

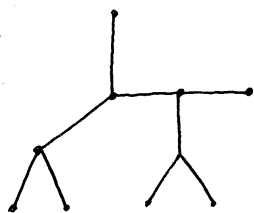
$\omega$  の高さをもつ closed 1-complex II.

東大 小林一章 (Kazuaki Kobayashi)

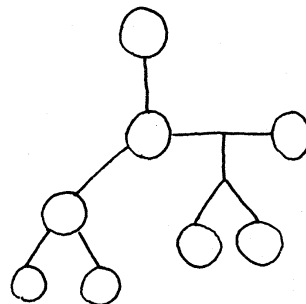
本論文は数解研講究録 542 号掲載の同名の論文に読つたものです。

以下で closed 1-complex と言つたら特に断わらない限り次のような 1 次元複体  $K$  とします。先ず  $T$  を頂点の degree が 1 又は 3 のみであるような tree (cycle を含まない 1 次元複体) とする。  $T$  の degree 1 の全ての頂点に circle をつけ、いくつかの degree 3 の頂点を circle に置き代えたものを  $K$  とする。

例.  $T$ :



$K$ :



closed 1-complex  $K$  がコンパクト、向きづけ可能な次元多様体  $M^3$  で 0-contractible とは、次の性質をもつ 2 次元複体  $L$  と PL-写像  $f: L \rightarrow M^3$  が存在する事である。

即ち (i)  $\hat{K}$  を  $K$  と同型の closed 1-complex としたとき、 $L$

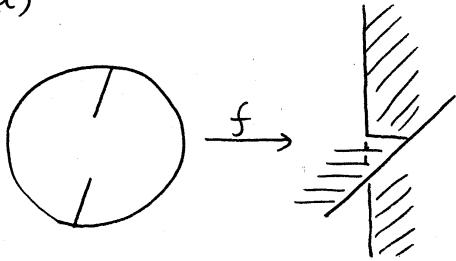
は  $\tilde{K}$  の circle の部分に 2-ball を張った 2次元複体である。

(従って  $|L - \tilde{K}|$  は南 2-球体の非交和で,  $L$  は 1 葉にカラプシブル) (2)  $f(\tilde{K}) = K$  かつ  $f|_{\tilde{K}}$  は埋め込みになっている。

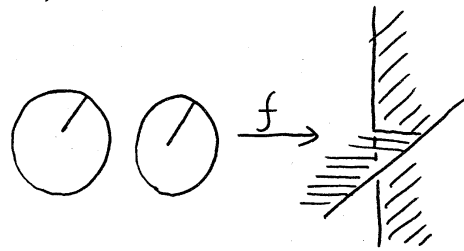
すると  $f|_{\tilde{K}}$  を固定するホモトピーで  $f$  を変形して  $f$  の特異点集合  $\{x \in L \mid \#f^{-1}f(x) \geq 2\}$  は次の 3 つのタイプのもので出まると ([5])。

### I. Clasp singularities

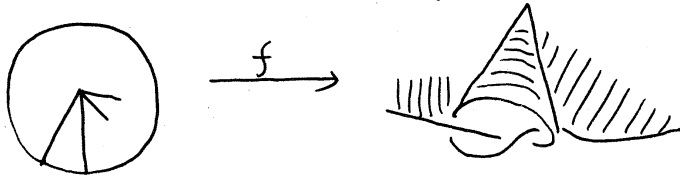
(a)



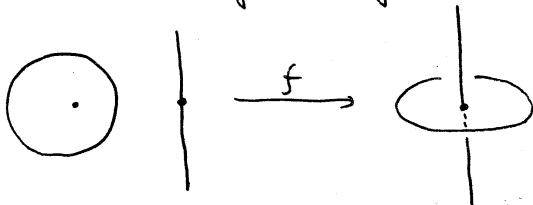
(b)



### II. Branch point singularity



### III. Isolated singularity



$V$  をハンドル体としたとき  $sp(V)$  は  $V$  の 1 つのスパン,  $S_p(V)$  は  $V$  のスパンの集合とする (ただし  $sp(V)$  は常に

closed 1-complex とし, 特に  $V$  が 3-球体の時は  $sp(V)$  は 1 とする。) closed 1-complex  $K$  が向きづけ可能なコンパクト 3次元多様体  $M^3$  の中で  $\omega$  の高さをもつ という事の定義は文献 [K] を参照して下さい。

定理 2.  $V$  を種数  $g$  のハンドル体とする。  $K$  を  $V$  に含まれている closed 1-complex とする。

$V$  の中で  $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$  となる列があるならば次のいずれかの場合が起こる。

(I)  $V$  内に次の性質をもつコンパクト 3次元多様体  $W_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) がある。即ち  $W_i \supseteq U(K_i)$ ,  $W_{i-1} \supseteq W_i$  かつ

$\pi_1(\partial W_i) \longrightarrow \pi_1(V - \overset{\circ}{U}(K_{n-1}))$  が  $i = 0, 1, \dots, n-1$  には射し単射。 又は

(II) ある  $i$  には射し  $U(K_i) \subset B^3$  となる 3-球体  $B^3$  が存在する。

証明.  $V$  内で  $K_0 < K_1 < \dots < K_n = K$  だから ([K, Lemma 1, Cor. 1]) より  $\supset U(K_0) \supset \supset U(K_1) \supset \dots \supset U(K_n)$  且つ

$g(U(K_0)) \geq g(U(K_1)) \geq \dots \geq g(U(K_{n-1}))$  また ([K, Lemma 3, Cor.]) より  $g(U(K_0)) \leq g(V) = 3$ , もし  $g(U(K_n)) \leq 2$  ならば定理 1 で証明されているから  $g(U(K_n)) = 3$  とする。

まず  $k = n-1$  のとき  $W_{n-1} \supset U(K_{n-1})$  かつ

$\pi_1(\partial W_{n-1}) \xrightarrow{i_{n-1}*} \pi_1(V - \overset{\circ}{U}(K_{n-1}))$  が単射であるか  $U(K_{n-1})$  を含む 3-球体  $B^3$  が存在する事を示す。

もし  $\pi_1(\partial U(K_{n-1})) \xrightarrow{\tilde{\iota}_{n-1}} \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-1}))$  が単射であれば  $W_{n-1} = U(K_{n-1})$  とすればよい。

$\ker \tilde{\iota}_{n-1} \neq (e)$  のとき  $\partial U(K_{n-1})$  上に次の性質をもつ単純閉曲線  $\alpha$  が存在する。即ち  $\alpha \neq 0$  on  $\partial U(K_{n-1})$  且  $\alpha$  は  $V - \mathring{U}(K_{n-1})$  で特異点のない 2-ball  $D_\alpha^2$  を張る。

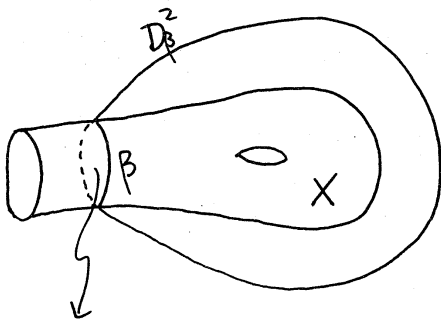
「 $\partial U(K_{n-1})$  上で  $\alpha \sim 0$  (ホモトピック) かつ  $\alpha$  は  $U(K_{n-1})$  で特異点のない 2-球体を張る」事が起ったとする。この特異点のない 2-球体を  $\tilde{D}_\alpha^2$  とすると  $\Sigma_\alpha^2 = D_\alpha^2 \cup_\alpha \tilde{D}_\alpha^2$  は 2-sphere で  $\Sigma_\alpha^2$  は  $V$  で 3-球体  $B_\alpha^3$  を張る。  $W_\alpha = U(K_{n-1}) \cup B_\alpha^3$  とする。  $W_\alpha$  はハンドル体で  $g(W_\alpha) < g(U(K_{n-1})) = 3$ 。  $K_n$  が  $W_\alpha$  で geometrically essential のとき  $K_n \notin Sp(W_\alpha)$  である。何故ならもし  $K_n \in Sp(W_\alpha)$  なら  $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset W_\alpha = \tilde{U}(K_n)$  となり [K, Lemma 1] に矛盾。従って  $K_n \notin Sp(W_\alpha)$  となり  $\therefore sp(W_\alpha) < K_n$  となり  $sp(W_\alpha)$  がある事になり  $K_{n-1} < K_n$  に矛盾。次に  $K_n$  が  $W_\alpha$  で geom. inessential なら  $K_n \subset W_\alpha - D_1^2$  となり  $W_\alpha$  の meridian 2-ball  $D_1^2$  が存在する。このとき  $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset W_\alpha - D_1^2$  である。何故ならもし  $U(K_{n-1}) \cap D_1^2 \neq \emptyset$  なら  $U(K_{n-1}) \cap D_1^2 = \tilde{D}_1^2 \cup \dots \cup \tilde{D}_p^2$  で  $\tilde{D}_i^2$  は  $U(K_{n-1})$  の meridian 2-ball。従って  $K_n$  は  $U(K_{n-1})$  で geom. essential だから  $\tilde{D}_i^2 \cap K_n \neq \emptyset$  ( $i=1, 2, \dots, p$ )  $\therefore K_n \cap D_1^2 \neq \emptyset$  となり矛盾。  $\therefore U(K_{n-1}) \subset W_\alpha - D_1^2$  且  $\therefore$  もし  $K_n \in Sp(W_\alpha - D_1^2)$  なら ( $\therefore$   $W_\alpha - D_1^2$  は genus 1 のハンドル体)。

$K_n \subset U(K_{n-1}) \subset W_\alpha - D_1^2 = \tilde{U}(K_n)$  となり (Lemma 1 [K]) に矛盾.

$\therefore K_n \notin Sp(W_\alpha - D_1^2)$ . 従って  $K_n$  が  $W_\alpha - D_1^2$  で geom. essential なら  $Sp(W_\alpha - D_1^2) < K_n$  となり  $K_{n-1} < K_n$  に矛盾. 更に  $K_n$  が  $W_\alpha - D_1^2$  で geom. inessential なら  $K_n \subset W_\alpha - (D_1^2 \cup D_2^2)$  となる  $W_\alpha - D_1^2$  の meridian 2-ball  $D_2^2$  がある. ところで  $W_\alpha - (D_1^2 \cup D_2^2) \cong B^3$ . 従ってこのとき  $K_n$  を含む 2-ball が存在し (II) が起る. 以上より  $\alpha \sim 0$  on  $\partial U(K_{n-1})$  かつ  $\alpha$  が  $U(K_{n-1})$  で特異点のない 2-ball を張るときは  $K_n$  を含む 2-ball  $B^3$  が存在し (II) が起る.

「 $\alpha \sim 0$  on  $\partial U(K_{n-1})$  且つ  $\alpha$  は  $U(K_{n-1})$  で特異点のない 2-ball を張る」この場合が起らない事は ([K. Th. 1]) の証明と全く同じに証明出来る. 次に  $\{D_1^2, D_2^2, D_3^2\}$  を  $V$  の meridian ball system とすると ([K. Th. 1]) の証明と全く同じにして  $\bigcup_{i=1}^3 D_i^2 \cap D_\alpha^2 = \emptyset$  且つ  $\bigcup_{i=1}^3 D_i^2 \cap U(K_{n-1}) = \tilde{D}_1^2 \cup \dots \cup \tilde{D}_p^2$  で  $D_i^2$  は  $U(K_{n-1})$  に proper に埋め込まれた 2-ball で  $\partial \tilde{D}_i^2$  は  $\partial U(K_{n-1})$  で null-homotopic でない. 故に  $\bigcup_{i=1}^3 D_i^2$  で  $U(K_{n-1})$  を cut したとき  $\alpha$  を含む成分を  $U_\alpha$  とすると  $g(U_\alpha) \leq 2$  であるが  $g(U_\alpha) \leq 1$  のときは ([K. Th. 1]) で証明済み. 故に  $g(U_\alpha) = 2$  とする.  $V_\alpha \equiv V - \bigcup_{i=1}^3 \overset{\circ}{U}(D_i^2)$  とおくと  $V_\alpha \cong B^3$  (1)  $\alpha \sim 0$  on  $\partial U_\alpha - (\partial U_\alpha \cap \bigcup_{i=1}^3 \overset{\circ}{U}(D_i^2))$  のとき  $X \equiv U_\alpha \cup U(D_\alpha^2)$  とすると  $\partial X \cong S^1 \times S^1$ . もし  $X$  が solid torus なら  $W_{n-1} \equiv U(K_{n-1}) \cup U(D_\alpha^2)$  は  $U(K_{n-2})$  を含む genus 2 のハンドル体で, このと

きは前と同様にして  $K_n$  を含む 3-ball が存在するか  $K_{n-1} < K_n$  の条件③に矛盾する。従って  $X$  は solid torus でない。もし  $\pi(\partial X) \rightarrow \pi(V_0 - \mathring{W}_{n-1})$  が単射でないなら  $\partial X$  上に次の性質をもつ単純閉曲線  $\beta$  がある。即ち  $\beta \neq 0$  on  $\partial X$  且つ  $\beta$  は  $V_0 - \mathring{W}_{n-1}$  で特異点のない 2-ball  $D_\beta^2$  を張る。

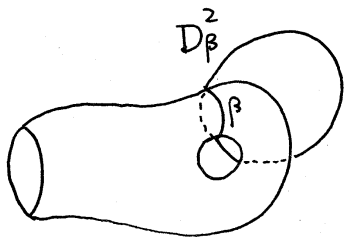


これは一般に 2-ball ではない

(a)  $\beta \sim 0$  on  $\partial X - (\partial X \cap \bigcup_{i=1}^3 D_i^2)$  のとき。  $\partial(X \cup U(D_\beta^2)) \cong S^2 \cup (S^1 \times S^1)$  は 2 つの成分に分れるが、 $S^2$  と同相な方の成分を  $Y$  とおくと  $Y$  は  $V_0$  で 3-ball  $B^3$  を bound し、こ

の 3-ball  $B^3$  は  $B^3 \supset X$  且つ  $B^3 \cap (W_{n-1} - \mathring{X}) = \emptyset$  と取れる。従って  $W'_{n-1} = W_{n-1} \cup B^3$  とおくと  $W'_{n-1}$  はハンドル体で  $g(W'_{n-1}) \leq 1$  且つ  $U(K_{n-1}) \subset W'_{n-1}$  となり、この時も前と同様にして  $K_n$  を含む 3-ball が存在するか  $K_{n-1} < K_n$  の条件③に矛盾。従ってこのとき  $\pi(\partial X) \rightarrow \pi(V_0 - \mathring{W}_{n-1})$  は単射であるとしてよい。(又は (a) の場合が起こらない)。

(b)  $\beta \neq 0$  on  $\partial X - (\partial X \cap \bigcup_{i=1}^3 D_i^2)$  のとき。  $\partial(X \cup U(D_\beta^2)) \cong S^2$ 。



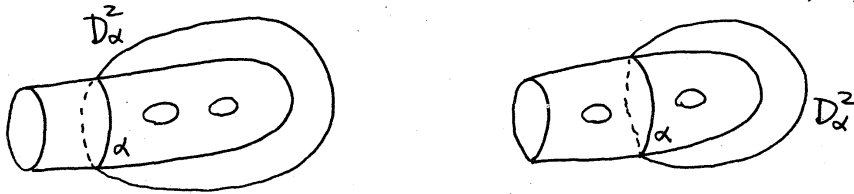
従って 3-ball  $B^3$  が存在し、 $B^3 \supset X$  且つ  $B^3 \cap (W_{n-1} - \mathring{X}) = \emptyset$  と取れる。そこで  $W'_{n-1} = W_{n-1} \cup B^3$  とおくと  $W'_{n-1}$

はハンドル体で  $g(W'_{n-1}) \leq 1$  且つ  $U(K_{n-1}) \subset W'_{n-1}$  となりこの時

も前と同様にして  $K_n$  を含む  $\epsilon$ -ball が存在するか  $K_{n-1} < K_n$  の条件③に矛盾. 従ってこのときも  $\pi(\partial X) \rightarrow \pi(V_0 - \overset{\circ}{W}_{n-1})$  は単射である. 従って van Kampen の定理より  $\pi(\partial W_{n-1}) \rightarrow \pi(V - \overset{\circ}{W}_{n-1})$  は単射.

(b)  $\alpha \sim 0$  on  $\partial U_\alpha - (\partial U_\alpha \cap \bigcup_{i=1}^3 D_i^2)$  のとき, このときも  $X \cong U_\alpha \cup U(D_\alpha^2)$  がハンドル体なら (i) のときと同様に証明終了.

そこでハンドル体でないとする.  $\partial(U_\alpha \cup U(D_\alpha^2)) \cong S^2 \cup (S^1 \times S^1 \# S^1 \times S^1)$  又は  $(S^1 \times S^1) \cup (S^1 \times S^1)$ . 前者の場合は (i) (a) の場合と同じ



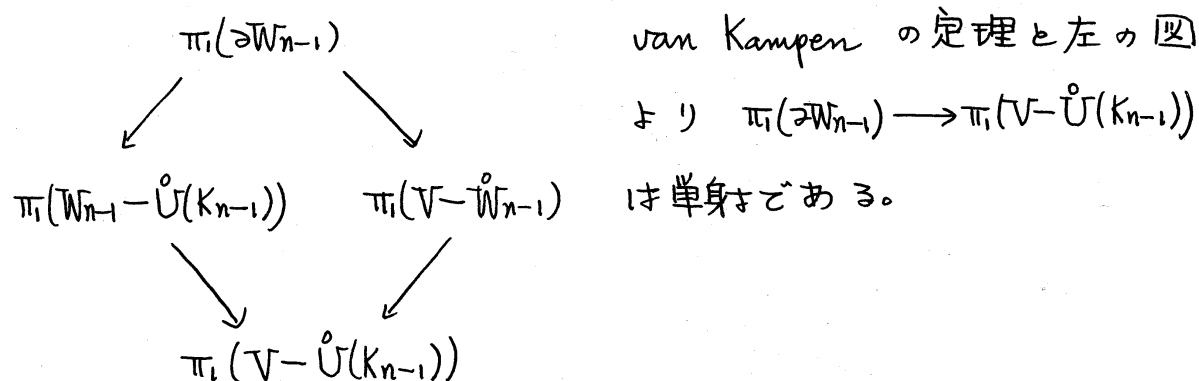
後者の場合  $\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(V_0 - \overset{\circ}{W}_{n-1})$  が単射でないなら  $\partial X$  上に次の性質をもつ単純閉曲線  $\beta$  がある. 即ち  $\beta \neq 0$  on  $\partial X$  且つ  $\beta$  は  $V_0 - \overset{\circ}{W}_{n-1}$  で特異点のない 2-ball  $D_\beta^2$  を張る. (今度は  $\beta \neq 0$  on  $\partial X \iff \beta \neq 0$  on  $\partial X$ ) このときは (i) (b) の場合と同じにして  $K_n$  を含む  $\epsilon$ -ball が存在するか又は  $K_{n-1} < K_n$  の③の条件に矛盾. 従って  $\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(V_0 - \overset{\circ}{W}_{n-1})$  が単射であり van Kampen を使って  $\pi_1(\partial W_{n-1}) \rightarrow \pi_1(V - \overset{\circ}{W}_{n-1})$  が単射となる.

次に  $\pi_1(\partial W_{n-1}) \rightarrow \pi_1(W_{n-1} - \overset{\circ}{U}(K_{n-1}))$  が単射であることを示す.

もし単射でないなら単純閉曲線  $\beta$  が  $\partial W_{n-1}$  上に存在し,  $\partial W_{n-1}$  上でホモトピー 0 でなく  $W_{n-1} - \overset{\circ}{U}(K_{n-1})$  で特異点のない 2-ball  $D_\beta^2$  を張る.  $\beta \subset \partial W_{n-1} - \overset{\circ}{U}(D_\alpha^2)$  としよう. ところが  $W_{n-1} -$

$\mathring{U}(K_{n-1}) \simeq \partial U(K_{n-1}) \cup D_\alpha^2$  であり  $K_{n-1}$  からの radial projection に  
よって  $D_\beta^2 \subset U(K_{n-1})$  と出来る。  $\alpha \cap \beta = \phi$  かつ  $\alpha \neq \beta$  だか  
ら  $D_\beta^2 \cap \alpha = \phi$  と出来る。  $\therefore D_\alpha^2 \cap D_\beta^2 = \phi$ .  $\therefore D_\beta^2 \subset \partial U(K_{n-1}) -$   
 $D_\alpha^2$ .  $\therefore \beta \simeq 0$  in  $\partial W_{n-1}$ . これは矛盾.

$\therefore \pi_1(\partial W_{n-1}) \rightarrow \pi_1(W_{n-1} - \mathring{U}(K_{n-1}))$  は単射.



次に  $k = n-2$  のときを考える。

もし  $\pi_1(\partial U(K_{n-2})) \xrightarrow{\tilde{i}_{n-2*}} \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-1}))$  が単射であれば

$W_{n-1} \subset U(K_{n-2})$  である。何故なら  $\pi_1(\partial U(K_{n-2})) \rightarrow \pi_1(U(K_{n-2}) - \mathring{U}(K_{n-1}))$  が先ず単射である。何故ならもし単射でなければ  $\partial U(K_{n-2})$  上に単純閉曲線  $\alpha$  が存在して  $\partial U(K_{n-2})$  上で  $\alpha \neq 0$  且つ  $\alpha$  は  $U(K_{n-2}) - \mathring{U}(K_{n-1})$  内で特異点のない 2-ball  $D_\alpha^2$  を bound する。すると  $V \equiv \overline{U(K_{n-2}) - U(D_\alpha^2)}$  は genus が  $U(K_{n-2})$  より小さいハンドル体で  $U(K_{n-1}) \subset V$ . これは  $K_{n-2} < K_{n-1}$  に矛盾。従って上の写像は単射。これと  $\pi_1(\partial U(K_{n-2})) \xrightarrow{\tilde{i}_{n-2*}} \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-1}))$  が単射である事を仮定すると  $W_{n-1} \subset U(K_{n-2})$  が示せる。

次に  $\ker \tilde{i}_{n-2*} \neq \{e\}$  のとき。  $W_{n-1} \subset U(K_{n-2})$  のときは  $U(K_{n-1})$

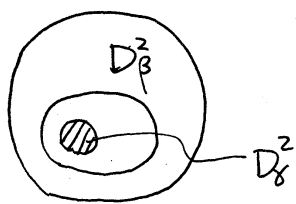


から  $W_{n-1}$  を作った時と全く同じにして  $W_{n-2} = U(K_{n-2}) \cup U(D_{\alpha_1}^2)$  とする。ただし  $\alpha_1$  は  $\partial U(K_{n-2})$  上の単純閉曲線で  $\partial U(K_{n-2})$  上で null homotope でなく  $V - \mathring{U}(K_{n-2})$  で特異点のない 2-ball  $D_{\alpha_1}^2$  を bound してゐるとする。  $\pi_1(\partial W_{n-2}) \longrightarrow \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-2}))$  が単射である事は  $k=n-1$  の時と全く同じに示せる。(従つて上のよふ  $D_{\alpha_1}^2$  が何個かあるときは実際には平行になつてゐると考えられる)。次に  $\pi_1(\partial W_{n-2}) \longrightarrow \pi_1(W_{n-2} - \mathring{U}(K_{n-1}))$  が単射でなければ  $\partial W_{n-2}$  上に次の性質をもつ単純閉曲線  $\beta$  がある。即ち  $\partial W_{n-2}$  上で null-homotopic でなく,  $W_{n-2} - \mathring{U}(K_{n-1})$  で特異点のない 2-ball  $D_{\beta}^2$  を張る。  $k=n-1$  のときと同様に

$\pi_1(\partial W_{n-2}) \longrightarrow \pi_1(W_{n-2} - \mathring{U}(K_{n-2}))$  は単射だから

$D_{\beta}^2 \cap \partial U(K_{n-2}) \neq \emptyset$  また  $\pi_1(\partial U(K_{n-2})) \longrightarrow \pi_1(U(K_{n-2}) - \mathring{U}(K_{n-1}))$

は単射だから  $D_{\beta}^2 \cap \partial U(K_{n-2})$  の  $D_{\beta}^2$  での innermost component



$D_{\beta}^2$  は  $W_{n-2} - \mathring{U}(K_{n-2})$  に含まれる。従つて  $D_{\beta}^2$  は  $D_{\alpha}^2$

と平行、これは  $k=n-1$  の時と同様にして矛盾。

$\therefore \pi_1(\partial W_{n-2}) \longrightarrow \pi_1(W_{n-2} - \mathring{U}(K_{n-1}))$  は単射。

よつて van Kampen の定理により

$\pi_1(\partial W_{n-2}) \longrightarrow \pi_1(V - \mathring{U}(K_{n-1}))$  が単射である事が示せ

た。以下同様に求める  $W_k \supset U(K_k)$  が作れる。

命題.  $M^3 = V_1 \cup V_2$  を種数 3 以下の Heegaard splitting とする。

$K$  は  $V_1$  内の closed 1-complex で  $M^3$  で  $\omega$  の高さをもつとする。

このとき次のいずれかが起る。

(1)  $K$  は  $V_1$  で  $\omega$  の高さをもつ。

(2)  $K$  は  $V_1$  で  $K_0 < K_1 < \dots < K_m = K$  且  $\rightarrow K_0 \in Sp(V_1)$  という列をもつ。

(3)  $K$  は  $W$  で  $K_0 < K_1 < \dots < K_m = K$  且  $\rightarrow K_0 \in Sp(W)$  という列をもつ。ただし  $W$  は  $V_1$  から適当な個数  $n$  の non-parallel meridian 2-balls を取り除いて出来る種数  $n-1$  のハンドル体。

(4)  $K$  を含む  $M^3$  内の 3-ball  $B^3$  がある。

証明 (1) 以外の場合を考える。

(I) 先ず  $K$  が  $V_1$  で geometrically essential の場合を考える。

([K. Lemma 3. Cor]) より,  $V_1$  で  $K_0 < K_1 < \dots < K_m = K$  となる  $m$  が存在する。従って  $V_1 \supset \exists U(K_0) \supset \exists U(K_1) \supset \dots \supset \exists U(K_m)$

且  $\rightarrow g(V_1) \geq g(U(K_0)) \geq \dots \geq g(U(K_{m-1}))$ . もし  $K_0 \in Sp(V_1)$

なら (2) が起った事になる。  $K_0 \notin Sp(V_1)$  なら  $V_1 \supset U(K_0)$  だから

ら  $sp(V_1) < K_0$  となる  $sp(V_1)$  があるか又は  $g(V_1) > g(U(K_{-1}))$

で  $K_{-1} < K_0$  となる  $K_{-1}$  が存在する。前者の場合は  $V_1 = K'_0$ ,

$K_R = K'_{R+1}$  とおけば  $K'_0 < K'_1 < \dots < K'_{m+1} = K$  で  $K'_0 \in Sp(V_1)$  であり

(2) が起った事になる。 後者の場合は  $K'_0 = K_{-1}$ ,  $K'_{R+1} = K_R$  とお

くと,  $K'_0 < K'_1 < \dots < K'_{m+1} = K$  in  $V_1$  という列が存在する事になる。この列に同じ事と考えると  $sp(V_1) < K'_0$  (即ち (2) が起る) 又は  $g(U(K'_{-1})) < g(V_1)$  で  $K'_{-1} < K'_0$  in  $V_1$  となる  $K'_{-1}$  が存在する。後者の場合が限りなく起ると結局

$$\dots < K_{-2} < K_{-1} < K_0 < K_1 < \dots < K_m = K \text{ in } V_1$$

即ち、初めに与えられた列が無限に延長出来る。この時は ([K. Thm 1]) の証明からわかるように Haken の有限性定理に矛盾し、従ってこのような事は起らない。(この時 ([K. Thm 1]) 及び本論文定理 2 で示された結果を使う、ので種数が 3 以下という事がここで必要となる。) そこで  $V_1$  で  $K_0 < K_1 < \dots < K_{m_0} = K$  であって且つ  $K_{-1} < K_0$  in  $V_1$ ,  $g(U(K_{-1})) < g(V_1)$  となる  $K_{-1}$  が存在しないような  $m_0$  が存在する。従ってこのとき  $K_0 \in Sp(V_1)$  即ち (2) が起る。

(II).  $K$  が  $V_1$  で *geometrically inessential* のとき.  $K$  と交わらない  $V_1$  の meridian 2-balls が存在する (up to ambient isotopy of  $V_1$ ). それらの non-parallel な最大個数を  $k$  とし, その system を  $\{D_1^2, \dots, D_k^2\}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) とおく.  $k = n$  のときは (4) が起る事になる.  $W = (V_1 - \bigcup_{i=1}^k U(D_i^2))$  とおくと  $W$  は種数  $n-k$  のハンドル体で  $K$  は  $W$  の中で *geometrically essential*. 以下 (I) と同じ議論を行えばよい。

## 参考文献.

- [H] J. Hempel: 3-manifolds, Ann. Math. Study 86
- [K] K. Kobayashi:  $\omega$  の高さをもつ closed 1-complex, 数理解析  
研講究録 542. (1984).
- [S] N. Smythe: Handlebodies in 3-manifolds, Proc. Amer.  
Math. Soc. 26 (1970) 534-538.