数理解析研究所講究録
563巻 1985年 1-41

3次元多様体上のリーマン計量の変形

神戸大教養　河野正晴 (KOUNO Masaharu)

⓪ Hamiltonは［1］において『正のRicci曲率をもつ閉3次元多様体は正の定曲率空間になる。』ということを示しました。講演ではそのことに関連して、Ricci曲率が非負で、0になるところがlocalにある時、ある条件を仮定して、上と同様のことが言えるという話をしました。しかし、その後条件なしに、もっと一般的な形でそれがいえそうなことに気がついたのでそれについて書きます。

① ここではHamiltonの結果の簡単な解説をします。Mを閉3次元多様体とし、M上のRiemannian metric g_{ij}を1つ固定します。その時g_{ij}に依存して、curvature tensor, Ricci curvature tensor, scalar curvatureの3種の曲率が定まることは知られています。念のために定義を書いておくと以下の様なものです。$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$（行列として）、クリストフェルのシンボルを

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2} g^{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\right)$$

とします。(x_i は local coordinate です)

(1) curvature tensor

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^h_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^h_{ik} + \Gamma^h_{ip}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^h_{jp}\Gamma^p_{ik}$$

又は index を下げて書くと

$$R_{ijkl} = g_{hk} R^h_{ijl}$$

(2) Ricci curvature

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl}$$

(3) scalar curvature

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

定義を見るとわかる様に(1)が一番情報を多く含んでいて、(1)がわかれば(2)がわかり、そして(3)がわかるという様になっています。 Hamiltonの結果をもう一度書いておきます。

Theorem

Mを閉じた3次元多様体とする。 M上に g_{ij} からきまるRicci curvatureがいたるところ正である g_{ij} が存在したとすると、別のRiemannian metric $\tilde{g}_{ij}$ が存在して $\tilde{g}_{ij}$ は正の定曲率。ここで $\tilde{g}_{ij}$ が定曲率とは、$\tilde{g}_{ij}$ からきまる curvature tensor $\tilde{R}^i_{jkl}$ に対し $\tilde{R}^i_{jkl} = K(\delta^i_k \tilde{g}_{jl} - \delta^i_l \tilde{g}_{jk})$ となるKが存在することとしておく。

この定理はある状況では(2)から(1)が求まるということを言っています。Hamiltonの証明のアイディアは以下の様なものです。$\mu(x)=\sqrt{\det(g_{ij})}$　$d\mu=\mu(x)dx$,

$$r=\frac{\int R\,d\mu}{\int d\mu}$$ とします。

この時、与えられた正のRicci curvatureをもつRiemannian metric g^0_{ij} を初期値とする次の発展方程式を考えます。

$$(*)\quad \frac{\partial}{\partial t}g_{ij}(t)=\frac{2}{3}r(t)\,g_{ij}(t)-2R_{ij}(t)$$

$R_{ij}(t)$ は $g_{ij}(t)$ から定まるRicci curvatureで $r(t)$ も同様。この時この方程式(*)はlocalな解をもち，少し変形すると $0\leqq t<\infty$ で解をもち $g_{ij}(\infty)=\lim_{t\to\infty}g_{ij}(t)$ が求めるものになる。

②正の定曲率空間になれば、それはWolf[2]により完全に分類されています。例えば $\pi_1(M)=1$ なら $M\cong S^3$ となるわけです。そこで $\pi_1(M)=1$ という条件のもとでかってなmetric g^0_{ij} からRicci carvatureが正になる様なmetric g_{ij} をつくり出せれば、Poincaré Conjectureは解けるわけですが、これはどこから手をつけてよいか全くわからない難問です。そこでいくつかの中間的な考察を行なったわけですが、見るべき成果がなく、結局講演で述べた形のものを得

ただけでした。その後ごちゃごちゃした条件をはぶけるのではないか(証明は完全ではないですが)と気がついたので、それを書きます。

③次のことが成立すると思います。

Fact　Hamiltonの定理はcompactな(boundaryがあってもよい)3次元多様体についても成立する。

原稿しめきりまでに証明を完全にしようと思いましたがまだ少しgapがあるようです。(正しいということはほとんど確信しているのですが)　証明はHamiltonと同様に方程式(*)を考えます。local な解があることは同様にわかります。次に少し方程式の形を変形しながら$r(t)$を統制してやるのですが、そこで若干gapが残っています。以下ではFactが成立すると仮定します。その時講演で述べたことは次の様に条件をおとして述べられます。

Proposition

Mはcompactな3次元多様体とする。M上にRiemannian metricでRicci caruvatureが非負になるものが存在する。更にゼロになる所はlocal (3-ballのなかに含まれる)。この時Mは定曲率。

References

[1] Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Diff. Geom. 17 (1982) 255 – 306

[2] Wolf, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill, New York, 1967

Reduction Theorem of finite Abelian actions on compact 2-manifolds

上智大理工　横山和夫 (Kazuo Yokoyama)

compact connected な２次元多様体 M 上の periodic map f （$\mathbb{Z}_n$-action）に対して １次元 singular set $\mathcal{S}^1(f)$ を除去することによって 前に periodic map の分類を完成させた（詳細は［９］を参照）。 ここでは compact connected な２次元多様体 M 上の finite Abelian action に対しても同様に１次元 singular set を除去して １次元 singular set がない（あるとしても孤立点のみが singular set である） finite Abelian action の分類問題に reduction できることを示す。（例えば orientable で orientation preserving な finite Abelian action の分類は［１］でやられているので reduction した結果がこうなる場合には分類は完成する）。

以下ことわらない限り２次元多様体といえば compact で connected であるとする。（<記号の注意> ［９］では singular set を $\mathcal{S}$ で表わしたがここでは S を使う）

§1 finite Abelian action とその基本性質

<u>定義 1.1</u> G；有限アーベル群　M；(2次元)多様体 において 次の条件 (0) ～ (2) をみたす写像 $\psi : G \times M \longrightarrow M$ のことを <u>finite Abelian action (on M)</u> といい，G と M を明記したい時はここでは $\psi(G, M)$ と表わす。

(0) $\forall g \in G$ に対して $\psi_g(x) = \psi(g, x)$ で定まる写像 $\psi_g : M \longrightarrow M$ は M 上の同相写像である。

(1) $\psi_e(x) = x$　（e；G の単位元）

(2) $\psi(g' \cdot g, x) = \psi(g', \psi_g(x))$　$(\forall g, g' \in G)$

そして 上の元全体の集合を $\mathfrak{A}(G, M)$ と表わす。さらに $\mathfrak{A}(G) = \bigcup \{ \mathfrak{A}(G, M) ;\ M ; 2\text{次元多様体} \}$，$\mathfrak{A} = \bigcup \{ \mathfrak{A}(G) ;\ G ; \text{有限アーベル群} \}$ と表わす。

<u>定義 1.2</u> ① $\psi \in \mathfrak{A}(G, M)$ が <u>effective</u> とは $\{ g \in G \mid \psi_g(x) = x \quad \forall x \in M \} = \{e\}$ をみたすときをいう。

② $I_x = \{ g \in G \mid \psi_g(x) = x \}$ を $x (\in M)$ の <u>isotropy group</u> という。

③ $\psi \in \mathfrak{A}(G, M)$ が <u>free</u> とは $\forall x \in M$ に対して $I_x = \{e\}$ をみたすときをいう。

今後我々は finite Abelian action において 常に

effectiveなもののみを考えるので，特にことわらない限りeffectiveは省略して単にfinite Abelian actionという。

<u>定義 1.3</u>　２つの（finite Abelian）action $\psi, \tilde{\psi} \in \mathfrak{A}(G)$ が <u>congruent (equivalent)</u> とは次の図式が可換となる M から $\tilde{M}$ の上への同相写像 h が存在するときをいう。

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{\psi} & M \\ \downarrow id \times \downarrow h & & \downarrow h \\ G \times \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \tilde{M} \end{array}$$

（但し　$id(g) = g$　$(g \in G)$）

次に我々は M の境界上の部分集合をsetwiseに保つactionを次のように定めよう。

S_i^* は M の境界 ∂M 上のいくつかのarc，loopからなる集合で $S_i^* \cap S_j^*$ $(i \neq j)$ は空かいくつかの点で交わるものとし，$S^* = (S_1^*, S_2^*, \cdots\cdots, S_p^*)$　$(p \geqq 0)$ とおく。このとき

<u>定義 1.4</u>　G；有限アーベル群に対して次の条件（a）（3）をみたす写像 $\psi : G \times M \longrightarrow M$ のことを我々は <u>finite Abelian s-action (on M)</u> といい G, M, S^* を明記したい時は $\psi(G, M, S^*)$ と表わす。

（a）　ψ は finite Abelian action

(3) $\psi(S_i^*) = S_i^*$ ($i=1, 2, \cdots, p$)

そして 上の元全体の集合を $\mathfrak{A}_s(G, M, S^*)$ とかき，さらに $\mathfrak{A}_s(G) = \bigcup\{\mathfrak{A}_s(G, M, S^*)$; M；2次元多様体，S^*；上の条件をみたすM上の部分集合$\}$，$\mathfrak{A}_s = \bigcup\{\mathfrak{A}_s(G)$; G；有限アーベル群$\}$ と表わす。

【注】① effective，isotropy group，free はふつうの action の時と同様に定義される。

② $p=0$（S^*がないとき）なら $\mathfrak{A}(G, M) = \mathfrak{A}_s(G, M, S^*)$，$\mathfrak{A}(G) \subseteq \mathfrak{A}_s(G)$，$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_s$ である。よってふつうの finite Abelian action は $p=0$ なる finite Abelian s-action と考えられる。

次に s-action のときにも congruent (equivalent) を次のように定める。

<u>定義 1.5</u> 2つの (finite Abelian) s-action $\psi(G, M, S^*)$，$\tilde{\psi}(\tilde{G}, \tilde{M}, \tilde{S}^*)$ ($\in \mathfrak{A}_s$) が <u>s-congruent (s-equivalent)</u> とは (A) $G = \tilde{G}$ で (B) 次の条件をみたす M から $\tilde{M}$ への同相写像 $h : M \longrightarrow \tilde{M}$ が存在するときをいう。

(1)
$$\begin{tikzcd} G \times M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "id \times h"'] & M \arrow[d, "h"] \\ G \times \tilde{M} \arrow[r, "\tilde{\psi}"] & \tilde{M} \end{tikzcd}$$
が可換

(2) $\underbrace{\quad}_{}$ $p=\tilde{p}$ で $h(S_i^*)=\tilde{S}_i^*$ $(i=1,2,\cdots,p)$

但し $S^*=(S_1^*,S_2^*,\cdots,S_p^*)$, $\tilde{S}^*=(\tilde{S}_1^*,\tilde{S}_2^*,\cdots,\tilde{S}_{\tilde{p}}^*)$

次に finite Abelian s-action $\psi(G,M,S^*)$ に対して singular set を次のように定める

<u>定義 1.6</u> $S(\psi)=\{x\in M \mid I_x \neq \{e\}\}$ を ψ の <u>singular set</u> という。

その時 $\psi(G,M,S^*)$ に対して，M の点に次のように同値関係を定め，商集合 $M/\sim$ を M/ψ と表わす。

• $x,y\in M$ に対して $x\sim y$ とは $\exists g\in G$; $\psi_g(x)=y$

すると [3] によって

<u>Prop. 1.1</u> orbit space $X=M/\psi$ もまた (compact connected) 2 次元多様体である。

よって自然な projection (quotient map) $p: M \longrightarrow X$ は branched set として $p(S(\psi))$ をもつ finite Abelian branched covering になる。また [3] によって

<u>Prop. 1.2</u> $p(S(\psi))$ は次の <0> か <1> である。

<0> X の内部 $\mathring{X}$ の孤立点

<1> X の境界 ∂X 上の arc か loop

ここで $S(\psi)$ を p による像によって次のように 2 つの集合に分ける。

<u>定義 1.7</u> finite Abelian s-action φ に対して
(0) $S^0(\varphi) = \{ x \in S(\varphi) \mid p(x)$ は孤立点（すなわち $\langle 0 \rangle$ の type）$\}$ を <u>0次元 singular set</u> という。
(1) $S^1(\varphi) = \{ x \in S(\varphi) \mid p(x)$ は $\langle 1 \rangle$ の type $\} = S(\varphi) - S^0(\varphi)$ を <u>1次元 singular set</u> という。

次に我々は有限アーベル群 G を次のように直和分解する。　（$\mathbb{Z}_n$ は位数 n の巡回群を表わす）

$$\underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{e_0 \text{コ}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{e_1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{e_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{2^{e_s}} \oplus G'$$

（但し $e_s \geqq e_{s-1} \geqq \cdots \geqq e_2 \geqq e_1 \geqq 2$，$G'$ は位数が奇数の元からなる（もちろん単位元 e は含む）G の部分群）
さらに x_i を i 番目の $\mathbb{Z}_2$ の生成元（$1 \leq i \leq e_0$），y_j を $\mathbb{Z}_{2^{e_j}}$（$1 \leq j \leq s$）の生成元とする。このとき，$\{x_1, x_2, \cdots, x_{e_0}, y_1, y_2, \cdots, y_s\}$ は G/G' の生成系をなしている。今後これらは固定しておく。

<u>定義 1.8</u> ① G の部分群 H に対して
$S_H(\varphi) = \{ x \in M \mid \varphi_h(x) = x \quad \forall h \in H \}$.
② G の部分集合 A に対して
$S_A(\varphi) = S_{\langle A \rangle}(\varphi)$．　但し $\langle A \rangle$ は A によって生成される G の部分群を表わす。

③ G の元 g に対して　$S_g(\psi) = S_{<g>}(\psi)$.

④ $S^0_H(\psi) = S^0(\psi) \cap S_H(\psi)$.

⑤ $S^1_H(\psi) = S^1(\psi) \cap S_H(\psi)$. (特に $S^1_g(\psi) = S^1(\psi) \cap S_g(\psi)$).

と表わす。

あきらかに

Prop. 1.3　$\forall g \in G$ に対して

① $x \in S(\psi)$ ならば $\psi_g(x) \in S(\psi)$

② $x \in S^0(\psi)$ ならば $\psi_g(x) \in S^0(\psi)$

③ $x \in S^1(\psi)$ ならば $\psi_g(x) \in S^1(\psi)$

④ $x \in S_H(\psi)$ ならば $\psi_g(x) \in S_H(\psi)$

が成り立つ。

§2　$S^1(\psi)$ について（その位置の決定）

この節で我々は $S^1(\psi)$ の状態と M での位置を決定しよう。そのために次の命題を使う（この命題は1次元多様体だが色々な定義は§1と同じ.）

Prop. 2.1　finite Abelian action $\psi(G, S^1)$ on 1-sphere S^1 は次の (1) ～ (3) のいずれかと congruent (equivalent) である。

(1) $G = \mathbb{Z}_n$ で ψ は free

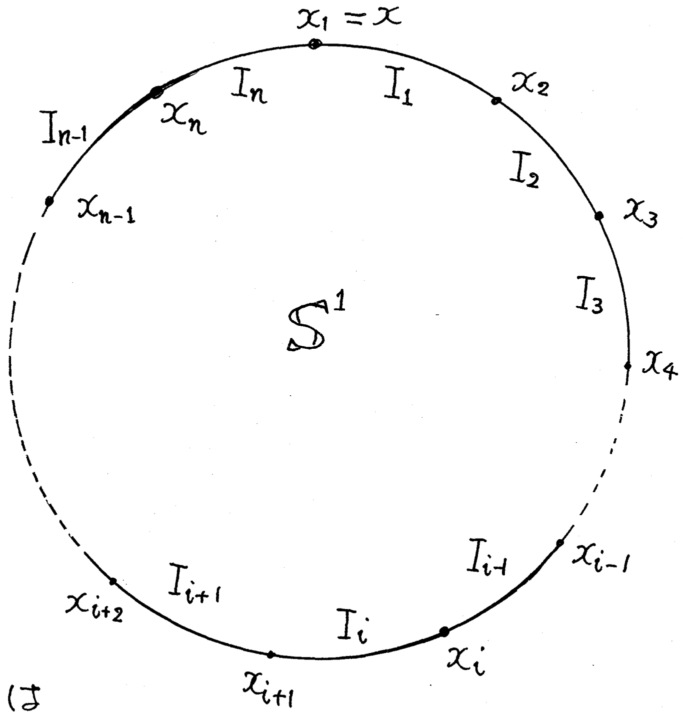
（２） $G=\mathbb{Z}_2$ で ψ は reflection よって $S(\psi)$ は２つの孤立点からなる。

（３） $G=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ で $\{x_1, x_2\}$ を G の生成系とするとき ψ_{x_1} は（x軸の）reflection で ψ_{x_2} は（y軸の）reflection よって $S(\psi)$ は４つの孤立点からなる．

［略証］ まず 閉区間 $I=[0;1]$ 上の finite Abelian action $\overline{\psi}(G, I)$ は $G=\mathbb{Z}_2$ で $\overline{\psi_0}(g,x)=1-x$ （$g\in G$, $g\neq e$）なる写像 $\overline{\psi_0}$ と congruent なものしかないことを示し，（下の証明で使っている）

① ψ が free な時は S^1 上の点 x をとり $A=\{\psi_g(x)\mid g\in G\}$ とおけば A は $n=|G|$（G の order）コの点からなるので，それらを順番に $x_1, x_2, \cdots, x_n$ （$x_1=x$）とする。そしてそれらの間の arc を $I_1, I_2, \cdots, I_n$ とおく（$\partial I_i=\{x_i, x_{i+1}\}$）。このとき x_2 に対して $\exists g_0\in G$ （$g_0\neq e$）; $x_2=\psi_{g_0}(x_1)$。すると ψ は free より $\psi_{g_0}(I_1)=I_1$ でないので $\psi_{g_0}(I_1)=I_2$ よって $H=\{g_0^i\in G\mid i=0,1,2,\cdots,n-1\}$ とおくと $\{\psi_{g'}(x)\mid g'\in H\}=A$ をみたすので $G=H=\mathbb{Z}_n$.

② ψ が free でない時は $S(\psi)$ の点 x をとると $\psi_{g_1}(x)=x$ をみたす元 $g_1\underset{\neq e}{\in}G$ が存在する。①の時と同様に $A=\{\psi_g(x)\mid g\in G\}$ とおき（A は G の



① の 場合

order $|G|=n$ より少ない点からなるので）それらを順番に $x_1, x_2, \cdots, x_a$ $(x=x_1)$ とおく $(a<n)$。同様に $I_1, I_2, \cdots, I_a$ をとる $(\partial I_i=\{x_i, x_{i+1}\})$。そして $a \geqq 2$ のときと $a=1$ の場合に分ける。

(②-(i)) $a \geqq 2$ のときは $x_2=\psi_{g_0}(x_1)$ をみたす G の元 g_0 $(\neq e)$ をとっておく。この g_0 によって $\psi_{g_0}(I_1)=I_1$ または $\psi_{g_0}(I_1)=I_2$ である。まず $\psi_{g_0}(I_1)=I_1$ のときは $g_0 \neq g_1$ で a: 偶数 I_1 と $I_{a/2+1}$ に ψ_{g_0} による不動点がある（y, z とする）ことが分かる。次に ψ_{g_1}, $\psi_{g_1}(y)$ を考えれば $a=2$ で $\psi_{g_1}(y)=z$ が示される。故にこの時は ψ_{g_1} による不動点は x_1, x_2 となり これらの結果より $G=\{e, g_1, g_0, g_0 g_1\}$ となり（3）の場合になる、次に $\psi_{g_0}(I_1)=I_2$ のとき $a \geqq 3$ ならば ψ は free になるので $a=2$ で $\psi_{g_0}(I_2)=I_1$ 故に free でないときは ψ_{g_0} の不動点が x_1, x_2 となり $G=\{e, g_0\}$ で (2) の場合になる。

(Ⅱ－(ii)) $a = 1$ のときは $S^1 - \{x_1\}$ に ψ_{g_1} を制限すれば，$\exists y \in S^1 - \{x_1\}$; $\psi_{g_1}(y) = y$ となり $G = \{e, g_1\}$ で（2）の場合になる。

さて M が2次元多様体にもどって，finite Abelian action $\psi(G, M)$ について考える．その時次の Lemma が基本的である．

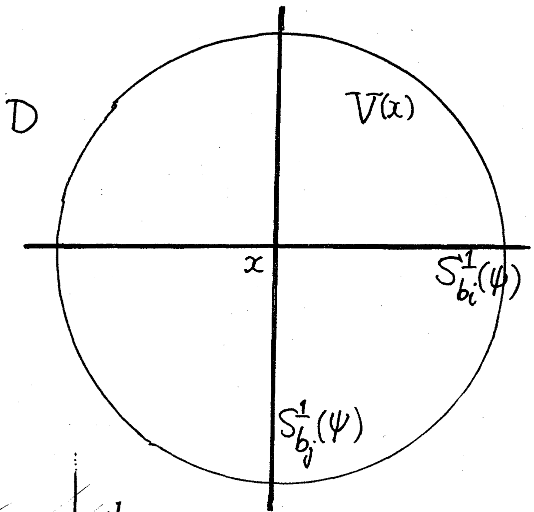
Lemma 2.1 $x \in S^1(\psi)$ に対して $\exists V(x)$; x の近傍 s.t. $(\overline{V(x)}, \overline{V(x)} \cap S(\psi))$ は $(I \times J, I \times \{0\})$ と同相（ここに $I = J = [-1; 1]$（閉区間）$\overline{V(x)}$ は $V(x)$ の閉包を表わす）。このとき x の Isotropy group I_x は order 2 の部分群である．

［証明］ $V(x)$ を十分小さくとれば $\exists g \in G$ $(g \neq e)$ s.t. $\psi_g(V(x)) = V(x)$。 $x_0 = p(x)$ とおけば $x_0 \in \partial X$ $(X = M/\psi)$ y_0 を x_0 の十分近くにとれば $y_0 \in p(V(x))$．そこで $p^{-1}(y_0) \cap V(x) \neq \phi$ だから $\exists y \in p^{-1}(y_0) \cap V(x)$。 その時 $p^{-1}(x_0) = \{x_1, x_2, \cdots, x_a\}$ とすれば $p^{-1}(y_0) = \{y_1, y_1', y_2, y_2', \cdots, y_a, y_a'\}$ となり $(y = y_1, x = x_1)$，$y \notin S(\psi)$ だから $2a = |G|$． 故に $a = |G|/2$． 次に G/I_x と $p^{-1}(x)$ は $[g] \longleftrightarrow \psi_g(x)$ で全単射だから $|G/I_x| = |G|/2$ 。よって I_x は order 2 の部分群である。

Cor. $z_j = y_j^{2^{e_j - 1}}$ $(j = 1, 2, \cdots, s)$ とおき $B = \langle x_1, x_2, \cdots, x_{e_0}, z_1, z_2, \cdots, z_s \rangle$ とおけば，上の Lemma

の条件をみたす $x \in S^1(\psi)$ に対しては $\exists! b \in B$ s.t. $I_x = \langle b \rangle = \{e, b\}$.

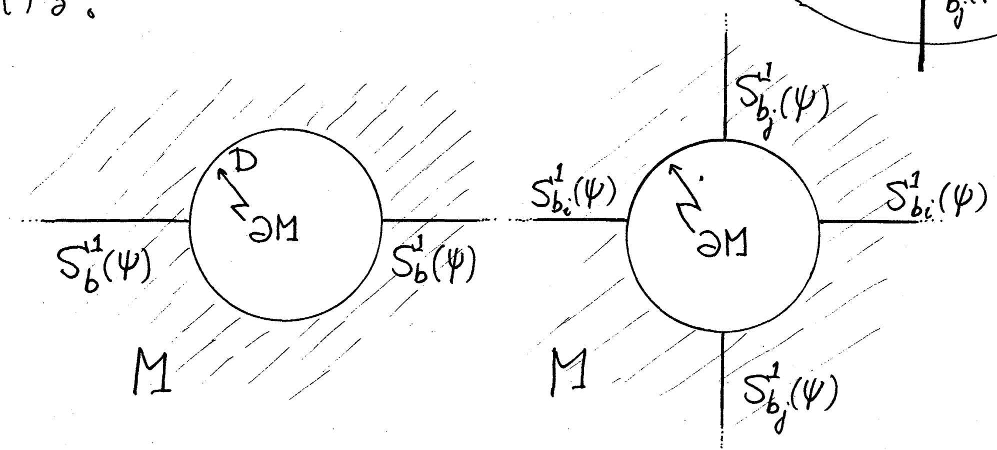
するとProp.2.1 を使えば（十分小さい x の近傍 $V(x)$ の境界に対して）



Prop.2.2　$S^1_b(\psi)$　$(b \in B)$ の連結成分は simple proper arc か simple loop である。さらにお互いに交わらない。

Prop.2.3　$S^1(\psi)$ は B の元 $b_1, b_2, \cdots, b_g$ が存在して $S^1(\psi) = S^1_{b_1} \cup S^1_{b_2} \cup \cdots\cdots \cup S^1_{b_g}$ と表わされ，さらに $S^1(\psi)$ は２重点しかなく，その２重点 x においては２つの B の元 b_i, b_j $(b_i \neq b_j)$ が存在して $S^1_{b_i}$ と $S^1_{b_j}$ が x で transversally に交わっている。

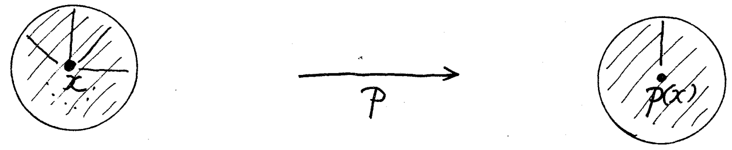
Prop.2.4　∂M の１つの成分 D が $D \cap S^1(\psi) \neq \phi$ ならば，$D \cap S^1(\psi)$ はちょうど２点 or ４点からなり，下の図のようになっている。



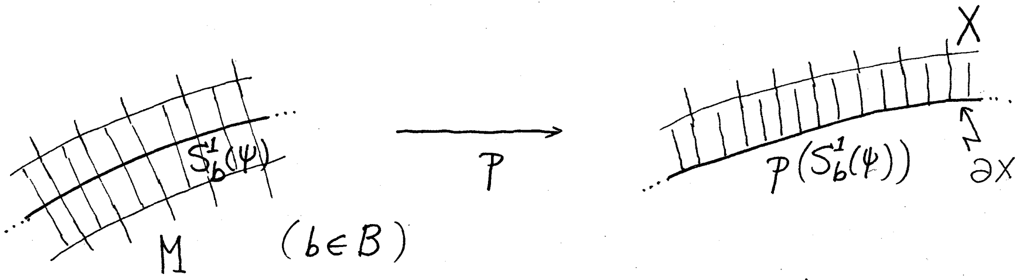
これらの結果をまとめると、

<u>Prop. 2.5</u>　$S(\psi)$ の M での位置 及び $p: M \longrightarrow X = M/\psi$ によって(近傍も含めて)次のようになっている。

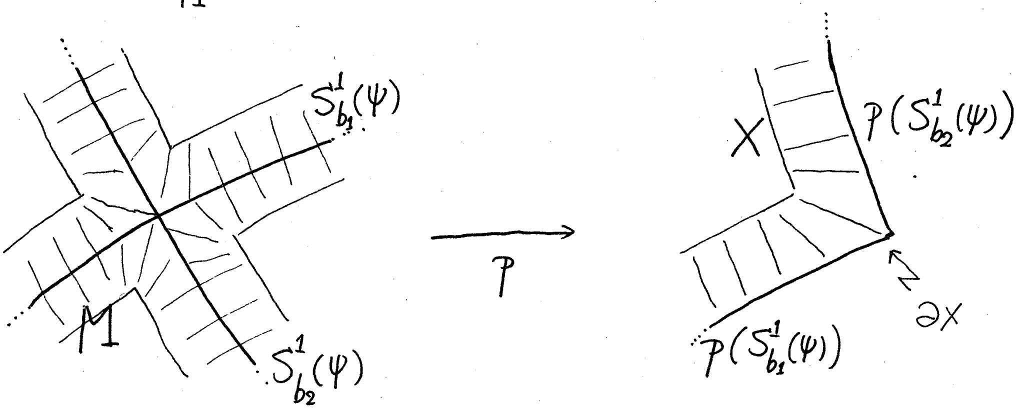
(i) 孤立点 x $(\in S^0(\psi))$



(ii)

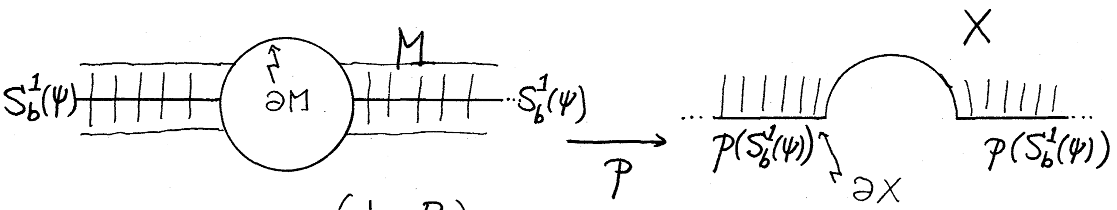


$(b \in B)$

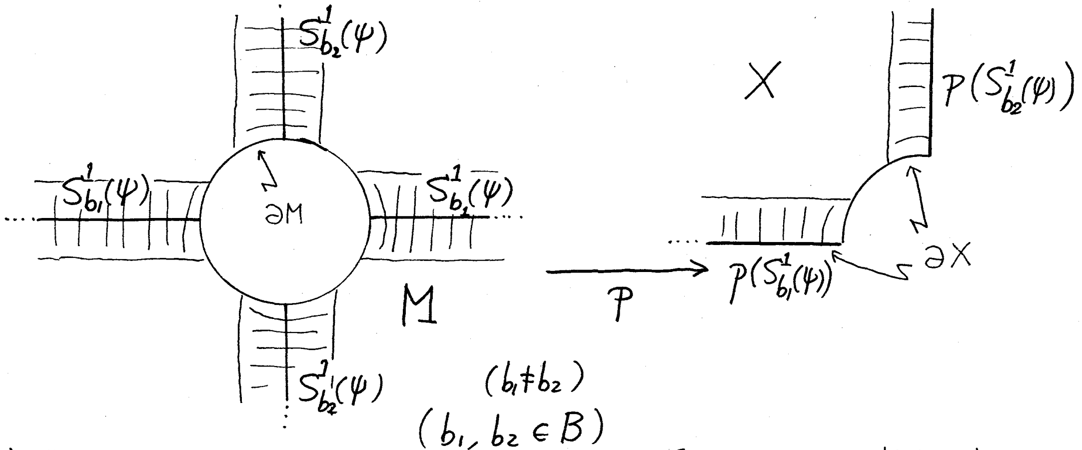


$(b_1, b_2 \in B)$ $(b_1 \neq b_2)$

(iii)



$(b \in B)$



［注］　s-action に対しても，同様な結果が成り立つ。

§3 Reducing operation (of $S^1(\psi)$)

finite Abelian action $\psi \in \mathfrak{A}(G, M)$ に対して，$B(\psi) = \{ b \in B \mid S^1_b(\psi) \neq \phi \}$ とおき，$S^1_b(\psi)$ を除去する操作を定義しよう。そのために $b \in B(\psi)$ をとれば

<u>Lemma 3.1</u>　$M - S^1_b(\psi)$ が連結でないとき，$M - S^1_b(\psi)$ はちょうど2つの連結成分からなり，M_1 をその一つの連結成分の閉包とすると M_1 も compact 2次元多様体であり，$S^*_b = M_1 \cap S^1_b(\psi)$ とおくと $S^*_b \subset \partial M_1$ である。次に $G_1 = \{ g \in G \mid \psi_g(M_1) = M_1 \}$ とおくと，明らかに

① G_1 は index 2 の G の部分群

② $b \notin G_1$　　③ $G' \subset G_1$

をみたす。そこで $\psi_1 : G_1 \times M_1 \longrightarrow M_1$ を

$$\psi_1(g_1, x_1) = \psi(g_1, x_1) \quad (\forall g_1 \in G_1 \ \ \forall x_1 \in M_1)$$

と定めると ψ_1 は finite Abelian action (on M_1) で次の性質をみたす. 〈今後 群においては $\subset$ で部分群を表わす〉

(I) $S^1_h(\psi_1) = S^1_h(\psi) \cap M_1$　　　$h \in B(\psi) \cap G_1$

(II) $S^0_H(\psi_1) = S^0_H(\psi) \cap M_1$　　　$H \subset G_1$

(III) $\psi_1(g_1, S^*_b) = S^*_b$　　　$g_1 \in G_1$

さらに $S^1_h(\psi) = \phi$ $(h \notin G_1 \quad h \neq b)$, $S^0_H(\psi) = \phi$ $(H \not\subset G_1)$ をみたしていたことが分かる。また $B(\psi) = B(\psi_1) \cup \{b\}$.

したがって $S^*_1 = S^*_b$, $S^{\otimes}_1 = (S^*_1)$ とおけば ψ_1 は finite Abelian s-action $\mathfrak{A}_s(G_1, M_1, S^{\otimes}_1)$ の元になる。

［証明］

$M - S^1(\psi)$ が 2 つの連結成分になることは [9] の §3. Lemma 1 (p17) と同様に示される。

$S^1(\psi_1)$ or $S^1(\psi)$ に関する部分は, 次の二つ (☆, ☆☆) を示せば明らか.

☆「$x \in S^1_b(\psi)$ で $x \notin S^1_h(\psi)$ $(\forall h \in B,\ h \neq g_1)$ ならば $x \notin S^1(\psi_1)$」

∵ $x \in S^1(\psi_1)$ とすると $x \in S^1(\psi)$ よって $\exists b' \in B$ $\psi_{b'}(x) = x$ だが仮定より $b' = b$ しかない. 故に $\psi_1(g, x) = \psi(g, x) = x$, $g \neq e$ $\longrightarrow g = b$ だが $b \notin G_1$ (矛盾)

☆☆「$h \notin G_1$ $h \neq b$ ならば $S^1_h(\psi) = \phi$」

∵ $\exists h \notin G_1, (h \neq b)$, $\exists x \in S^1_h(\psi)$ s.t. $\psi_h(x) = x$ とすれば $\psi_h(M_1) \neq M_1$ より $x \in M_1 \cap \overline{M - M_1} = S^1_b(\psi)$. x の近傍を考えると, $x \in S^1_{bh}(\psi)$ となり矛盾

$S^0(\psi_1)$, $S^0(\psi)$ に関しては明らかに示せる.

Cor. この時, $\forall h \in B$ に対して

$S^1_h(\psi) \neq \phi$ かつ $S^1_{bh}(\psi) \neq \phi$ であることはない。

Lemma 3.2 $M - S^1(\psi)$ が連結の時, $M - S^1(\psi)$ の Riemann metric による completion[完備化] (natural compactification) を M_1 とおくと M_1 も compact 2次元多様体で, $S_b^* = M_1 - (M - S_b^1(\psi))$ とおくと $S_b^* \subset \partial M_1$ である。このとき, $G_1 = G$ とし $\psi_1 : G_1 \times M_1 \longrightarrow M_1$ を

- $x \in M_1 - S_b^*$ のときは $\psi_1(g_1, x) = \psi(g_1, x)$ $g_1 \in G_1$
- $x \in S_b^*$ のときは x に収束する $M_1 - S_b^*$ の点列 $\{x_i\}$ をとり $\psi_1(g_1, x) = \lim \psi_1(g_1, x_i)$ $(g_1 \in G_1)$

と定めると ψ_1 は well-defined でさらに次の性質をみたす。

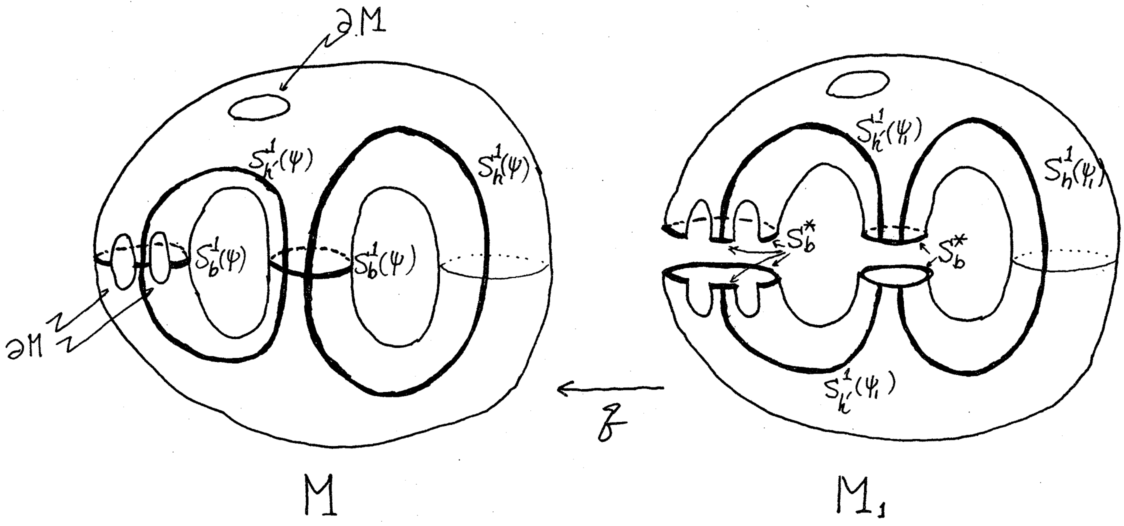
(I) $S_h^1(\psi_1) = \mathcal{g}^{-1}(S_h^1(\psi))$ $h \in B$ $h \neq b$

$S_b^1(\psi_1) = \phi$ ここに $\mathcal{g} : M_1 \longrightarrow M$ (natural projection) を表わす.

(II) $S_H^0(\psi_1) = \mathcal{g}^{-1}(S_H^0(\psi))$ $H \subset G_1$

(III) $\psi_1(g_1, S_b^*) = S_b^*$ $g_1 \in G_1$

よって $B(\psi) = B(\psi_1) \cup \{b\}$ 。そこで $S_1^* = S_b^*$, $S_1^{\circledast} = (S_1^*)$ とおけば ψ_1 は finite Abelian s-action すなわち $\mathcal{O}\!\iota_s(G_1, M_1, S_1^{\circledast})$ の元になる。



[証明] まず次の図式が可換であることを示す.

$$\begin{tikzcd} G_1 \times M_1 \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "id \times g"'] & M_1 \arrow[d, "g"] \\ G \times M \arrow[r, "\psi"] & M \end{tikzcd}$$

それは $x \notin S_b^*$ なら定義より明らか. また $x \in S_b^*$ のときは, 定義により点列 $\{x_i\}$ (in $M_1 - S_b^*$) で $\lim x_i = x$ なるものをとれば $g \in G$ に対して $g\,\psi_1(g,x) = g(\lim \psi_1(g,x_i)) = \lim(g \cdot \psi_1(g,x_i)) = \lim \psi(g, g(x_i)) = \psi(g, g(x))$ より示される.

よって $g(S^1(\psi_1)) \subset S^1(\psi)$. 次に $h \in B$ $h \neq b$ のとき $\underline{S_h^1(\psi_1) = g^{-1}(S_h^1(\psi))}$ を示す. これも $x \notin S_b^*$ のときは明らか. $x \in S_b^*$ のとき $x \in S_h^1(\psi_1)$ なら x の近傍で上の図式を使えば $g(x) \in S_h^1(\psi)$. また $x \in g^{-1}(S_h^1(\psi))$ に対して $S_h^1(\psi) - g(x)$ の1つの成分上で $g(x)$ に収束する点列をとれば ψ_1 の定義より $x \in S_h^1(\psi_1)$.

さて $\exists x \in S_b^1(\psi_1)$ とする. もしも $x \notin S_b^*$ のときは定義よりおこらない. $x \in S_b^*$ のときは $x \in S^1(\psi_1)$ だから ψ_1 の性質 (Prop 2.5 etc.) を使えば $\exists h \in G_1 = G$ s.t. $x \in S_h^1(\psi_1)$ だが上の図式を考えれば $h = b$ で $S_h^1(\psi_1)$ は M_1 上の proper arc で, その境界に x があるので g で移せば $g(S_b^*)$ も $g(S_h^1(\psi_1))$ も $S_b^1(\psi)$ の部分集合になり $S^1(\psi)$ の性質 (Prop 2.5 etc) に矛盾する。 よって $S_b^1(\psi_1) = \phi$.

(II) (III) についても同様にできる。

<u>定義 3.1</u> finite Abelian action $\psi \in \mathcal{O}(G, M)$ を Lemma 3.1 あるいは Lemma 3.2 によってψから構成される finite Abelian s-action $\psi_1 \in \mathcal{O}s(G_1, M_1, S_1^{\circledast})$ に変える操作を元 $b \in B(\psi)$ による (あるいは $S_b^1(\psi)$ による) ψ の <u>reducing operation</u> といい,

$\psi \xrightarrow[b]{} \psi_1$ あるいは $\psi(G, M) \xrightarrow[b]{} \psi_1(G_1, M_1, S_1^{\circledast})$

と表わす。

finite Abelian s-action $\psi_{i-1} \in \mathcal{O}s(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\circledast})$ に対しても $B(\psi_{i-1})$ の元 $b_{i-1} = b$ をとり, $S_b^1(\psi_{i-1})$ を除去することを考えよう。

<u>Lemma 3.3</u> $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ が連結でないとき, lemma 3.1 と同様に $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ はちょうど2つの連結成分からなる

ので，その一つの連結成分の閉包を M_i とし，$S_i^{**}= M_i \cap S_b^1(\varphi_{i-1})$，$S_k^{**}= S_k^* \cap M_i$ $(1 \leq k \leq i-1)$ とおくと $S_i^{**}, S_k^{**} \subset \partial M_i$ で（ここに $S_{i-1}^{\circledast} = (S_1^*, S_2^*, \cdots\cdots, S_{i-1}^*)$），$G_i = \{ g \in G_{i-1} / \varphi_{i-1}(g, M_i) = M_i \}$ とおくと Lemma 3.1 と同様に

① G_i は index 2 の G_{i-1} の部分群

② $b = b_i \notin G_i$　　③ $G' \subset G_i$

をみたすので，$\varphi_i : G_i \times M_i \longrightarrow M_i$ を

$$\varphi_i(g, x) = \varphi_{i-1}(g, x) \qquad (\forall g \in G_i, \forall x \in M_i)$$

と定めると φ_i は finite Abelian action (on M_i) で，次の性質をみたす。

(I)　$S_h^1(\varphi_i) = S_h^1(\varphi_{i-1}) \cap M_i \qquad h \in B(\varphi_{i-1}) \cap G_i$

(II)　$S_H^0(\varphi_i) = S_H^0(\varphi_{i-1}) \cap M_i \qquad H \subset G_i$

(III)　$\varphi_i(g, S_j^{**}) = S_j^{**} \quad (1 \leq j \leq i) \qquad g \in G_i$

さらに Lemma 3.1 と同様に $S_h^1(\varphi_{i-1}) = \phi$ $(h \notin G_i, h \neq b)$，$S_H^0(\varphi_{i-1}) = \phi$ $(H \not\subset G_i)$，$B(\varphi_{i-1}) = B(\varphi_i) \cup \{b_i\}$ が成り立つ．したがって $S_i^{\circledast} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \cdots\cdots, S_i^{**})$ とおけば φ_i は finite Abelian s-action $\mathfrak{A}_s(G_i, M_i, S_i^{\circledast})$ の元になる。

［注］この時は Lemma 3.1 の Cor. は成立するとは限らない。

<u>Lemma 3.4</u>　$M_{i-1} - S_b^1(\varphi_{i-1})$ が連結のとき，Lemma 3.2 と同様に $M_{i-1} - S_b^1(\varphi_{i-1})$ の Riemann metric による completion

〔完備化〕(natural compactification) を M_i とし, $S_i^{**} = M_i - (M_{i-1} - S_b^1(\varphi_{i-1}))$, $S_k^{**} = \gamma^{-1}(S_k^*)$ $(1 \leq k \leq i-1)$ とおくと $S_i^{**}, S_k^{**} \subset \partial M_i$ で (ここに $S_{i-1}^{\circledast} = (S_1^*, S_2^*, \cdots, S_{i-1}^*)$, $\gamma : M_i \longrightarrow M_{i-1}$ (natural projection)) ある。

このとき $G_i = G_{i-1}$ とし $\varphi_i : G_i \times M_i \longrightarrow M_i$ を

- $x \in M_i - S_i^{**}$ のとき $\varphi_i(g, x) = \varphi_{i-1}(g, x)$ $(g \in G_i)$
- $x \in S_i^{**}$ のとき x に収束する $M_i - S_i^{**}$ の点列 $\{x_j\}$

をとり $\varphi_i(g, x) = \lim_{j\to\infty} \varphi_i(g, x_j)$ $(g \in G_i)$

と定めると φ_i は well-defined で Lemma 3.2 と同様に次の性質をみたす.

(I) $S_h^1(\varphi_i) = \gamma^{-1}(S_h^1(\varphi_{i-1}))$ $\quad h \in B$, $h \neq b$

$S_b^1(\varphi_i) = \phi$

(II) $S_H^0(\varphi_i) = \gamma^{-1}(S_H^0(\varphi_{i-1}))$ $\quad H \subset G_i$

(III) $\varphi_i(g, S_j^{**}) = S_j^*$ $\quad (1 \leq j \leq i)$ $\quad g \in G_i$

よって $B(\varphi_{i-1}) = B(\varphi_i) \cup \{b\}$. そこで $S_i^{\circledast} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \cdots \cdots, S_i^{**})$ とおけば φ_i は finite Abelian s-action $\mathfrak{a}_s(G_i, M_i, S_i^{\circledast})$ の元になる。

<u>定義 3.2</u> finite Abelian s-action $\varphi_{i-1} \in \mathfrak{a}_s(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\circledast})$ を Lemma 3.3 あるいは Lemma 3.4 によって φ_{i-1} から構成される finite Abelian s-action $\varphi_i \in \mathfrak{a}_s(G_i, M_i, S_i^{\circledast})$

に変える操作を 定義3.1と同様に 元 $b \in B(\varphi_{i-1})$ による(あるいは $S_b^1(\varphi_{i-1})$ による) φ_{i-1} の reduction operation といい, $\varphi_{i-1} \xrightarrow[b]{} \varphi_i$ あるいは $\varphi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\circledast}) \xrightarrow[b]{} \varphi_i(G_i, M_i, S_i^{\circledast})$ と表わす。

[注] 定義3.1の reducing operation もこの定義の reducing operation の特別な場合と考えられる。

$B(\varphi)$ は有限なので, 任意の finite Abelian action φ に対して有限回の reducing operation を行なえば, 1次元 singular set のない finite Abelian s-action が作られる。

§4 finite Abelian (s-)action の (s-)congruence (equivalence) class の対応.

前節の reducing operation によって (s-) congruence (equivalence) class は単射になることをこの節で示そう。

finite Abelian s-action $\varphi_{i-1} \in \mathfrak{A}_s(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\circledast})$ に対して $b = b_i \in B(\varphi_{i-1})\,(\subset G_{i-1})$ による reducing operation によって得られる finite Abelian s-action を $\varphi_i \in \mathfrak{A}_s(G_i, M_i, S_i^{\circledast})$ とし, また $\hat{\varphi}_{i-1} \in \mathfrak{A}_s(G_{i-1}, \hat{M}_{i-1}, \hat{S}_{i-1}^{\circledast})$ に対しても同じ元 $b = b_i \in B(\hat{\varphi}_{i-1})\ (\subset G_{i-1})$ による reducing operation によって得られる finite Abelian s-action を $\hat{\varphi}_i \in \mathfrak{A}_s(\hat{G}_i, \hat{M}_i, \hat{S}_i^{\circledast})$ とするとき (〈注〉一般には $B(\varphi_{i-1})$ と $B(\hat{\varphi}_{i-1})$ に

同じ元（$b=b_i$）があるとは限らない），もしも $M_{i-1}-S_b^1(\varphi_{i-1})$ も $\widetilde{M}_{i-1}-S_b^1(\widetilde{\varphi}_{i-1})$ も共に連結でないとき

<u>Lemma 4.1</u>　$\varphi_{i-1}(G_{i-1},M_{i-1},S_{i-1}^{\circledast})$ と $\widetilde{\varphi}_{i-1}(G_{i-1},\widetilde{M}_{i-1},\widetilde{S}_{i-1}^{\circledast})$ が s-congruent (s-equivalent) であれば $\varphi_i(G_i,M_i,S_i^{\circledast})$ と $\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{G}_i,\widetilde{M}_i,\widetilde{S}_i^{\circledast})$ も s-congruent (s-equivalent) であり，逆に上のようにして作った $\varphi_i(G_i,M_i,S_i^{\circledast})$ と $\widehat{\varphi}_i(\widehat{G}_i,\widehat{M}_i,\widehat{S}_i^{\circledast})$ が s-congruent (s-equivalent) であれば，もとの $\varphi_{i-1}(G_{i-1},M_{i-1},S_{i-1}^{\circledast})$ と $\widetilde{\varphi}_{i-1}(G_{i-1},\widetilde{M}_{i-1},\widetilde{S}_{i-1}^{\circledast})$ も s-congruent (s-equivalent) である．

［証明］（$\Longrightarrow$）仮定によって，次のような条件をみたす同相写像 $h: M_{i-1}\longrightarrow \widetilde{M}_{i-1}$ が存在する．（h: onto）

① 図式

$$\begin{array}{ccc} G_{i-1}\times M_{i-1} & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & M_{i-1} \\ \downarrow id\times\downarrow h & & \downarrow h \\ G_{i-1}\times \widetilde{M}_{i-1} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_{i-1}} & \widetilde{M}_{i-1} \end{array}$$

が可換．

② $h(S_k^*)=\widetilde{S}_k^*$ $(1\leq k\leq i-1)$　但し $S_{i-1}^{\circledast}=(S_1^*,S_2^*,\cdots,S_{i-1}^*)$，$\widetilde{S}_{i-1}^{\circledast}=(\widetilde{S}_1^*,\widetilde{S}_2^*,\cdots,\widetilde{S}_{i-1}^*)$。

このとき Lemma 3.3 によって M_{i-1}, $\widetilde{M}_{i-1}$ から（bによって）作られる2次元多様体が M_i, $\widetilde{M}_i$ であるが，上の写像 h によって $h(M_i)=\widehat{M}_i$ として一般性を失なわない。（$h(S_b^1(\varphi_{i-1}))=S_b^1(\widetilde{\varphi}_{i-1})$ だから）すると $G_i=\widetilde{G}_i$ である。なぜならば $\forall g\in G_i$ に対して $\widetilde{\varphi}_{i-1}(g,\widetilde{M}_i)=\widetilde{\varphi}_{i-1}(g,h(M_i))$

$= h \cdot \psi_{i-1}(g, M_i) = h(M_i) = \widetilde{M}_i$ だから $g \in \widehat{G}_i$
(①より)

逆も同様にして $\forall g \in \widehat{G}_i \longrightarrow g \in G_i$ 。

次に $h_+ = h|_{M_i}$ とおけば（h の M_i への制限） $\forall g \in G_i = \widehat{G}_i$, $\forall x \in M_i$ に対して $h_+ \cdot \psi_i(g, x) = h\,\psi_i(g, x) =$
$h\,\psi_{i-1}(g, x) \underset{(①より)}{=} \widetilde{\psi}_{i-1}(g, h(x)) = \widetilde{\psi}_i(g, h(x)) = \widetilde{\psi}_i(g, h_+(x))$
より

図式
$$\begin{array}{ccccc} G_i & \times & M_i & \xrightarrow{\psi_i} & M_i \\ \downarrow id & \times & \downarrow h_+ & & \downarrow h_+ \\ \widehat{G}_i \times \widetilde{M}_i = G_i & \times & \widetilde{M}_i & \xrightarrow{\widetilde{\psi}_i} & \widetilde{M}_i \end{array}$$
が可換であり、

①と h_+ の定義と $S_k^{**}, \widetilde{S}_k^{**}$ $(1 \leq k \leq i-1)$ の定義によって
$h_+(S_k^{**}) = \widetilde{S}_k^{**}$ であり $S_i^{**}, \widetilde{S}_i^{**}$ の作り方より $h_+(S_i^{**}) = \widetilde{S}_i^{**}$ が成立する。ここに $S_i^{\circledast} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \cdots, S_{i-1}^{**}, S_i^{**})$
$\widetilde{S}_i^{\circledast} = (\widetilde{S}_1^{**}, \widetilde{S}_2^{**}, \cdots, \widetilde{S}_{i-1}^{**}, \widetilde{S}_i^{**})$ である。

（$\Longleftarrow$） 仮定によって $G_i = \widehat{G}_i$ で次の条件をみたす M_i から $\widetilde{M}_i$ の上への同相写像 $h : M_i \longrightarrow \widetilde{M}_i$ が存在する。

① 図式
$$\begin{array}{ccccc} G_i & \times & M_i & \xrightarrow{\psi_i} & M_i \\ \downarrow id & \times & \downarrow h & & \downarrow h \\ G_i & \times & \widetilde{M}_i & \xrightarrow{\widetilde{\psi}_i} & \widetilde{M}_i \\ & \| & & & \\ \widehat{G}_i & \times & \widetilde{M}_i & & \end{array}$$
が可換であり

② $h(S_k^{**}) = \tilde{S}_k^{**}$ $(1 \le k \le i)$ 但し $S_i^{\circledast} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \cdots, S_i^{**})$, $\tilde{S}_i^{\circledast} = (\tilde{S}_1^{**}, \tilde{S}_2^{**}, \cdots, \tilde{S}_i^{**})$.

このとき M_{i-1} から $\tilde{M}_{i-1}$ (の上)への写像 $h_- : M_{i-1} \longrightarrow \tilde{M}_{i-1}$ を

$$\begin{cases} h(x) & x \in M_i \\ \tilde{\varphi}_{i-1}(b, h(\varphi_{i-1}(b, x))) & x \in \overline{M_{i-1} - M_i} \ (= M_i' \text{とおく}) \end{cases}$$

と定める。すると Lemma 3.4 の作り方より $(x \in S_i^{**} \longleftrightarrow x \in S_b^1(\varphi_{i-1}))$ だから $x \in M_i \cap M_i'$ ならば $x \in S_i^{**}$ 故に $\varphi_{i-1}(b, x) = x$,

また $h(x) \in \tilde{S}_i^{**}$ より $\tilde{\varphi}_{i-1}(b, h(x)) = h(x)$ よって $\tilde{\varphi}_{i-1}(b, h(\varphi_{i-1}(b, x))) = \tilde{\varphi}_{i-1}(b, h(x)) = h(x)$ が成り立つので well-defined で h_- は (onto である) 同相写像 (h が同相写像より) である。

次に図式

$$\begin{array}{ccc} G_{i-1} \times M_{i-1} & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & M_{i-1} \\ \downarrow id \times \downarrow h_- & & \downarrow h_- \\ G_{i-1} \times \tilde{M}_{i-1} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{i-1}} & \tilde{M}_{i-1} \end{array}$$

が可換であることは $g \in G_{i-1}$, $x \in M_{i-1}$ をそれぞれ G_i or bG_i に属している ($G_{i-1} = G_i \cup bG_i$) 場合、M_i or M_i' に属している場合に分けてやればよい。例えば $g \in G_i$ $x \in M_i'$ のとき

$\varphi_{i-1}(g, x) \in M_i'$ で $\varphi_{i-1}(gb, x) \in M_i$, $\varphi_{i-1}(b, x) \in M_i$ で $h(\varphi_{i-1}(b, x)) \in \tilde{M}_i$ だから $h_- \varphi_{i-1}(g, x) = \tilde{\varphi}_{i-1}(b, h\varphi_{i-1}(b, \varphi_{i-1}(g, x)))$

$= \tilde{\varphi}_{i-1}(b, h\varphi_{i-1}(bg, x)) = \tilde{\varphi}_{i-1}(b, h\varphi_{i-1}(g, \varphi_{i-1}(b, x)))$

$= \tilde{\varphi}_{i-1}(b, h\varphi_i(g, \varphi_{i-1}(b, x))) = \tilde{\varphi}_{i-1}(b, \tilde{\varphi}_i(g, h\varphi_{i-1}(b, x)))$

$= \tilde{\varphi}_{i-1}(b, \tilde{\varphi}_{i-1}(g, h\varphi_{i-1}(b,x))) = \tilde{\varphi}_{i-1}(bg, h\varphi_{i-1}(b,x))$

$= \tilde{\varphi}_{i-1}(g, \tilde{\varphi}_{i-1}(b, h\varphi_{i-1}(b,x))) = \tilde{\varphi}_{i-1}(g, h_-(x))$

となる。その他の場合も同様に示される。

そして $x \in S_k^*$ $(1 \le k \le i-1)$ ならば $h_-(x) \in \tilde{S}_k^*$ は h_- の定め方，S_k^* と $\tilde{S}_k^*$ の作り方より明らかに示される。

したがって $\varphi_{i-1} \xrightarrow[b]{} \varphi_i$ ，$\tilde{\varphi}_{i-1} \xrightarrow[b]{} \tilde{\varphi}_i$ (Lemma 3.3 によって作られた b による reducing operation) とするとき $\varphi_{i-1}, \tilde{\varphi}_{i-1} \in \mathfrak{N}(G_{i-1})$

φ_i と $\tilde{\varphi}_i$ が s-congruent ならば φ_{i-1} と $\tilde{\varphi}_{i-1}$ は s-congruent であることが示される.

<注> もしも φ_{i-1} と $\tilde{\varphi}_{i-1}$ が s-congruent ならば，$B(\varphi_{i-1}) = B(\tilde{\varphi}_{i-1})$ でかつ『$M_{i-1} - S_b^1(\varphi_{i-1})$ が連結でない』ことと『$\tilde{M}_{i-1} - S_b^1(\tilde{\varphi}_{i-1})$ が連結でない』ことは同値である。

また $M_{i-1} - S_b^1(\varphi_{i-1})$ も $\tilde{M}_{i-1} - S_b^1(\tilde{\varphi}_{i-1})$ が共に連結であるとき

<u>Lemma 4.2</u>　$\varphi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\circledast})$ と $\tilde{\varphi}_{i-1}(G_{i-1}, \tilde{M}_{i-1}, \tilde{S}_{i-1}^{\circledast})$ が s-congruent (s-equivalent) であれば $\varphi_i(G_i, M_i, S_i^{\circledast})$ と $\tilde{\varphi}_i(\tilde{G}_i, \tilde{M}_i, \tilde{S}_i^{\circledast})$ [Lemma 3.4 によって作られた] も s-congruent (s-equivalent) で

あり，逆に上のようにして作られた $\varphi_i(G_i, M_i, S_i^{\circledast})$ と $\widetilde{\varphi}_i(\widetilde{G}_i\ \widetilde{M}_i\ \widetilde{S}_i^{\circledast})$ が s-congruent（s-equivalent）であれば $\varphi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\circledast})$ と $\widetilde{\varphi}_{i-1}(G_{i-1}, \widetilde{M}_{i-1}, \widetilde{S}_{i-1}^{\circledast})$ も s-congruent（s-equivalent）である。

［証明］（$\Longrightarrow$）仮定によって，次の条件をみたす M_{i-1} から $\widetilde{M}_{i-1}$ の上への同相写像 $h : M_{i-1} \longrightarrow \widetilde{M}_{i-1}$ が存在する.

① 図式

$$\begin{array}{ccc} G_{i-1} \times M_{i-1} & \xrightarrow{\varphi_{i-1}} & M_{i-1} \\ \big\downarrow id \times \big\downarrow h & & \big\downarrow h \\ G_{i-1} \times \widetilde{M}_{i-1} & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_{i-1}} & \widetilde{M}_{i-1} \end{array}$$

が可換

② $h(S_k^*) = \widetilde{S}_k \quad (1 \le k \le i-1)$ 但し $S_{i-1}^{\circledast} = (S_1^*, S_2^*, \cdots, S_{i-1}^*)$

$S_{i-1}^{\circledast} = (\widetilde{S}_1^*, \widetilde{S}_2^*, \cdots, \widetilde{S}_{i-1}^*)$

このとき Lemma 3.4 によって（b によって）$M_{i-1}, \widetilde{M}_{i-1}$ から作られる２次元多様体が $M_i, \widetilde{M}_i$ である。そこで M_i から $\widetilde{M}_i$ への写像 $h_+ : M_i \longrightarrow \widetilde{M}_i$ を次のように定める.

$$\begin{array}{ccc} M_i & \dashrightarrow & \widetilde{M}_i \\ \big\downarrow g & & \big\downarrow \widetilde{g} \\ M_{i-1} & \xrightarrow{h} & \widetilde{M}_{i-1} \end{array}$$

* $x \notin S_i^{**}$ のときは $hg(x) \in \widetilde{M}_{i-1}$ に対して $\exists !\, y \in \widetilde{M}_i$ s.t. $\widetilde{g}(y) = hg(x)$ だから $h_+(x) = y$ と定める。（但し $g : M_i \longrightarrow M_{i-1}$，$\widetilde{g} : \widetilde{M}_i \longrightarrow \widetilde{M}_{i-1}$ は natural projection）

* $x \in S_i^{**}$ のとき x に収束する（M_i で）$M_i - S_i^{**}$ の点列 $\{x_j\}$ をとり $h_+(x) = \lim_j h_+(x_j)$ と定めると点列 $\{x_j\}$ のとり方によるので well-defined.

すると図式
$$\begin{array}{ccc} G_i \times M_i & \xrightarrow{\psi_i} & M_i \\ \downarrow id \times \downarrow h_+ & & \downarrow h_+ \\ \widetilde{G}_i \times \widetilde{M}_i & \xrightarrow{\widetilde{\psi}_i} & \widetilde{M}_i \end{array}$$
が可換

$(G_i = G_{i-1} = \widetilde{G}_i)$

であることは h_+ の定義より示される。また $h_+(S_k^{**}) = \widetilde{S}_k^{**}$ $(1 \le k \le i-1)$ は ①, h_+ の定義, $S_k^{**}, S_k^{**} (1 \le k \le i-1)$ の定義より明らかで $h_+(S_i^{**}) = \widetilde{S}_i^{**}$ も作り方より示される。ここに
$S_i^{\circledast} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \cdots, S_{i-1}^{**}, S_i^{**})$, $\widetilde{S}_i^{\circledast} = (\widetilde{S}_1^{**}, \widetilde{S}_2^{**}, \cdots, \widetilde{S}_{i-1}^{**}, \widetilde{S}_i^{**})$
である。

($\Leftarrow$) act する群は $G_i = \widetilde{G}_i = G_{i-1}$ 。仮定により次の条件をみたす M_i から $\widetilde{M}_i$ の上への同相写像 $h : M_i \longrightarrow \widetilde{M}_i$ が存在する。

① 図式
$$\begin{array}{ccccc} & & G_i \times M_i & \xrightarrow{\psi_i} & M_i \\ & & \downarrow id \times \downarrow h & & \downarrow h \\ \widetilde{G}_i \times \widetilde{M}_i & = & G_i \times \widetilde{M}_i & \xrightarrow{\widetilde{\psi}_i} & \widetilde{M}_i \end{array}$$
が可換

② $h(S_k^{**}) = \widetilde{S}_k^{**}$ $(1 \le k \le i)$ 但し $S_i^{\circledast} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \cdots\cdots, S_i^{**})$
$\widetilde{S}_i^{\circledast} = (\widetilde{S}_1^{**}, \widetilde{S}_2^{**}, \cdots, \widetilde{S}_i^{**})$

このとき写像 $h_- : M_{i-1} \longrightarrow \widetilde{M}_{i-1}$ を $x \in M_{i-1}$ に対して $\exists y \in M_i$ s.t. $g(y) = x$ なので $h_-(x) = \widetilde{g} h(y)$ と定める。

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{h} & \widetilde{M}_i \\ \downarrow g & & \downarrow \widetilde{g} \\ M_{i-1} & \dashrightarrow & \widetilde{M}_{i-1} \end{array}$$

(ここに $g : M_i \longrightarrow M_{i-1}$,

$\tilde{g} : \tilde{M}_i \longrightarrow \tilde{M}_{i-1}$ は Lemma 3.4 で定めた natural projection を表わす。） すると $x \notin S_b^1(\varphi_{i-1})$ のときは y は unique なので o.k.。また $x \in S_b^1(\varphi_{i-1})$ のとき $g(S_i^{**}) = S_b^1(\varphi_{i-1})$ より上でとった y は $y \in S_i^{**}$ で 上の条件 $(g(y) = x)$ をみたす M_i の元は y と $\varphi_i(b, y)$ の二つであるが、それらは $\tilde{g}h\,\varphi_i(b,y) = \tilde{g}\,\tilde{\varphi}_i(b, h(y)) = \tilde{g}h(y)$ をみたすので（$h(S_i^{**}) = \tilde{S}_i^{**}$ $\tilde{g}(\tilde{S}_i^{**}) = S_b^1(\tilde{\varphi}_{i-1})$ より $h(y) \in S_b^1(\tilde{\varphi}_{i-1})$ だから） h_- は well-defined で 明らかに M_{i-1} から $\tilde{M}_{i-1}$ の上への同相写像となる。（h が同相写像より）

次に図式

$$\begin{tikzcd}
G_{i-1} \times M_{i-1} \arrow[r, "\varphi_{i-1}"] \arrow[d, "id \times h_-"] & M_{i-1} \arrow[d, "h_-"] \\
G_{i-1} \times \tilde{M}_{i-1} \arrow[r, "\tilde{\varphi}_{i-1}"] & \tilde{M}_{i-1}
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示そう。

$\forall g \in G_{i-1}$, $\forall x \in M_{i-1}$ をとると $\exists y \in M_i$ s.t. $g(y) = x$ をとる。そして $\varphi_{i-1}(g, x) = x'$ とおき $\exists y' \in M_i$ s.t. $g(y') = x'$ をとる。すると $\varphi_{i-1}(g,x) = x'$ より $\varphi_i(g, y) = y'$ だから

$$h_-\varphi_{i-1}(g,x) = h_-(x') = \tilde{g}h(y') = \tilde{g}h\,\varphi_i(g,y) \quad \cdots\cdots ①$$

次に $h_-(x) = \tilde{x} \in \tilde{M}_{i-1}$ に対して、$\exists \tilde{y} \in \tilde{M}_i$ s.t. $\tilde{g}(\tilde{y}) = \tilde{x}$ すると $x \notin S_b^1(\varphi_{i-1})$ なら $\tilde{x} \notin S_b^1(\tilde{\varphi}_{i-1})$ で y, $\tilde{y}$ も unique なので $h(y) = \tilde{y}$ であるし、$x \in S_b^1(\varphi_{i-1})$ の時も $h(y) = \tilde{y}$ であるか $h(y) = \tilde{\varphi}_i(b, \tilde{y})$ であるが $\tilde{g}\tilde{y} = \tilde{g}(\tilde{\varphi}_i(b, \tilde{y}))$ より

$\tilde{g}\,\tilde{\varphi}_i(g, \tilde{y}) = \tilde{g}\,\tilde{\varphi}_i(g, \varphi_i(b, \tilde{y}))$ 。したがって

$$\tilde{\varphi}_{i-1}(g, h_-(x)) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{g}\,\tilde{\varphi}_i(g, \tilde{y}) \\ {}^{\text{or}}\ \tilde{g}\,\tilde{\varphi}_i(g, \varphi_i(b, \tilde{y})) \end{array} \right\} = \tilde{g}\,\tilde{\varphi}_i(g, h(y))$$

$= \tilde{g}\, h\, \varphi_i(g, y)$ ..... ロ

イ, ロ より　$h_-\varphi_{i-1}(g, x) = \tilde{\varphi}_{i-1}(g, h_-(x))$.

$h_-(S_k^*) = \tilde{S}_k^*$　$(1 \leq k \leq i-1)$ は前と同様に示される。

したがって　$\varphi_{i-1} \xrightarrow[b]{} \varphi_i$　, $\tilde{\varphi}_{i-1} \xrightarrow[b]{} \tilde{\varphi}_i$ を Lemma 3.4 によって作られた(b による) reducing operation を表わし, $\varphi_{i-1}, \tilde{\varphi}_{i-1} \in \mathfrak{A}(G_{i-1})$ とするとき φ_i と $\tilde{\varphi}_i$ が s-congruent ならば φ_{i-1} と $\tilde{\varphi}_{i-1}$ も s-congruent であることが分かる。

そこで, 二つの finite Abelian action $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathfrak{A}(G)$ が与えられた時, $B(\varphi) = B(\tilde{\varphi})$ と仮定し $B(\varphi) = B(\tilde{\varphi}) = \{ b_1, b_2, \ldots, b_g \}$ とおく。そして reducing operation を $b_1, b_2 \ldots \ldots, b_g$ の順に $\varphi, \tilde{\varphi}$ に対しておこなうとする.

$$\varphi \xrightarrow[b_1]{} \varphi_1 \xrightarrow[b_2]{} \varphi_2 \xrightarrow[b_3]{} \cdots\cdots \xrightarrow[b_g]{} \varphi_g(G_g, M_g, S_g^{\circledast})$$
$$\tilde{\varphi} \xrightarrow[b_1]{} \tilde{\varphi}_1 \xrightarrow[b_2]{} \tilde{\varphi}_2 \xrightarrow[b_3]{} \cdots\cdots \xrightarrow[b_g]{} \tilde{\varphi}_g(\tilde{G}_g, \tilde{M}_g, \tilde{S}_g^{\circledast})$$

その時

<u>定理 4.1</u>

もしも $\varphi(G, M)$ と $\tilde{\varphi}(G, \tilde{M})$ が congruent (equivalent) ならば $\varphi_g(G_g, M_g, S_g^{\circledast})$ と $\tilde{\varphi}_g(\tilde{G}_g, \tilde{M}_g, \tilde{S}_g^{\circledast})$ も s-congruent (s-equivalent）である。（この時は自動的に $B(\Psi)=B(\tilde{\Psi})$ ）

［証明］ Ψ と $\tilde{\Psi}$ が congruent より Lemma 4.1 より Ψ_1 と $\tilde{\Psi}_1$ が s-congruent，これをくりかえせば $\Psi_g(G_g, M_g, S_g^{\circledast})$ と $\tilde{\Psi}_g(G_g, M_g, S_g^{\circledast})$ も s-congruent.

定理 4.2

上のようにして作られた $\Psi_g(G_g, M_g, S_g^{\circledast})$ と $\tilde{\Psi}_g(\tilde{G}_g, \tilde{M}_g, \tilde{S}_g^{\circledast})$ が s-congruent（s-equivalent）ならば $\Psi(G, M)$ と $\tilde{\Psi}(G, \tilde{M})$ も congruent（equivalent）である。

＜注＞ ここでは，上の各 b_i について $\Psi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\circledast})$ と $\tilde{\Psi}_{i-1}(\tilde{G}_{i-1}, \tilde{M}_{i-1}, \tilde{S}_{i-1}^{\circledast})$ において $M_{i-1}-S'_{b_i}(\Psi_{i-1})$ と $\tilde{M}_{i-1}-S'_{b_i}(\tilde{\Psi}_{i-1})$ が連結であるかないかが"同じ"であるという仮定が必要である。しかし［8］において示される結果を使えば $B(\Psi)=B(\tilde{\Psi})$ で $G_g=\tilde{G}_g$ ならばこの仮定は必要ないことが示される。

［証明］ Lemma 4.2 より明らか

［Remark］ Ψ_g，$\tilde{\Psi}_g$ はともに $S^1(\Psi_g)=\phi=S^1(\tilde{\Psi}_g)$ である．さらに $\Omega(G)/\sim$ から $\Omega(G_g)/\underset{s}{\sim}$ ，は単射であることが定理4.1，定理4.2 よりわかる。

次の節で全射であることを示す。

§ 5. reducing operation の逆操作

finite Abelian action $\varphi \in \mathfrak{A}(G)$ より何回かの reducing operation をしてえられた finite Abelian s-action を φ_{i-1} $(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\circledast})$ とする。

さて 上の G_{i-1}, $b = b_i \in B \cap G_{i-1}$ と finite Abelian s-action $\varphi_i \in \mathfrak{A}_s(G_i, M_i, S_i^{\circledast})$ が与えられたとする。このとき, 次の二つ [A], [B] の場合を考える

[A] G_i が G_{i-1} の index 2 の部分群で $b_i \notin G_i$ のときは次のようにして φ_i から $\mathfrak{A}_s(G_{i-1})$ の元を作る.

M_i の copy M_i' をとり z を M_i から M_i' の上への同相写像, $j = z|_{S_i^{**}}$ として $\bar{M}_{i-1} = M_i \underset{j}{\cup} M_i'$ とすれば $\bar{M}_{i-1}$ は 2次元多様体で $\bar{\varphi}_{i-1} : G_{i-1} \times \bar{M}_{i-1} \longrightarrow \bar{M}_{i-1}$ を次のように定める。(但し $S_i^{\circledast} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \cdots, S_i^{**})$)

$$\bar{\varphi}_{i-1}(g, x) = \begin{cases} \varphi_i(g, x) & (g \in G_i \quad x \in M_i) \\ z\,\varphi_i(g, z^{-1}(x)) & (g \in G_i \quad x \in M_i') \\ z\,\varphi_i(bg, x) & (g \in G_{i-1} - G_i \quad x \in M_i) \\ \varphi_i(bg, z^{-1}(x)) & (g \in G_{i-1} - G_i \quad x \in M_i') \end{cases}$$

すると $\bar{\varphi}_{i-1}$ は well-defined で

<u>Lemma 5.1</u> $\bar{\varphi}_{i-1}$ は次の性質をみたすので finite Abelian s-action になる。

① $S_b^1(\bar{\varphi}_{i-1}) = S_i^{**}$

$S^1_h(\varphi^-_{i-1}) = S^1_h(\varphi_i) \underset{j}{\cup} \tau(S^1_h(\varphi_i))$ $(h\in G_i \quad h\neq b)$

$S^1_h(\varphi^-_{i-1}) = \phi$ $(h\notin G_i \quad h\neq b)$

② $S^0_H(\varphi^-_{i-1}) = S^0_H(\varphi_i)\underset{j}{\cup}\tau(S^0_H(\varphi_i))$ $(H\subset G_i)$

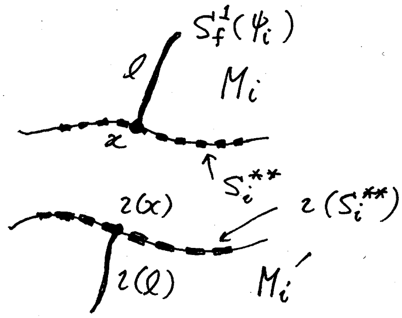
$S^0_H(\varphi^-_{i-1}) = \phi$ $(H\not\subset G_i)$

③ $S^{*-}_k = S^{**}_k \underset{j}{\cup} \tau(S^{**}_k)$ とおくと $(1\le k\le i-1)$ S^{*-}_k は∂M^-_{i-1}上のarcとloopからなり $\varphi^-_{i-1}(g, S^{*-}_k) = S^{*-}_k$ $(g\in G_{i-1})$

④ $M^-_{i-1} - S^1_b(\varphi^-_{i-1})$ は連結でない。

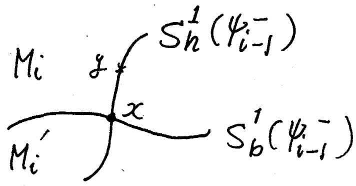
そこで $S^{\circledast -}_{i-1} = (S^{*-}_1, S^{*-}_2, \cdots, S^{*-}_{i-1})$ とおくと $\varphi^-_{i-1} \in \mathcal{A}_S(G_{i-1}, M^-_{i-1}, S^{\circledast-}_{i-1})$ となる。

[証明] finite Abelian action になることは定義にしたがって確かめればよい. 次に $x\in S^1_b(\varphi^-_{i-1})$ のとき もしも $x\notin M_i$ とすれば $x=\varphi^-_{i-1}(b,x) = \varphi_i(bb, \tau^{-1}(x)) = \varphi_i(e,\tau^{-1}(x)) = \tau^{-1}(x)\in M_1$ (矛盾) <bはorder 2であった>
$x\notin M_i'$ のときも同様. 故に $x\in M_i\cap M_i' = S^{**}_i$. また $h\in G_i$ $(h\neq b)$ のとき $\subset$ は定義により確かめればよい. また逆も $x\notin S^{**}_i$ の時は明らか. $x\in S^{**}_i$ の時は, $S^1(\varphi_i)$ の性質と $S^{**}_i\subset \partial M_i$ より図をみれば明らかに $x\in S^1_h(\varphi^-_{i-1})$ となる.



さて $h\notin G_i$ $h\neq b$ のときは もしも $\exists x\in S^1_h(\varphi^-_{i-1})$ として $h = bh'$ s.t $h'\in G_i$

ととれば $x \in S_i^{**} = S_b^1(\varphi_{i-1}^-)$ となるが
$S^1(\varphi_{i-1}^-)$ の性質より右図のようになるが
図のような点 $y \in M_i$ は $\varphi_{i-1}^-(h, y) \in M_i'$ と
なり矛盾 ($\varphi_{i-1}^-(h, y) = y$)。よって $S_h^1(\varphi_{i-1}^-) = \phi$



③ ④ は定義に従って確かめればよい。

<u>Cor.</u> もしも φ_i が φ_{i-1} より b による reducing operation でえられた(さらに $M_{i-1} - S_b^1(\varphi_{i-1})$ が連結でない)ものとすると、上の Lemma で作られた $\varphi_{i-1}^-(G_{i-1}, M_{i-1}^-, S_{i-1}^{\circledast -})$ と $\varphi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\circledast})$ は s-congruent (s-equivalent) である

また上の Lemma で作られた φ_{i-1}^- に b による reducing operation をほどこしてえられた (Lemma 3.3 によって作られる) $\varphi_i^+(G_i^+, M_i^+, S_i^{\circledast +})$ は $\varphi_i(G_i, M_i, S_i^{\circledast})$ と s-congruent (s-equivalent) である。したがってこの場合 $\mathfrak{A}_s(G_{i-1})$ の s-congruence class と $\mathfrak{A}_s(G_i)$ の s-congruence class は 1 対 1 の対応(全単射)をする。

[B] $G_i = G_{i-1}$ の時は次のように φ_i から $\mathfrak{A}_s(G_{i-1})$ の元 φ_{i-1}^- を作る。

M_i の 2 元 x, y に対して $x \sim y$ とは

(i) $x, y \in S_i^{**}$ のときは $x = y$ or $\varphi_i(b, x) = y$

(ii) その他のときは $x = y$

のときと定め M_i に equivalence relation $\sim$ を入れ、

$M_{i-1}^{-} = M_i/\sim$ 、$\gamma^{-} : M_i \longrightarrow M_{i-1}^{-}$ (natural projection)

とおき ($S_i^{\circledast} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \cdots, S_i^{**})$) 、$\psi_{i-1}^{-} : G_{i-1}$

$\times M_{i-1}^{-} \longrightarrow M_{i-1}^{-}$ を $g \in G_{i-1}$ $x \in M_{i-1}^{-}$ に対して

$\exists y \in M_i$ s.t. $\gamma^{-1}(y) = x$ をとり $\psi_{i-1}^{-}(g, x) = \gamma^{-}\psi_i(g, y)$ と定めると ψ_{i-1}^{-} は well-defined (y のとり方によらない) で $S_k^{*-} = \gamma^{-}(S_k^{**})$ ($1 \leq k \leq i-1$) とおくと

Lemma 5.2 次の性質を ψ_{i-1}^{-} はみたすので finite Abelian s-action になる。

① $S_b^1(\psi_{i-1}^{-}) = \gamma^{-}(S_i^{**})$

$S_h^1(\psi_{i-1}^{-}) = \gamma^{-1}(S_h^1(\psi_i))$ ($h \neq b$)

② $S_H^0(\psi_{i-1}^{-}) = \gamma^{-1}(S_H^0(\psi_i))$ $H \subset G_{i-1} = G_i$

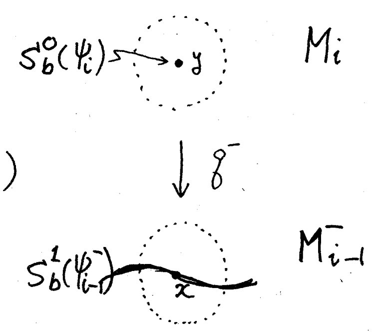
③ $\psi_{i-1}^{-}(g, S_k^{*-}) = S_k^{*-}$ ($1 \leq k \leq i-1$)

④ $M_{i-1}^{-} - S_b^1(\psi_{i-1}^{-})$ は連結 .

そこで $S_{i-1}^{\circledast -} = (S_1^{*-}, S_2^{*-}, \cdots, S_{i-1}^{*-})$ とおくと $\psi_{i-1}^{-} \in \mathcal{A}s(G_{i-1}, M_{i-1}^{-}, S_{i-1}^{\circledast -})$ となる。

[証明] $S_b^1(\psi_{i-1}^{-}) \supset \gamma^{-}(S_i^{**})$ は定義より明らか。逆に $\exists x \in S_b^1(\psi_{i-1}^{-})$ s.t. $x \notin \gamma^{-}(S_i^{**})$ とすると $\exists ! y \in M_i$ s.t. $\gamma^{-}(y) = x$ だが このyは $y \in S_b(\psi_i)$ になるが $S_b^1(\psi_i) = \phi$ だから $y \in S_b^0(\psi_i)$ 一方 $x \in S_b^1(\psi_{i-1}^{-})$ だから γ^{-} で y の近傍を移せば x の近傍となるが 矛盾 ($x \in S_b^1(\psi_{i-1}^{-})$ に) 〈図

を参照＞　また $g^-(S_h^1(\psi_i)) \subset S_h^1(\psi_{i-1}^-)$ は定義より示せ，逆も上と同じ方法により示される。すなわち $\exists x \in S_b^1(\psi_{i-1}^-)$ s.t. $x \notin g^{-1}(S_h^1(\psi_i))$ とするとき $\exists y \in M_i$ s.t $g^-(y) = x$ をとれば $y \in S_h^1(\psi_i)$ よって $\psi_i(h, y) = y$ ——㋑　または $\psi_i(h, y) = \psi_i(b, y)$ ＜i.e. $y, \psi_i(h, y) \in S_i^{**}$＞ ——㋺ となるが ㋑ の時は上と同じ，㋺ のときは $h = b$ となる．



③ ④ は定義に従って確かめれば示せる。

<u>Cor.</u>　もしも ψ_i が ψ_{i-1} より b による reducing operation でえられた（さらに $M_{i-1} - S_b^1(\psi_{i-1})$ が連結）ものとすると，上の Lemma で作られた $\psi_{i-1}^-(G_{i-1}, M_{i-1}^-, S_{i-1}^{\circledast -})$ と $\psi_{i-1}(G_{i-1}, M_{i-1}, S_{i-1}^{\circledast})$ は s-congruent (s-equivalent) である。

また上の Lemma で作られた ψ_{i-1}^- に b による reducing operation を施して（Lemma 3.4 によって作られた）$\psi_i^+(G_i^+, M_i^+, S_i^{\circledast +})$ は $\psi_i(G_i, M_i, S_i^{\circledast})$ と s-congruent (s-equivalent) である。したがってこの場合 $\mathcal{R}_s(G_{i-1})$ の s-congruence class と $\mathcal{R}_s(G_i)$ の s-congruence class は 1 対 1 の対応（全単射）をする。

これらの結果をまとめると，B の任意の部分群 B' に対して $G(B') = G/B'$ と表わすとき，任意の finite Abelian action $\psi \in \mathfrak{A}(G)$ から何回かの reducing operation を行なって 1次元 singular set のない finite Abelian s-action $\psi_g \in \mathfrak{A}_s(G_g)$ がえられたとき $\exists B' \subset B$ s.t. $G(B') = G_g$ である。また逆にある $B' \subset B$ に対して $G_r = G'(B')$ とおき ψ_r を任意の1次元 singular set のない finite Abelian s-action で $\psi_r \in \mathfrak{A}_s(G_r)$ ならば $\exists \psi \in \mathfrak{A}(G)$; finite Abelian action s.t. ψ_r は ψ より r 回の reducing operation によって得られる。（s-congruence class の意味で）したがって §4 の結果と合わせて，

<u>定理</u>　$\mathfrak{A}_s^{\oplus}(G) = \bigcup \{\mathfrak{A}_s^1(G/B') ; B'$ は B の部分群$\}$ と表わすとき $\mathfrak{A}(G)$ の congruence class と $\mathfrak{A}_s^1(G)$ の s-congruence class は1対1の対応をする。（但し $\mathfrak{A}_s^1(G/B')$ は1次元 singular set のない finite Abelian s-action $\psi^+ \in \mathfrak{A}_s(G/B')$ の集合）すなわち $\mathfrak{A}(G)$ の congruent (equivalent) による分類は1次元 singular set のない $\mathfrak{A}_s(G(B'))$ の分類に帰着される。

REFERENCES

[1] A. L. Edmonds, Surface symmetry I , Michigan Math. J., 29 (1982) 171-183

[2] P. A. Smith, Abelian actions on 2-manifolds , Michigan Math. J., 14 (1967) 257-275

[3] G. T. Whyburn, ANALYTIC TOPOLOGY , Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 28. Amer. Math.Soc., 1942

[4] K. Yokoyama, Classification of periodic maps on compact surfaces: I , Tokyo J. Math., 6 (1983) 75-94

[5] K. Yokoyama, Classification of periodic maps on compact surfaces: II , Tokyo J. Math., 7 (1984) 249-285

[6] K. Yokoyama, Note on periodic maps on compact surfaces , preprint

[7] K. Yokoyama, Complete classification of periodic maps on compact surfaces, preprint

[8] K. Yokoyama, Note on finite Abelian actions on compact 2-manifolds, preparation

[9] K. Yokoyama, A classification of periodic maps on 2-manifolds , 京都大学数理解析研講究録 369「3次元多様体の構造と位置の問題」 8 – 30 (1979年11月)

[10] K. Yokoyama, Periodic maps on compact surfaces II , 京都大学数理解析研講究録 487「3.4次元多様体における位置と構造」 84 - 111 (1983年5月)