数理解析研究所講究録
563巻 1985年 91-95

S^2 の identification

神戸大学教養部 池田裕司 (Hiroshi Ikeda)

我々の考察の対象となる 2-sphere S^2 の identification は次の通り定義されるものである.

Def. 1 P を polyhedron として, $f: S^2 \to P$ が S^2 の identification である。

$\equiv$ (i) f は non-degenerate cont. onto map である.

(ii) $\exists$ connected 1-polyhedron $G \subset S^2$

and $\exists$ set of finite pts $V \subset G$

$\to$ (1) $\forall$ component X of $S^2 - G$ or $G - V$,

$f|X : X \to f(X)$ は homeo.

(2) $f(S^2 - G) \cap f(G) = \emptyset = f(G - V) \cap f(V)$

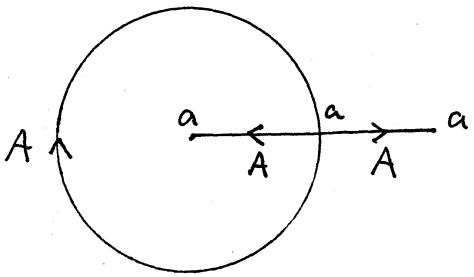
(3) $\forall$ components X, Y of $S^2 - G$ or $G - V$,

$f(X) \cap f(Y) \neq \emptyset \Rightarrow f(X) = f(Y)$

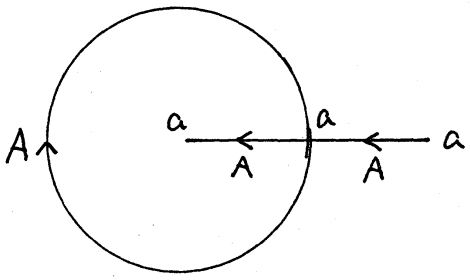
(4) $\forall$ component X of $S^2 - G$, $\exists_1$ component X' of $S^2 - G \to X \cap X' = \emptyset$, $f(X) = f(X')$

S^2 を 3-ball B^3 の boundary と思えば, S^2 の identification f を用いて, 3-polyhedron B^3/f が得られる。
以下では B^3/f が manifold である条件を述べる。

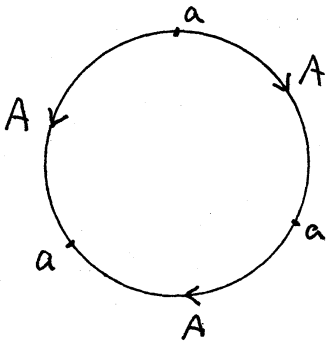
Examples



S^2/f = Dunce hat
B^3/f は manifold でない.



S^2/f = Dunce hat
$B^3/f = S^3$



S^2/f = Dunce hat
B^3/f は manifold でない.

さて，# で components の個数を表わす事にして，

$$E(f) = \#(V/f) - \#(G-V/f) + \#(S^2-G/f)$$

とおく。

Prop. 1　B^3/f : manifold $\Longleftrightarrow$ $E(f)=1$

これは良く知られた定理で，Seifert-Threlfall の教科書には必要十分条件として述べてある。ところが，先の例には $E(f)=1$ であり乍ら B^3/f が manifold でないものが含まれている。これは，我々の identification が彼等のそれと異なっている事を示している。

Def. 2　S^2 の identification $f: S^2 \longrightarrow P$ が (*) を満たす。

$\equiv$
(1)　(G, V) は 3-regular graph
(2)　$\forall a \in V$,　$\#f^{-1}(f(a)) = 4$
(3)　$\forall e \in \{G-V \text{ の component}\}$,　$\#f^{-1}(f(e)) = 3$

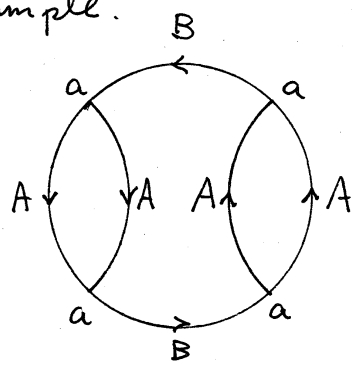
identification with (*) なるものを考える根拠については 数理研講究録、524 --- K.524 と書く ---- を参照の事。

Prop. 2 f : identification with (*)
$\Rightarrow$ S^2/f : closed fake surface

Prop. 3 f : identification with (1), (3) of (*)
$\Rightarrow$ f : local homeomorphism

Prop. 4 f : identification with (*) $\Rightarrow$ B^3/f : manifold

Example.



$E(f)=1$,
(G, V) : 3-regular
$f^{-1}f(a)$: 4点
$f^{-1}f(A)$: 4本
$f^{-1}f(B)$: 2本

Prop. 5 f : identification with (1), (3) of (*)
$E(f)=1 \Rightarrow f$ は (*) の (2) を満たす。

Prop. 6 f : identification with (1), (3) of (*) の時。
B^3/f : manifold $\Leftrightarrow$ $E(f)=1$.

Remark. 後の方の Example は非常な興味を含んでいる。図から読み取れる情報，即ち，頂点，辺，面の identification，だけからは，map の migeneous が証明出来ない。特別にこの例については，map の如何を問わず B^3/f が manifold にならない事はすぐ解るのであるが，それで良いとは言えない。一般的にこの議論をしなければならないとすると煩わしい。この点については，Seifert - Threlfall の identification の場合は，彼等は正確な記述を explicit にはしていないので想像であるが，定義の段階で除外されているのであろう。

ところが，これで我々が不利になっている事はないのである。というのは，我々の対象は identification with (*)，言い換えれば DS-diagram，である事に注意して，K.524 の Prop. 9 を思い出して欲しい。これをもっと精密にそうと，

$$X \sim X' \Leftrightarrow [X] = AB w_X \,,\ [X'] = AB w_{X'}$$

となる。DS-diagram 上に AB は丁度2ヶ所に現われるから，図の情報だけで identification map が一意に定まっている事が証明されるのである。

従って

"DS-diagram をえると manifold は unique に定まる。"