に face の identification を調べる事によって得られる。

以下では，横変形(I)は全て実行可能なものを意味するものとする。

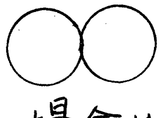
<u>Prop.</u> 10　　$I(DS^n) = DS^n$,　$I(DS(L)) = DS(L)$.

横変形(I)では，<u>Prop.</u> 1 とは異なり，"E-cycle付き" と云う状況が保存されない事は明らかである。

ここで Problem 3 に部分的解答をする。部分的と云うのは前にも述べた通り横変形(II)が不完全だからであり，従って，Examples も限定せざるを得ない。

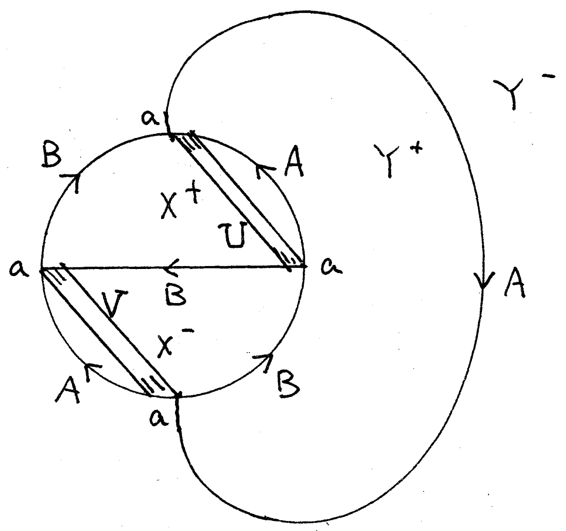
<u>Def.</u> 4　　$DS(L) \ni D_1, D_2$ に対して $D_1 \sim D_2$ とは「D_1 から D_2 へ有限回の横変形(I),(II)で移行出来る」事であると定義する。

明らかに，$\sim$ は $DS(L)$ の equivalence relation になっているから $DS_0(L) = DS(L)/\sim$ を考える事が出来る。

<u>Example</u>　　$L =$  として，$DS_0(L)$ の代表元の決定を試みる。この場合は特別に $DS^1 = DS(L)$ となっている。K.524 で $DS(L)$ の要素は丁度3個である事が解っている，そこの番号で (1-1)，(1-2)，(1-3) である。

(1-1) $\sim$ (1-2) は横変形(II)によって最早明らかと云って良いであろう。

次に (1-2) ～ (1-3) を示す。



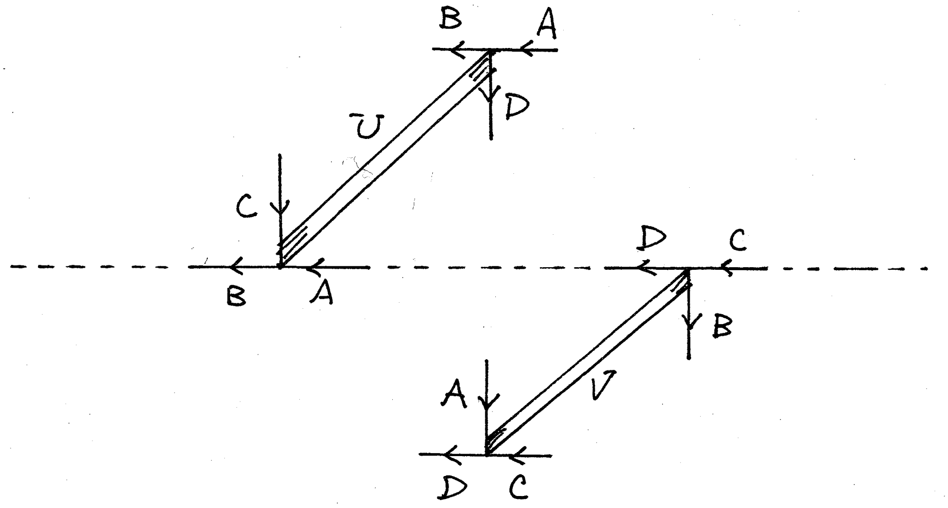
は a で Prop. 5 の仮定を満たしているから，横変形(I)が実行可能であるように pair of lateral stripes (U, V)が存在する。それは，例えば上図の (U, V) である。この(U, V) を用いて，(1-2) に横変形(I) を行えば (1-3) が得られる。

従って，$DS_0(L)$ の要素は 1 つであって，その代表元として，例えば，(1-3) が採れる。(1-3) を採りたい理由は，それが L の形から一般的な作り方が簡単に定義出来そうだからである。

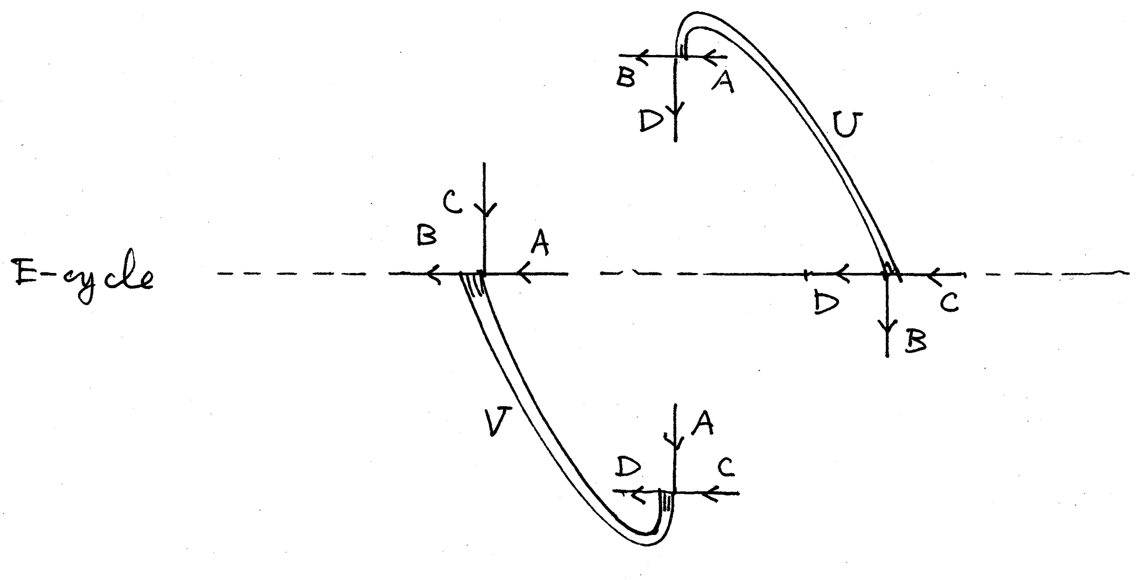
とに角，これで DS^1 の要素は全て (1-3) から横変形(I)及び(II) を用いて描き出す事が出来るという事になった。

蛇足ながら，この例でも明らかなように，横変形(I) はE-cycle を保存していない。

さて，筆者は石井理論（preprint 有り）に触れて以来，DS-diagram with E-cycle が本質的であると半ば以上確信しているので，横変形（I_E），即ち DS-diagram with E-cycle に対して E-cycle を保存する横変形(I)，を考えたい。



は横変形（I_E）であるが，



は横変形(I)であって，横変形（I_E）ではないのである。

この図を念頭に置いて次のように考える。(S^2, G)は予め指定されたE-cycle Eを持つDS-diagramとする。EによってS^2-Gの各領域(又はそのclosure)にはそれぞれ+,-の附号が付けられ，+の領域，-の領域のunionのclosureをそれぞれΣ^+, Σ^-とおくと，Σ^+, Σ^-は共にEをそのboundaryに持つ2-ballになっている。

Def. 5　(S^2, G)に横変形(I)が実行可能である時，それが横変形(I_E)であるとは，(S^2, G')がEをE-cycleとして持つという事と定める。

(注)一般にE-cycleはuniqueではないので，横変形(I_E)はEを保存しても，他のE-cycleを保存するとは限らない。因みに，横変形(II)は全てのE-cycleを保存している。

横変形(I_E)の実行可能性について，まず必要条件を述べておく。

Prop. 11　Prop. 5の図中の+はE-cycleによる+と一致している。　$X^+ \cup X_1^+ \cup X_2^+ \subset \Sigma^+$

Prop. 12　Prop. 5のABは丁度1つだけEに含まれC, DがEに含まれる事はない。

全く同様に，Prop. 6 の CD は丁度1つだけ E に含まれ A，B が E に含まれる事はない。

<u>Prop.</u> 13　　$[X_1]=[X_2] \Longleftrightarrow X_1^+ = X_2^+ = X^+$

Prop. 9 の E-cycle 版は次の通り。

<u>Prop.</u> 14　　$[X] = AC^{-1}w_1B^{-1}Dw_2$ とおく時，
横変形 (I_E) が実行可能
$\Longleftrightarrow$ (1)　Prop. 5 の + が E による + と一致する
かつ (2)　Prop. 9 の条件と同じ。

$DS_E(L) \ni D_1, D_2$ に対して，Def. 4 と同様に，横変形 (II) と (I_E) を用いて，$D_1 \underset{E}{\simeq} D_2$ を定義すれば，$\underset{E}{\simeq}$ は $DS_E(L)$ の *equivalence relation* になって，$DS_{E0}(L) = DS_E(L)/\underset{E}{\simeq}$ を考える事が出来る。

DS-diagram with E-cycle には石井理論の活躍の場が沢山あるが，その中の1つとして，影の部分を用いると次が容易に示せる。これは講演中に石井氏から指摘されたものである。

<u>Prop.</u> 15　　$D_1 \underset{E}{\simeq} D_2 \Longrightarrow (D_1 : \text{orientable} \Longleftrightarrow D_2 : \text{orientable})$.
即ち，横変形 (I_E)，(II) は *manifold* の *orientability* を保存している。

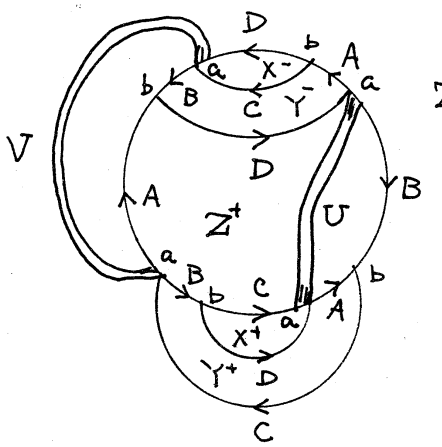
3. Examples. ここでは前半に，DS^2_{E0} の代表元を示す。後半は，頂点数を制限せずにある特別な形の L について，$DS_{E0}(L)$ を決定して見る。

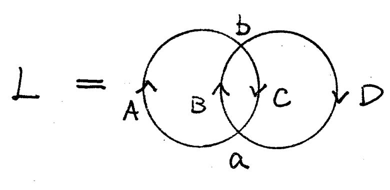
DS^2_E については，K.524 のリストの番号を用いると，

$DS^2_E = \{(2-2), (2-3), (2-4), (2-6), (2-7), (2-10)\}$

となっている。実は K.524 のリストが不完全である事を上智大・横山氏から指摘されました。それについては後述しますが，それは DS^2 の範囲であって DS^2_E には影響はない。

まず (2-6) から始める。下図は K.524 の (2-6) とは Z^+ と Z^- を取り換えて，E-cycle ADBC を明確にしたものである。(2-6) では E-cycle は unique である。





(2-6)がそれだけで DS^2_{E0} の class を形成する理由を述べる。
(理由その1)　(2-6)で定まる 3-manifold のみが non-orientable である。
(理由その2)　(2-6)の L の homeo. type が他と異なる。

今問題にしているのは DS^2_{E0} だからこれで良いとも思えるけれど、少し詳しく横変形(I), (I_E)について調べる。
横変形(I_E)が実行不可能である事は Prop. 14 で解るのであるが、Prop. 9 によれば横変形(I)は実行可能である。その lateral stripes の pair (U, V) は例えば前図に示したもので、事実与えられた E-cycle を保存していない。
では、この (U, V) を用いて横変形(I)を行なうと結果は何になるかといえば再び(2-6)である。だから、1つしかない E-cycle をこわしても、結果が E-cycle を持っている事はある。この点についてはこれ以上進んでいない。

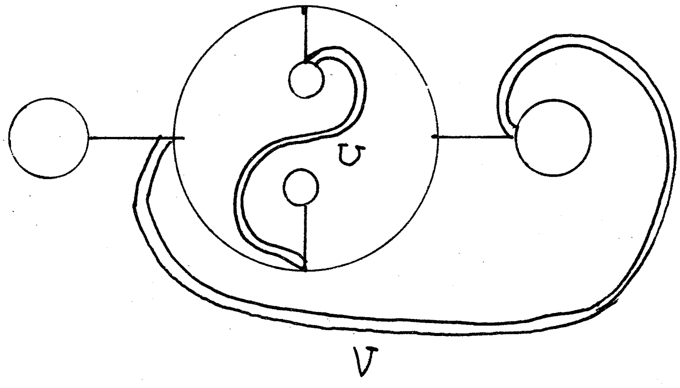
Prop. 15 の拡張版として、非常に素朴に考えて次が成立していた。

<u>Prop.</u> 16　横変形(I)は manifold の orientability を保存している。

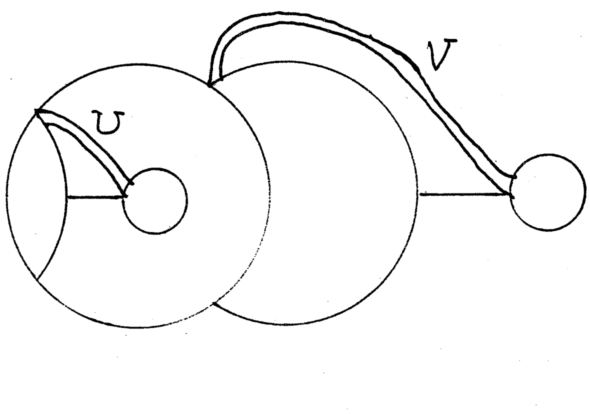
次に，(2-2)，(2-3)，(2-4)，(2-7)，(2-10) が $\underset{E}{\simeq}$ で全て同値である事を示す。

(2-3) $\underset{E}{\simeq}$ (2-4) 及び (2-7) $\underset{E}{\simeq}$ (2-10) は単に横変形(II) を行なえば良い事であるから，一見して明らかと云う事にしていただきます。下図では，(2-2) $\underset{E}{\simeq}$ (2-3) 及び (2-4) $\underset{E}{\simeq}$ (2-7) について横変形(I_E) を定める pair of lateral stripes を示しておく。

(2-2)

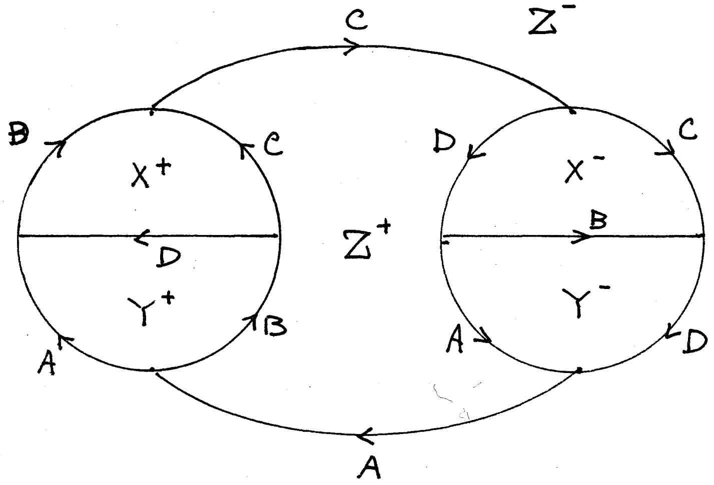


(2-4)



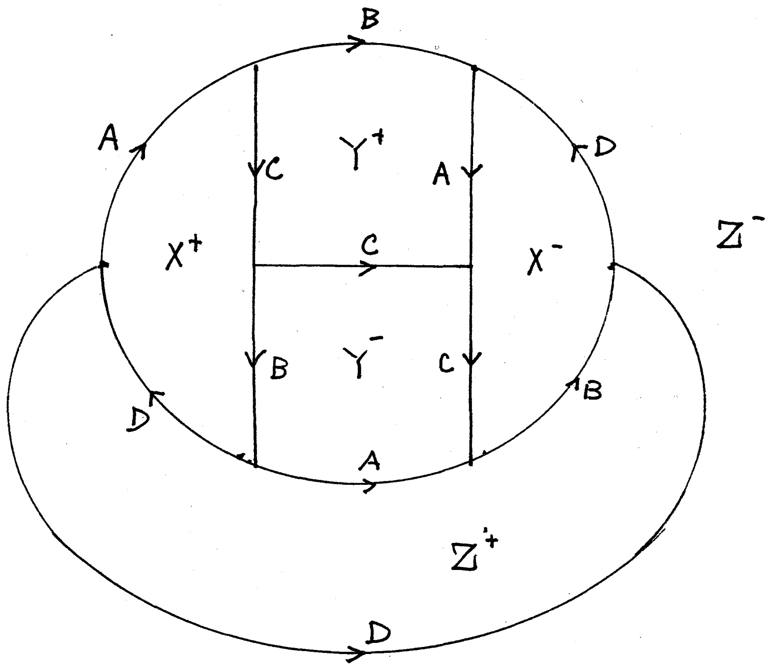
K.524 の list について，次の二つが欠落していることを横山氏より注意されました。

(2-11)



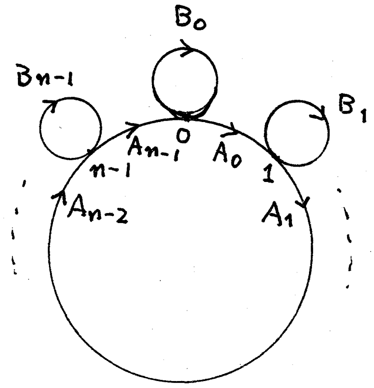
$\pi_1 = \mathbb{Z}_5$

(2-12)

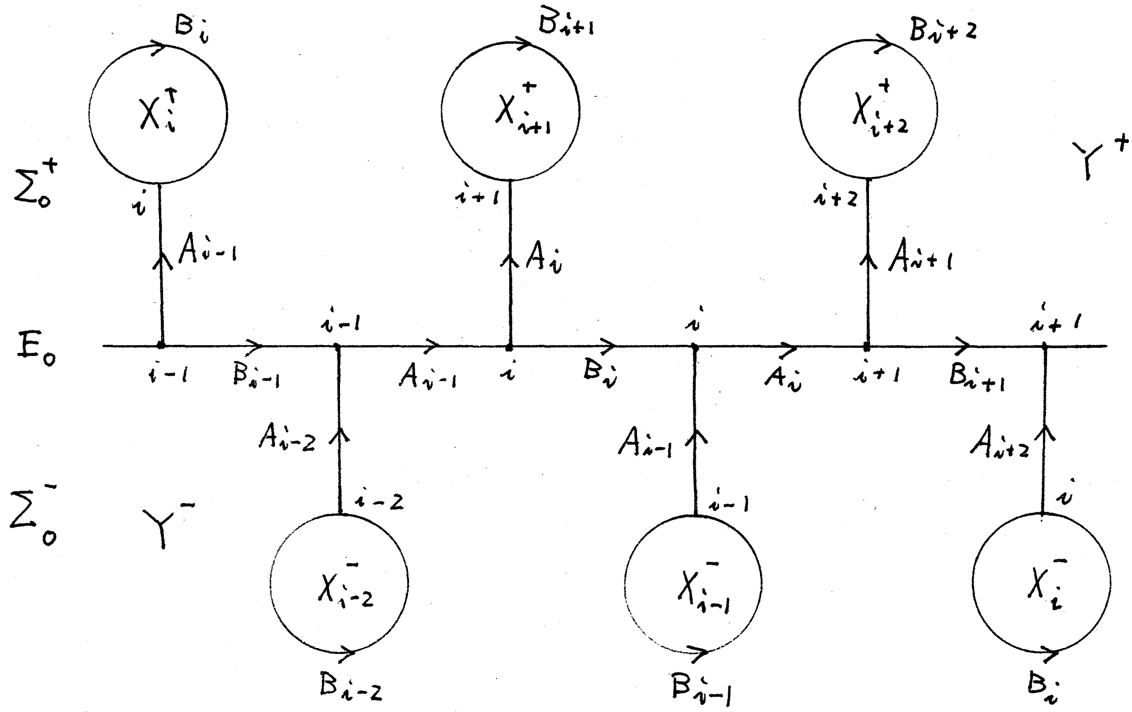


$\pi_1 = \mathbb{Z}_8$

後半に移る。

$L_n =$ 

L_n を上図の directed 4-regular graph とする。この時 $DS_E(L_n)/\underset{E}{\cong} = DS_{E_0}(L_n)$, $n = 2, 1$, は既に終っているので, $n \geq 3$ として $DS_{E_0}(L_n)$ の代表元を求める事にする。



で定まる $DS_E(L_n)$ の要素を (S^2, G_0) とおく。各 n について (S^2, G_0) は一つずつ在る。

<u>Remark</u>. (S^2, G_0) で定まる 3-manifold は S^3 である。証明する手はいろいろ有るが，見れば解ると云っても良いであろう。

以下では，$DS_E(L_n)$ の任意の要素 (S^2, G) が与えられた時，$(S^2, G) \underset{E}{\cong} (S^2, G_0)$ を示したい。

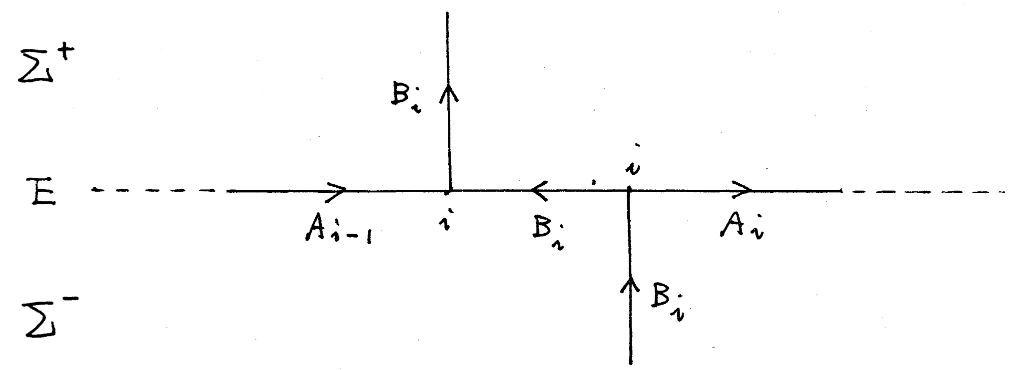
<u>Step</u> 1. (S^2, G) の E-cycle E について考える。

(i) A_i は全て E_0 上と順序も向きも一致している。

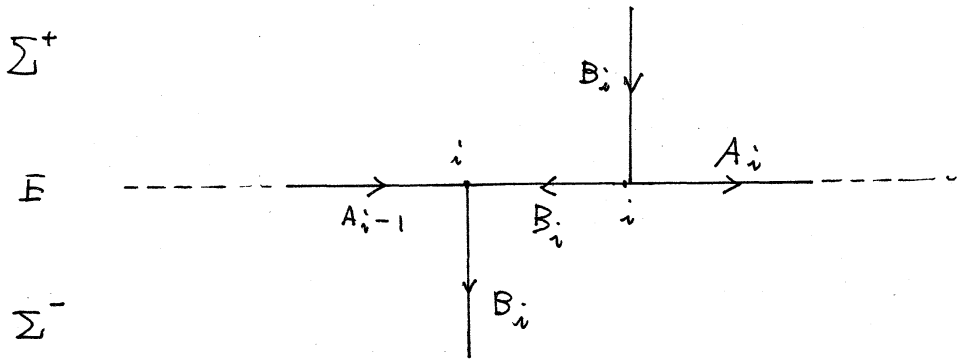
(ii) B_i は E_0 上と順序は同じであるが向きは必らずしも一致していない。

(iii) A_i, B_i は向きを無視すれば E_0 での並び方と同じ。

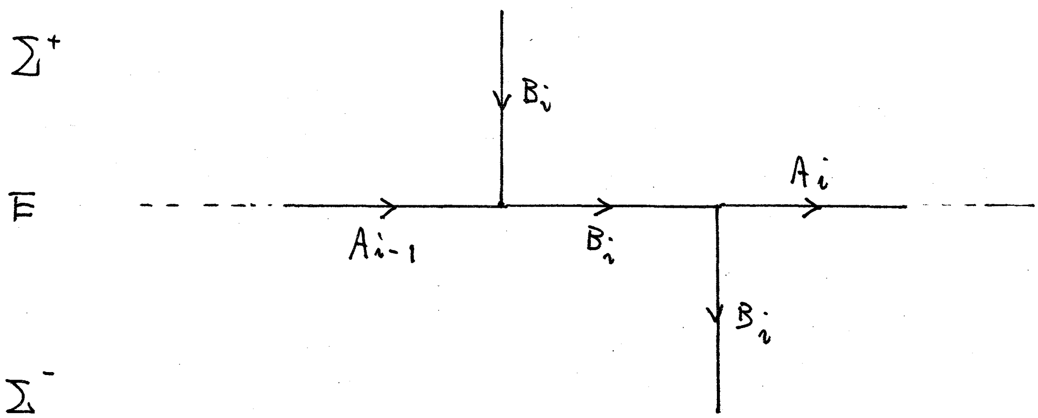
以上は L_n の一筆描きの性質である。



となっている時は，B_i の向きを３本共逆にする。これは DS-diagram の基本変形に含まれている－－－この点については K.524 中の 山下－横山を参照して下さい。

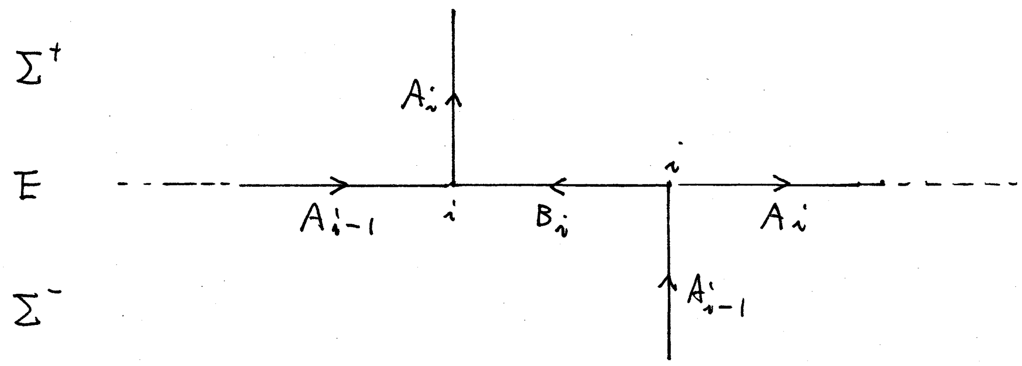


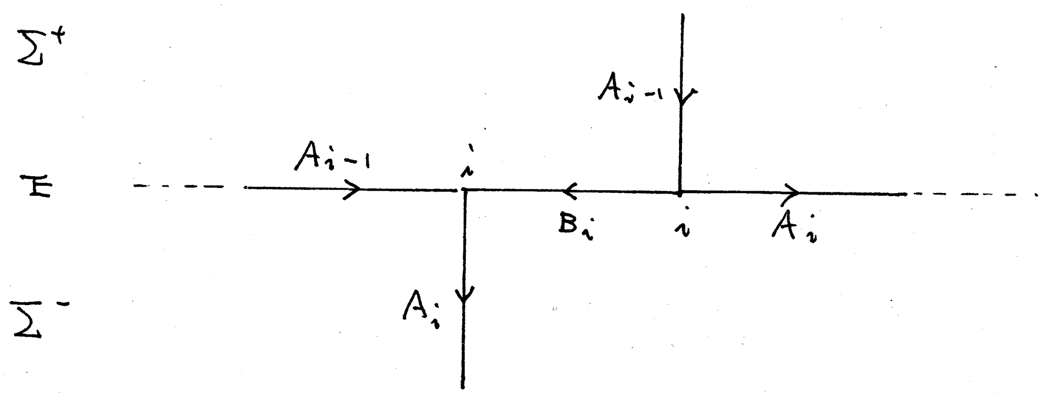
となっている時は，B_i で横変形(Ⅱ)を行なって，E上の B_i の向きを逆にする。即ち，B_i が３本続いている所では



となっているとして良い。

次に，B_i がバラバラに現われる場合は，Σ^+ と Σ^- を固定すると二通りある。





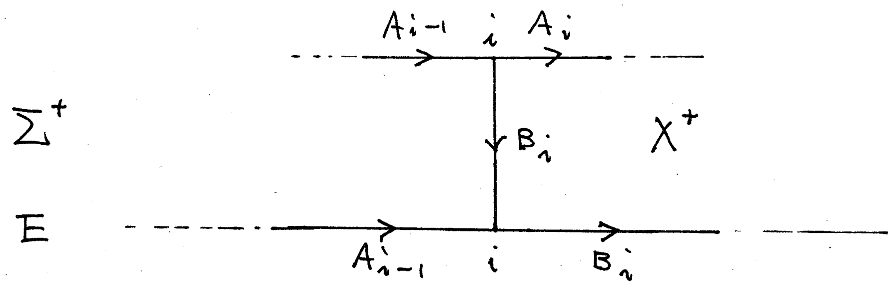
この場合はいずれも B_i の向きを3本共逆向きに付ける事にする。

従って状況は次の通りとなる。

“ E は E_0 と全く一致している。”

<u>Step</u> 2　Eから少し離れた所の状態を調べる。

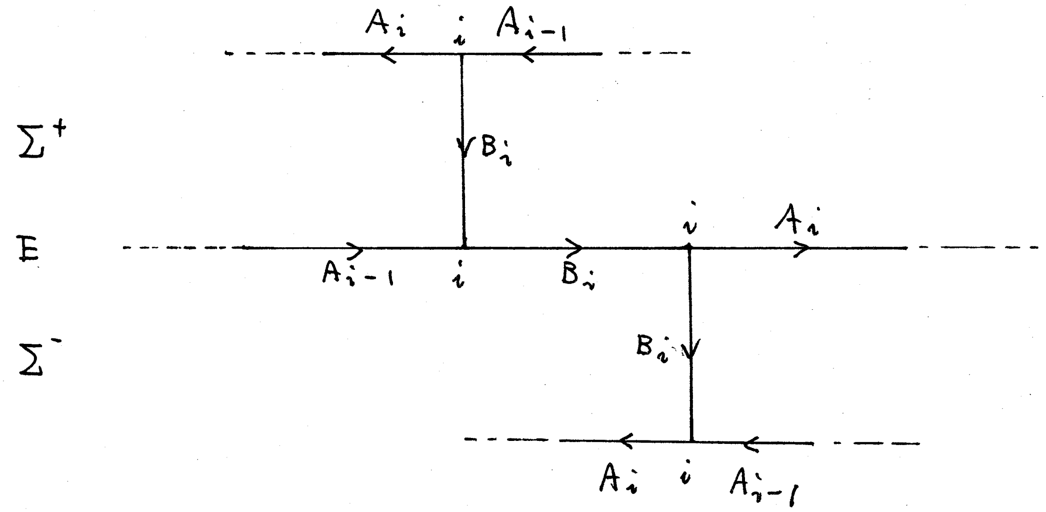
<u>Case</u> 1.　B_iが3本続いている時。



と仮定すると

$$[X] = A_i^{-1} B_i^{2} \cdots\cdots$$

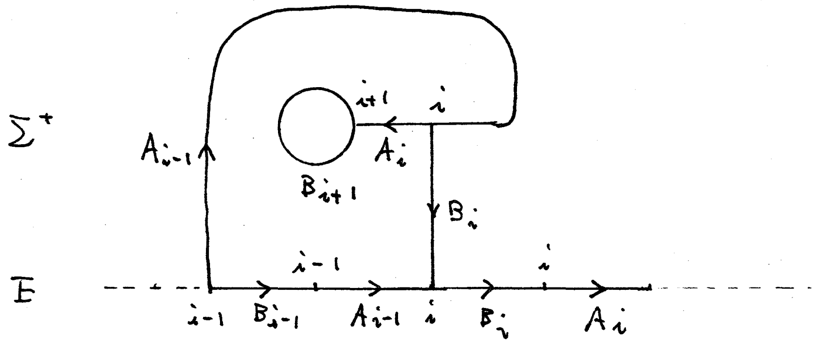
となっているが，これはΣ^-には存在しないから，



でなければならない。

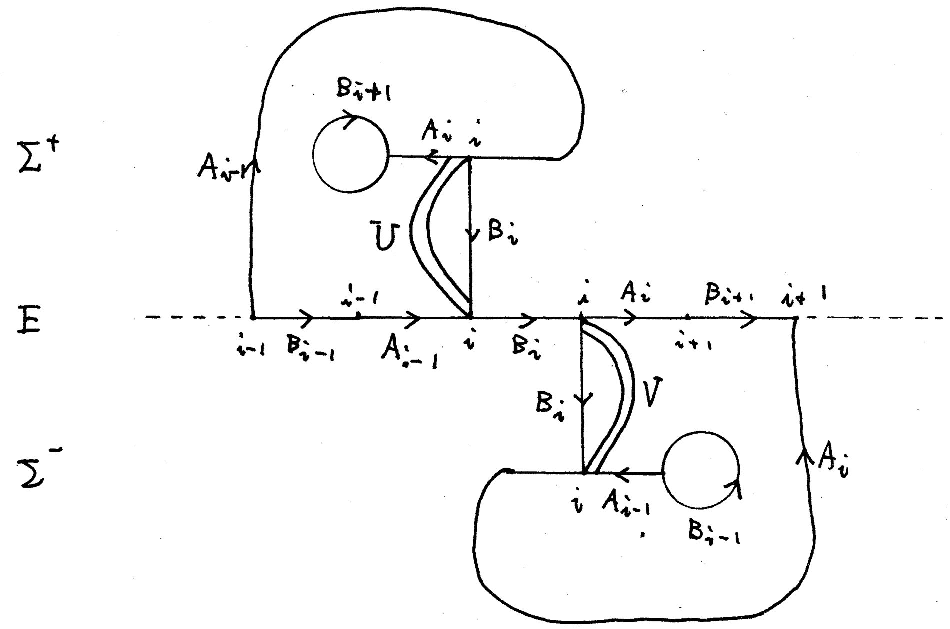
次に，$\left\{\begin{array}{l} A_{i-1} \text{ の端点は } i-1,\ i, \\ A_i \text{ の端点は } i,\ i+1 \end{array}\right.$

である事に注意すると，この先の部分が決定出来る。



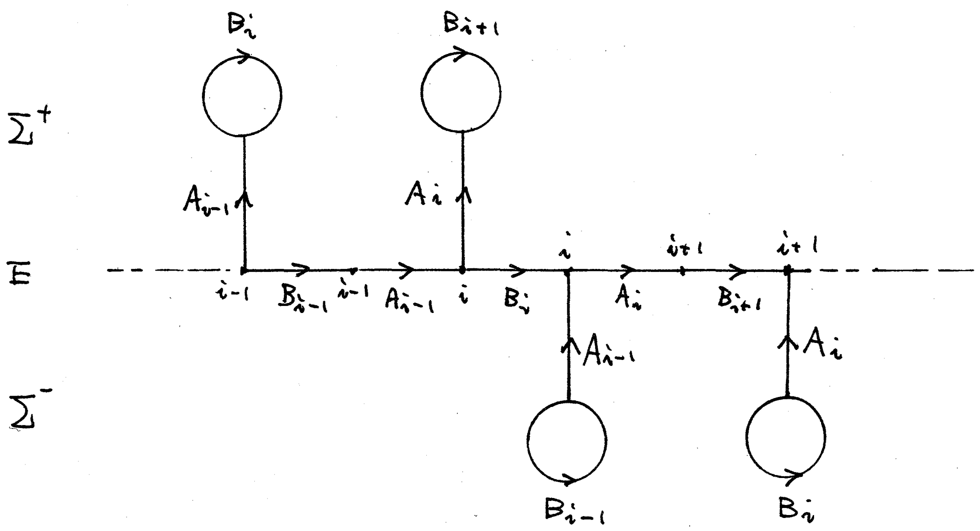
と仮定する。即ち，Σ^+ の A_{i-1} で E 上にないもの……これは丁度 1 本である……の端点が E 上に 1 つあるとする。すると A_i の行き先の頂点 $i+1$ が E 上にある事はないから，その先は loop B_{i+1} にならざるを得ない。

ここで identification of faces を調べると

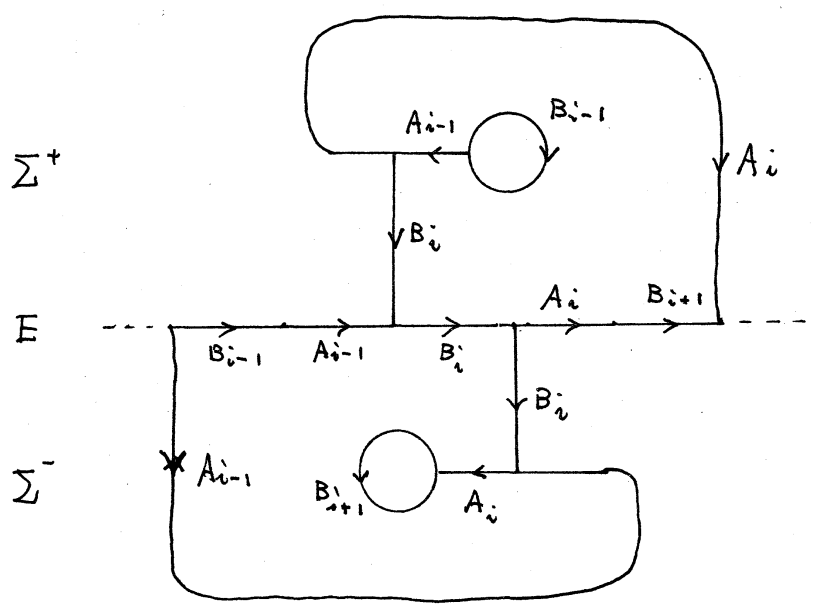


となる以外にない。

ここで図の通りに lateral stripes の pair (U, V) が採れるから，これを用いて横変形(I_E)を行なう。

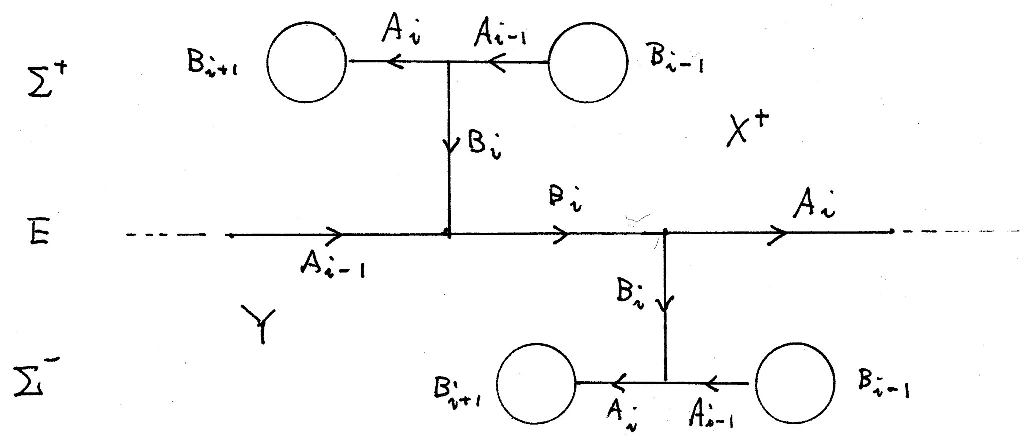


という結果になって，この部分は (S^2, G_0) と一致している。



となっている場合。　これも Σ^+ での A_i の在り方を仮定す

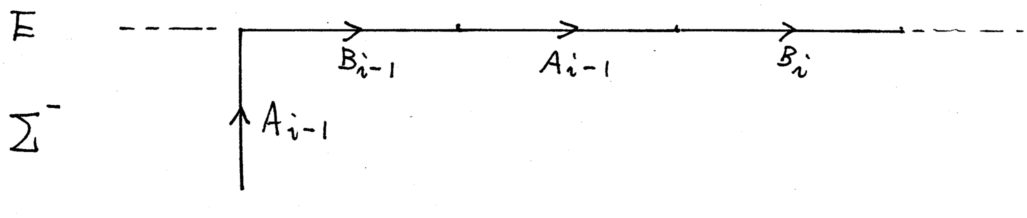
れば unique に定まっている。 B_i に対して横変形(II)を行なって，先程の上下が入れ換った図に直してから全く同様に横変形(IE)を実施すると，結果も Σ^+ と Σ^- を入れ換えた図になる。 ここで B_i の向きは3本共逆につけ直しておく。



となっている場合。これも Σ^+ の状態を仮定すれば Σ^- は必然的にこうなる。

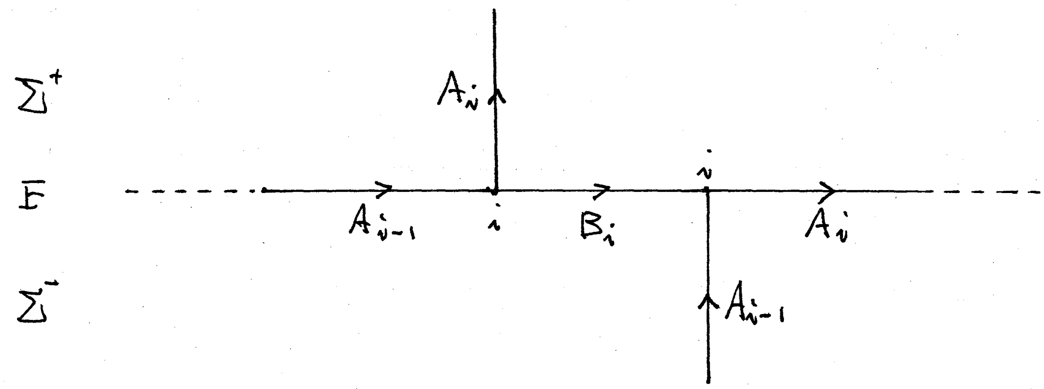
$$[X] = A_i^{-1} A_{i-1}^{-1} B_{i-1} A_{i-1} B_i^2 A_i \cdots\cdots$$

が Σ^+ で読み取れて，Σ^- で B_i^2 を含むのは Y だけであるから $Y = X^-$ でなければならない。



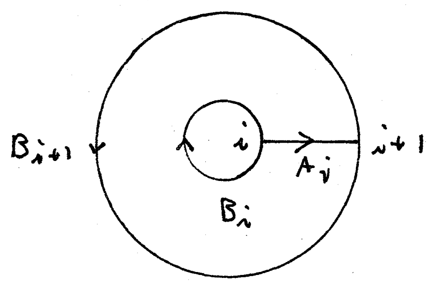
とならざるを得ないが，これは DS-diagram with E-cycle の条件に反する。従って，この状況は起っていない。

Case 2.



の場合。 Σ^+ の A_i についてその vertex $i+1$ が E-cycle 上にあると仮定すると (S^2, G) には $A_i B_{i+1}^{-1} A_i^{-1} B_i^{-1}$ なる四角形が存在する事になる。

それは Σ^- に於て



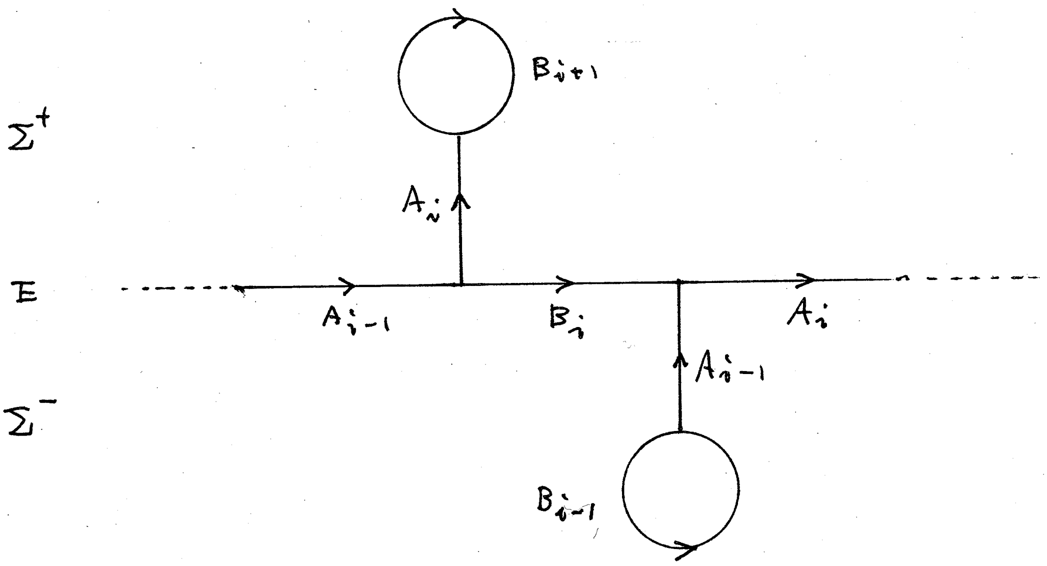
が存在する事を意味する。明らかに G は connected ではなくなるから、

"Σ^+ の A_i の vertex $i+1$ は Σ^+ の interior にあり、

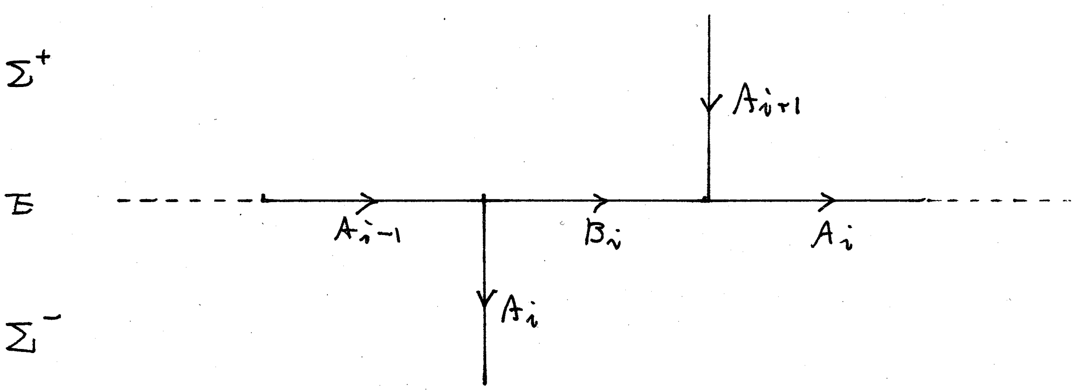
Σ^- の A_{i-1} の vertex $i-1$ は Σ^- の interior にある。"

と云う事になった。

すると，必然的に，



となる以外にない。

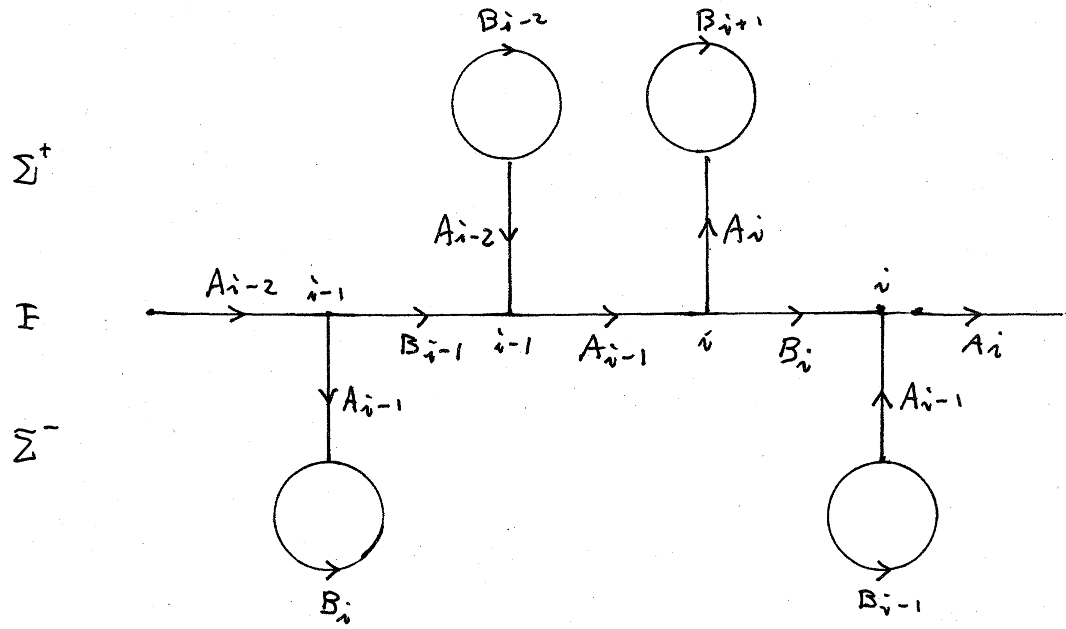


の時も 上下が入れ換っているだけで全く同じ議論が出来るから，結果は上図の上下を入れ換えたものとなる。

Case 1 と Case 2 を合わせると，，

部分的には，（S^2, G_0）と同じ，又は 上下の入れ換えで同じになる。

Step. 3.



となる事があるかと云うと、一見して Σ^- に A_{i-1} が2本出て来るから DS-diagram with E-cycle になっていない。

もっと原始的に、DS-diagram の face の identification が不可能である事からも、この状態が起らないと云える。

従って

"全体として、(S^2, G_0) と同じ、又は上下の入れ換えで同じになる。"

事になった。即ち、(S^2, G_0) に横変形(I E), (II) を有限回施して (S^2, G) に移行出来る、と云う事である。

さて、(S^2, G_0) で定まる 3-manifold は S^3 である事は既に注意したが、最後に、$DS_E(L_n) \Rightarrow (S^2, G)$ で与えられ

る 3-manifold の正体について少し述べておく。

(S^2, G_0) から start して (S^2, G) に移行するに当って必要とする横変形の中(II)の最少回数を p とおく。

$$n \neq 2 \Rightarrow (S^2, G) \text{ は } S^3 \text{ と } p \text{ 個の } P^3 \text{ の connected sum である。}$$

が成立する。$n=2$ が除外されている理由は今迄の議論ですぐ解る事であるし，その case は全て終っている。

証明の方法としては，例えば"基本変形"に依っても良いだろうが，他に，DS-diagram から connected sum の構造を読み取る事も可能である。