数理解析研究所講究録
565 巻 1985 年 167-185

非因果的確率積分方程式について.

神戸大自然科学　藤田　安啓　(Yasuhiro Fujita)

本講演では次の確率積分方程式について考える。

$$(1)\quad F(x,\omega) = H(x,\omega) + \int_0^1 K(x,y)F(y,\omega)dy + \int_0^1 L(x,y)F(y,\omega)dW(y)$$

ここで，H，$K(x,y)$ および $L(x,y)$ は与えられた函数，W は Wiener 過程である。(1) の右辺第3項の確率積分は forward でも backward でも解釈をつけることができない。そこで，ここでは noncausal な確率積分を使って，(1) の解の定義，存在と一意性について論ずる。解は一般には超函数の範囲内でしか，求まっていない。Savenko - Shevljakov [4] は，(1) の右辺の第2項が centered Poisson measure による積分にかわったときに，超函数での解の存在と一意性を示している。ここでの結果も超函数での解の存在と一意性について論じるのだが，[4] の結果よりは若干よくなっている。次の問題は果たして，どんなときに，解が実在の函数（例えば $L^2([0,1]\times\Omega)$）として，存

在するかについてであるが，これについては§3で論じる。数理研の講演中の証明に誤りがあったため，内容をかえているが，そのときの証明のアイデアと問題点について，§4で考える。ここでのnoncausalな確率積分はIto積分の拡張になっているが，Stratonovich型の確率積分の拡張になっているときについては，本誌で小川氏が論じている。

§1 Extended Ito integral. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$を確率空間として，$w(x)$ $(0 \le x \le 1)$をその上の1次元Wiener過程とする。$\mathcal{F}_x = \sigma(w(y), 0 \le y \le x)$として，$[0,1]^K$上の$\sigma$-fieldを$\mathcal{B}(I^K)$と書くことにする。$(I = [0,1])$．$\mathcal{H}(I^K \times \Omega)$で$\mathcal{B}(I^K) \times \mathcal{F}_1$-可測な函数Fで

$$E\int_0^1 \cdots \int_0^1 |F(x_1, \cdots, x_K : \omega)|^2 dx_1 \cdots dx_K < \infty$$

なるもの全体を表わす。Wiener-Ito展開より，$F \in \mathcal{H}(I^K \times \Omega)$は一意的に

$$F(x_1, \cdots, x_K) = \sum_{p=0}^{\infty} J_p(f_p(x_1, \cdots, x_K))$$

と表わせる。ここで，J_pはp階のmultiple Wiener integralであり，$f_p(x_1, \cdots, x_K; y_1, \cdots, y_p)$は$(y_1, \cdots, y_p)$について，対称で

$$\sum_{p=0}^{\infty} p!\,\|f_p\|_{k+p}^2 < \infty$$

を満たすものである。($\|\cdot\|_n$ は $L^2(I^n)$ - norm). 次に,
$\ell = 0, 1, \cdots$ に対して, $\mathcal{H}^{(\ell)}(I^k \times \Omega)$ を

$$\mathcal{H}^{(\ell)}(I^k \times \Omega) = \Big\{ F = \sum_{p=0}^{\infty} J_p(f_p) \in \mathcal{H}(I^k \times \Omega) :$$

$$\sum_{j=0}^{\ell} \sum_{p=j}^{\infty} \{p!/(p-j)!\}\, p!\,\|f_p\|_{k+p}^2 < \infty \Big\}$$

で定義する。$\mathcal{H}^{(\ell)}(I^k \times \Omega)$ は inner product

$$(F, G)_{\ell, k} = \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{p=j}^{\infty} \{p!/(p-j)!\}\, p! \int_0^1 \cdots \int_0^1 f_p(x_1, \cdots, x_k\,;\, y_1, \cdots, y_p)$$

$$\times\, g_p(x_1, \cdots, x_k\,;\, y_1, \cdots, y_p)\, dx_1 \cdots dx_k\, dy_1 \cdots dy_p$$

により Hilbert 空間になる。$F \in \mathcal{H}^{(1)}(I^k \times \Omega)$ に対して, stochastic derivative $\mathcal{D}F$ を

$$\mathcal{D}F(x_1, \cdots, x_k\,;\, x_{k+1}) = \sum_{p=1}^{\infty} p\, J_{p-1}(f_p(x_1, \cdots, x_k\,;\, x_{k+1}, \cdot))$$

で定義する。

$$E \int_0^1 \cdots \int_0^1 |\mathcal{D}F(x_1, \cdots, x_k\,;\, x_{k+1})|^2\, dx_1 \cdots dx_k\, dx_{k+1} = \sum_{p=1}^{\infty} p \cdot p!\,\|f_p\|_{k+p}^2 < \infty$$

より $\mathcal{D}F$ は $\mathcal{H}(I^{k+1} \times \Omega)$ で well-defined である。

$F \in \mathcal{H}^{(\ell)}(I^k \times \Omega)$ に対して，高階の stochastic derivative $\mathcal{D}^j F\ (1 \leq j \leq \ell)$ を

$$\mathcal{D}^j F(x_1,\cdots,x_k;\, x_{k+1},\cdots,x_{k+j}) = \sum_{p=j}^{\infty} \{p!/(p-j)!\}\, J_{p-j}(f_p(x_1,\cdots,x_k;\, x_{k+1},\cdots,x_{k+j};\cdot))$$

で定義する。$\mathcal{H}(I^k \times \Omega)$ の dual space を同一視して，$\mathcal{H}^{(\ell)}(I^k \times \Omega)$ の dual space を $\mathcal{H}^{(-\ell)}(I^k \times \Omega)$ と書き，その norm を $\|\cdot\|_{(-\ell),k}$ と書く。$\|\cdot\|_{(-\ell),k}$ は $\mathcal{H}^{(\ell)}(I^k \times \Omega)$ と $\mathcal{H}^{(-\ell)}(I^k \times \Omega)$ の duality product を $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\ell,k}$ として

$$\|F\|_{(-\ell),k} = \sup\{ |\langle F, G\rangle_{\ell,k}| : G \in \mathcal{H}^{(\ell)}(I^k \times \Omega),\ \|G\|_{\ell,k} \leq 1\}.$$

で与えられる。最後に，$\mathcal{H}^{(\infty)}(I^k \times \Omega)$ を

$$\mathcal{H}^{(\infty)}(I^k \times \Omega) = \{ F \in \bigcap_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(\ell)}(I^k \times \Omega) : \sup_{j \geq 0} \|\mathcal{D}^j F\|_{(k+j),0} < \infty \}$$

とする。$\mathcal{H}^{(\infty)}(I^k \times \Omega)$ の dual space を $\mathcal{H}^{(-\infty)}(I^k \times \Omega)$，その norm を $\|\cdot\|_{(-\infty),k}$ とする。

Def. $F \in \mathcal{H}^{(\ell)}(I^{k+m} \times \Omega)\ (\ell = 0, -1, -2, \cdots, -\infty)$ に対して，extended Ito integral $\mathcal{I}^m F\ (m \geq 1)$ を $\mathcal{H}^{(\ell-m)}(I^k \times \Omega)$ の要素で

$$\langle \mathcal{I}^m F, G\rangle_{(m-\ell),k} = \langle F, \mathcal{D}^m G\rangle_{(-\ell),(k+m)}$$

をすべての $G \in \mathcal{H}^{(m)}(I^k \times \Omega)$ で定義する。$-\infty - m = -\infty$ と解

積する。$\mathcal{L}^m F$ は $F \in \mathcal{H}^{(\ell+m)}(I^{K+m} \times \Omega)$ $(\ell \ge 0, m \ge 1)$ のとき，$\mathcal{H}^{(\ell)}(I^K \times \Omega)$ の元で，

$$\mathcal{L}^m F(x_1, \cdots, x_K) = \sum_{p=0}^{\infty} J_{p+m}(\hat{f}_p(x_1, \cdots, x_m; \cdot)) \left(= \int_0^1 F(x) W(dx) \text{ と書く。}\right)$$

と表現される。ここで

$$\hat{f}_p(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_{m+p}) = \frac{1}{(m+p)!} \sum_{\sigma} f_p(x_1, \cdots, x_m, y_{\sigma(1)}, \cdots, y_{\sigma(m)}; y_{\sigma(m+1)}, \cdots, y_{\sigma(m+p)})$$

σ は $(1, \cdots, m+p)$ の permutation. 詳しくは Sekiguchi - Shiota [5] を参照。

§2. 解の存在と一意性.

仮定. 1) $H \in \mathcal{H}^{(-\infty)}(I \times \Omega)$

2) $$K_1 = \left[\int_0^1 \int_0^1 K^2(x, y)\, dx\, dy\right]^{1/2} < \infty$$

$$L_1 = \sup_{(x,y) \in I^2} |L(x, y)| < \infty$$

Lemma. 1. $G \in \mathcal{H}^{(\infty)}(I \times \Omega)$ のとき

$$\int_0^1 K(x, y) G(x)\, dx, \quad \int_0^1 L(x, y) \mathcal{D} G(x, y)\, dx \in \mathcal{H}^{(\infty)}(I \times \Omega).$$

Proof. Proposition 2-15 [5] より,

$$\mathcal{D}^j\left[\int_0^1 K(x,y)G(x)dx\right](y_1,\cdots,y_j)=\int_0^1 K(x,y)\,\mathcal{D}^jG(x;y_1,\cdots,y_j)\,dx.$$

$$\therefore\ \sup_{j\geq 0}\left\|\mathcal{D}^j\left[\int_0^1 K(x,y)G(x)dx\right](y_1,\cdots,y_j)\right\|^2_{0,(j+1)}$$

$$\leq K_1^2\sup_{j\geq 0}\|\mathcal{D}^jG(x;y_1,\cdots,y_j)\|^2_{0,(j+1)}$$

すなわち, $\left\|\int_0^1 K(x,y)G(x)dx\right\|_{\infty,1}\leq K_1\|G\|_{\infty,1}$. 同様にして,

$$\left\|\int_0^1 L(x,y)\mathcal{D}G(x,y)dx\right\|_{\infty,1}\leq L_1\|G\|_{\infty,1}.\qquad //.$$

Def. $F\in\mathcal{H}^{(-\infty)}(I\times\Omega)$ に対して, $\int_0^1 K(x,y)F(y)dy$ および $\dot{\int_0^1} L(x,y)F(y)W(dy)$ を ${}^\forall G\in\mathcal{H}^{(\infty)}(I\times\Omega)$ に対して

$$\left\langle\int_0^1 K(x,y)F(y)dy,\ G(x)\right\rangle_{\infty,1}=\left\langle F(y),\ \int_0^1 K(x,y)G(x)dx\right\rangle_{\infty,1}$$

$$\left\langle\dot{\int_0^1} L(x,y)F(y)W(dy),\ G(x)\right\rangle_{\infty,1}=\left\langle F(y),\ \int_0^1 L(x,y)\mathcal{D}G(x,y)dx\right\rangle_{\infty,1}$$

で定義する。これは Lemma 1 より well-defined で, $F\in\mathcal{H}(I\times\Omega)$

のとき，最初の定義と一致する。

Theorem 1. (1) は $K_1 + L_1 < 1$ のとき，$\mathcal{H}^{(-\infty)}(I \times \Omega)$ で unique solution F を持ち， $\|F\|_{(-\infty),1} \leq \dfrac{1}{1-K_1-L_1}\|H\|_{(-\infty),1}$.

Proof. operator $T : \mathcal{H}^{(-\infty)}(I\times\Omega) \to \mathcal{H}^{(-\infty)}(I\times\Omega)$

$$TF(x) = H(x) + \int_0^1 K(x,y)F(y)dy + \int_0^{\bullet 1} L(x,y)F(y)W(dy)$$

が contraction であることを示す。$F_1, F_2 \in \mathcal{H}^{(-\infty)}(I\times\Omega)$ に対して，

$$\|TF_1 - TF_2\|_{(-\infty),1}$$

$$\leq \sup\left\{ \left| \left\langle F_1(y) - F_2(y), \int_0^1 K(x,y)G(x)dx \right\rangle_{\infty,1} \right| : \|G\|_{\infty,1} \leq 1 \right\}$$

$$+ \sup\left\{ \left| \left\langle F_1(y) - F_2(y), \int_0^1 L(x,y)\,DG(x,y)dx \right\rangle_{\infty,1} \right| : \|G\|_{\infty,1} \leq 1 \right\}$$

$$= (K_1 + L_1)\|F_1 - F_2\|_{(-\infty),1}$$

これより，$^\forall F_0 \in \mathcal{H}^{(-\infty)}(I\times\Omega)$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n F_0(x)$$

は収束して，(1) の unique sol. であることがわかる。//

Remark. 逆に，$K_1 + L_1 < 1$ のとき

$$F(x) = H(x) + \int_0^1 K(x,y)F(y)dy + \int_0^1 L(x,y)DF(x,y)\,dy$$

は，$H \in \mathcal{H}^{(\infty)}(I \times \Omega)$ のとき，$\mathcal{H}^{(\infty)}(I \times \Omega)$ で unique sol. を持つ。

§3．$\mathcal{H}(I \times \Omega)$ で解が存在するのはどのような時か．

§2 で見てきたように，方程式(1)は超函数の範囲内ならば，ゆるやかな条件の下で解を一意に持つことがわかった。ではどのような時に $\mathcal{H}(I \times \Omega)$ で解を持つのか。これに関しては，Shiota [6] の他には何もわかっていないようだが，次のことはわかっている。

$\mathcal{H}_{finite}(I \times \Omega)$ をある $n \geq 0$ に対して，$F(x) = \sum_{p=0}^{n} J_p(f_p(x))$ となる F 全体とする。当然，$\mathcal{H}_{finite}(I \times \Omega) \subset \mathcal{H}^{(\infty)}(I \times \Omega)$．

Theorem 2. $H \in \mathcal{H}_{finite}(I \times \Omega)$．かつ $\sup_{0 \leq x \leq 1} E|H_p(x)|^2 < \infty$ とする。($H = \sum_{p=0}^{n} H_p$ Wiener-Ito 分解 for some $n \geq 0$)．§2 の $K(x,y)$, $L(x,y)$ は $K(x,y) = L(x,y) = 0$ $(x < y)$，$K(x,y)$ も有界で，$3L_1^2 < 1$ とする。このとき，stochastic Volterra equation：

(2) $$F(x) = H(x) + \int_0^x K(x,y)F(y)dy + \int_0^x L(x,y)F(y)\omega(dy)$$

は $F \in \mathcal{H}^{(1)}(I \times \Omega)$ で unique sol. を持つ.

存在の証明のために，いくつかの Lemma を証明する。

Lemma 3. $H = \sum_{p=0}^{\infty} H_p = \sum_{p=0}^{\infty} J_p(h_p)$ （Wiener－Ito 展解）として，$\{F_p\}_{p=0}^{\infty}$ を

$$F_0(x) = H_0(x) + \int_0^x K(x,y)F_0(y)dy$$

$$F_{p+1}(x) = H_{p+1}(x) + \int_0^x K(x,y)F_p(y)dy + \int_0^x L(x,y)F_{p-1}(y)W(dy) \quad (p \geq 1)$$

で定義する。$\{F_p\}$ は well-defined で $F_p \in \mathcal{H}_p(I\times\Omega)$．ここで，

$$\mathcal{H}_p(I\times\Omega) = \{ F : F = J_p(f_p) \text{ for some } f_p \in L^2(I^{p+1}) \quad f_p(x,y_1,\cdots,y_p) \text{ は } (y_1,\cdots,y_p) \text{ について symetric} \}.$$

Proof. $\{F_p\}$ は Volterra equation より，well-defined.

$F_p \in \mathcal{H}_p(I\times\Omega)$ を示す。F_0 は deterministic より，$F_0 \in \mathcal{H}_0(I\times\Omega)$.

$F_p \in \mathcal{H}_p(I\times\Omega)$ とする。F_{p+1} は

$$H_{p+1}(x) + \int_0^x L(x,y)F_p(y)dy \equiv \overline{H}_{p+1}(x) \quad (\text{当然 } \overline{H}_{p+1} \in \mathcal{H}_{p+1}(I\times\Omega))$$

として，

$$F_{p+1}(x) = \overline{H}_{p+1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x K_n(x,y)\overline{H}_{p+1}(y)dy \quad \text{a.s. in } L^2(I).$$

$$K_1(x,y) = K(x,y) \qquad K_n(x,y) = \int_y^x K(x,z)K_{n-1}(z,y)\,dz$$

と書ける。$\overline{H}_{p+1}$ は $\overline{H}_{p+1} = J_{p+1}(\overline{h}_{p+1})$ なる表現を持ったとする。

$$\int_0^x K_n(x,y)\overline{H}_{p+1}(y)\,dy = J_{p+1}\left(\int_0^x K_n(x,y)\overline{h_{p+1}}(y)\,dy\right) \quad P\text{-a.s. より,}$$

$$F_{p+1}(x) = \overline{H}_{p+1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{p+1}\left(\int_0^x K_n(x,y)\overline{h_{p+1}}(y\,;\,)\,dy\right) \qquad P\text{-a.s.}$$

これより, $F_{p+1} \in \mathcal{H}_{p+1}(I\times\Omega)$ を示すためには

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} J_{p+1}\left(\int_0^x K_n(x,y)\overline{h}_{p+1}(y)\,dy\right) = J_{p+1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x K_n(x,y)\overline{h_{p+1}}(y)\,dy\right) \quad \text{in } \mathcal{H}(I\times\Omega)$$

を示せば十分である。$M_n(x, y_1, \cdots, y_{p+1}) = \int_0^x K_n(x,y)\overline{h}_{p+1}(y; y_1, \cdots, y_{p+1})\,dy$ とおくと,

$$|K_n(x,y)| \le \frac{K^n (x-y)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad 0 \le y \le x \quad \left(K = \sup_{(x,y)\in I^2} |K(x,y)|\right) \text{より,}$$

$$\int_0^1 |M_n(x; y_1, \cdots, y_{p+1})|^2 dx \le \int_0^1 \left[\int_0^x K_n^2(x,y)\,dy \int_0^x |\overline{h}_{p+1}(y, y_1, \cdots, y_{p+1})|^2 dy\right] dx$$

$$\le \int_0^1\int_0^x \left[\frac{K^n (x-y)^{n-1}}{(n-1)!}\right]^2 dy\,dx \int_0^1 |\overline{h}_{p+1}(y, y_1, \cdots, y_{p+1})|^2 dy$$

$$\le \left[\frac{K^n}{(n-1)!}\right]^2 \int_0^1 |\overline{h}_{p+1}(y, y_1, \cdots, y_{p+1})|^2 dy.$$

(3) の multiple Wiener integral の kernel は $\theta > 1$ に対して，

$$\int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^{\infty} M_n(x; y_1, \cdots, y_{p+1})\Big|^2 dx \le \int_0^1 \Big[\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n |M_n(x, y_1, \cdots, y_{p+1})|^2\Big] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\theta^n} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n \int_0^1 |M_n(x; y_1, \cdots, y_{p+1})|^2 dx \cdot \frac{1}{\theta - 1}$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\theta K^2)^n}{[(n-1)!]^2} \int_0^1 |\bar{h}_{p+1}(y, y_1, \cdots, y_{p+1})|^2 dy \cdot \frac{1}{\theta - 1}$$

$$\le C(\theta, K) \int_0^1 |\bar{h}_{p+1}(y, y_1, \cdots, y_{p+1})|^2 dy. \qquad \big(C(\theta, K) < \infty\big).$$

これより，(3) の右辺は well-defined.

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} J_{p+1}(M_n(x)) - J_{p+1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} M_n(x)\Big) \Big\|^2_{\mathfrak{L}(I \times \Omega)}$$

$$= \Big\| J_{p+1}\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n(x)\Big) \Big\|^2_{\mathfrak{L}(I \times \Omega)} = (p+1)! \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n(x; y_1, \cdots, y_{p+1})\Big|^2 dx\, dy_1 \cdots dy_{p+1}$$

$$\le (p+1)! \int_0^1 |\bar{h}_{p+1}(x; y_1, \cdots, y_{p+1})|^2 dx\, dy_1 \cdots dy_{p+1} \ \frac{1}{\theta - 1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\theta K^2)^n}{[(n-1)!]^2}$$

$$\longrightarrow 0 \quad (N \to \infty). \qquad //.$$

$$\psi_p(x) = E|F_p(x)|^2 \qquad \phi_p = \sup_{0 \le x \le 1} E|H_p(x)|^2 \quad (p \ge 0).$$

$$|F_0(x)|^2 \le 2|H_0(x)|^2 + 2K^2 \int_0^x |F_0(y)|^2 dy \quad \text{より}$$

$$|F_0(x)|^2 \le 2\phi_0 e^{2K^2 x}$$

$$E|F_{p+1}(x)|^2 \leq 3E|H_{p+1}(x)|^2 + 3K^2\int_0^x E|F_{p+1}(y)|^2 dy + 3E\left|\int_0^x L(x,y)F_p(y)W(dy)\right|^2$$

F_p の multiple Wiener integral の kernel f_p に対して,

$$\hat{f}_p(x, y_1, \cdots, y_{p+1}) = \frac{1}{(p+1)!}\sum 1_{[0,x]}(y_{\sigma(1)})\, K(x, y_{\sigma(1)})\, f_p(y_{\sigma(1)}, \cdots, y_{\sigma(p+1)})$$

とおく。ここで, Σ は $(1, \cdots, p+1)$ の permutation を動く. このとき,

$$E\left|\int_0^x L(x,y)F_p(y)W(dy)\right|^2 = E|J_{p+1}(\hat{f}_p(x))|^2 = (p+1)!\int_0^1\cdots\int_0^1 |\hat{f}_p(x;y_1,\cdots,y_{p+1})|^2 dy_1\cdots dy_{p+1}$$

$$\leq (p+1)!\int_0^x dy\int_0^1\cdots\int_0^1 L^2(x,y)\,|f_p(y;y_1,\cdots,y_p)|^2 dy_1\cdots dy_p$$

$$= L_1^2(p+1)\int_0^x E|F_p(y)|^2 dy$$

$$\therefore\ \varphi_{p+1}(x) \leq 3\phi_{p+1} + 3K^2\int_0^x \varphi_{p+1}(y)dy + 3L_1^2(p+1)\int_0^x \varphi_p(y)dy.$$

Gronwall's inequality より,

$$\varphi_{p+1}(x) \leq 3\phi_{p+1}e^{3K^2x} + 3L^2(p+1)\left[\int_0^x \varphi_p(y)dy + 3K^2e^{3K^2x}\int_0^x\int_0^y \varphi_p(z)e^{-3K^2y}dz\,dy\right]$$

$$= 3\phi_{p+1}e^{3K^2x} + 3L^2(p+1)\left[\int_0^x \varphi_p(y)dy + 3K^2e^{3K^2x}\int_0^x\int_z^x \varphi_p(z)e^{-3K^2y}dy\,dz\right]$$

$$= 3\phi_{p+1}e^{3K^2x} + 3L^2(p+1)e^{3K^2x}\int_0^x \varphi_p(y)e^{-3K^2y}dy.$$

$$\psi_{p+1}(x) \le 3\phi_{p+1} e^{3K^2 x} + 3L^2(p+1)\int_0^x \psi_p(y) e^{-3K^2 y}\, dy$$

Lemma 4.

$$\psi_p(x) \le 3e^{3K^2 x} \sum_{j=0}^{p} \frac{\bar{L}^j}{j!} \frac{p!}{(p-j)!} \phi_{p-j} x^j \quad (\bar{L} = 3L^2).$$

Proof. $p=0$ のとき, $\psi_0(x) \le 3e^{3K^2 x}\phi_0$ より O.K.

p まで成立するとして,

$$\psi_{p+1}(x) e^{-3K^2 x} \le 3\phi_{p+1} + \bar{L}(p+1)\int_0^x 3\sum_{j=0}^{p} \frac{\bar{L}^j}{j!} \frac{p!}{(p-j)!} \phi_{p-j} y^j\, dy$$

$$\le 3\phi_{p+1} + 3\sum_{j=0}^{p} \frac{\bar{L}^{j+1}}{(j+1)!} \frac{(p+1)!}{(p-j)!} \phi_{p-j} x^{j+1}$$

$$= 3\sum_{j=0}^{p+1} \frac{\bar{L}^j}{j!} \frac{(p+1)!}{(p+1-j)!} \phi_{p+1-j} x^j \quad /\!/.$$

以上より,

$$\|F_p\|^2_{\mathcal{H}(I\times\Omega)} = \int_0^1 \psi_p(x)dx \le 3e^{3K^2} \sum_{j=0}^{p} \frac{\bar{L}^j}{j!} \frac{p!}{(p-j)!} \phi_{p-j}.$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \|F_p\|^2_{\mathcal{H}(I\times\Omega)} \le 3e^{3K^2} \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{p} \frac{\bar{L}^j}{j!} \frac{p!}{(p-j)!} \phi_{p-j}$$

$$= 3e^{3K^2} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=j}^{\infty} \frac{\bar{L}^j}{j!} \frac{p!}{(p-j)!} \phi_{p-j}$$

$$= 3e^{3K^2}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{L^j}{j!}\frac{(p+j)!}{p!}\phi_p$$

$$= 3e^{3K^2}\sum_{p=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{L^j}{j!}(p+j)!\right]\phi_p/p!$$

ここで，次の Lemma を使う。

Lemma 4 　　$0<L<1$ のとき

$$\sum_{j=0}^{\infty} L^j\frac{(p+j)!}{j!} \leq \frac{p!}{(1-L)^{p+1}}$$

以上より，$H\in\mathcal{H}_{finite}(I\times\Omega)$ (例えば $H=\sum_{p=0}^{n}J_p(h_p)$ として

$$\sum_{p=0}^{\infty}\|F_p\|^2_{\mathcal{H}(I\times\Omega)} \leq 3e^{3K^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\phi_p}{(1-L)^p} = 3e^{3K^2}\sum_{p=0}^{n}\frac{\phi_p}{(1-L)^p} < \infty .$$

$\therefore$ $F(x)=\sum_{p=0}^{\infty}F_p(x)$ は存在して，$F\in\mathcal{H}(I\times\Omega)$.

また，$\|DF\|^2_{\mathcal{H}(I^2\times\Omega)}<\infty$ もわかるので，$F\in\mathcal{H}^{(1)}(I\times\Omega)$.

これより，F は (3) の解であり，(3) を $\mathcal{H}(I\times\Omega)$ で満たすことが簡単な計算よりわかる。

一意性の証明

$F^{(1)}$ と $F^{(2)}$ を (3) の $\mathcal{H}^{(1)}(I\times\Omega)$ での2つの解とする。このとき，

$\tilde F = F^{(1)} - F^{(2)}$ は

$$\tilde F(x) = \int_0^x (x,y)\tilde F(y)dy + \int_0^x L(x,y)\tilde F(y)W(dy)$$

を満たす。$\tilde F=\sum_{p=0}^{\infty}\tilde F_p(x)$ (Wiener - Ito 分解) とすると，

$$\widehat{F}_0(x) = \int_0^x K(x,y)\widehat{F}_0(y)dy$$

$$\widehat{F}_p(x) = \int_0^x K(x,y)\widehat{F}_p(y)dy + \int_0^x L(x,y)\widehat{F}_{p-1}(y)W(dy). \qquad (p \geq 1)$$

Volterra 積分方程式の解の一意性より，$F_0(x) = 0$. 今 $F_j(x) = 0$ $0 \leq j \leq p-1$とすると，上の式より

$$\widehat{F}_p(x) = \int_0^x K(x,y)\widehat{F}_p(y)dy$$

これより，$\widehat{F}_p(x) = 0$. 従って $\|\widehat{F}\|^2_{\mathcal{H}(I\times\Omega)} = \sum_{p=0}^{\infty}\|\widehat{F}_p\|^2_{\mathcal{H}(I\times\Omega)} = 0$.

$$\therefore F^{(1)} = F^{(2)} \quad \text{in } \mathcal{H}(I\times\Omega) \ /\!/.$$

§4　本講演での，大きな目的は(1)の解を$\mathcal{H}(I\times\Omega)$で実現することであった。このため，(1)を次の形で近似した。

$$-\varepsilon AF(x) + F(x) - \int_0^1 K(x,y)F(y)dy - \int_0^1 L(x,y)F(y)W(dy) = H(x). \qquad (4)$$

ここで，A は Ornstein-Uhlenbeck operator. すなわち，$F = \sum_{p=0}^{\infty} F_p$ (Wiener-Itô 分解) に対して，$AF(x) = -\sum_{p=1}^{\infty} pF_p(x)$.

このとき，次の補題が重要になる。

補題　$D(A) \subset \mathcal{H}^{(2)}(I\times\Omega)$ で $F \in \mathcal{H}^{(2)}(I\times\Omega)$ のとき，

$$AF(x) = -\int_0^1 \mathcal{D}F(x,y)W(dy), \qquad \text{in } \mathcal{H}(I\times\Omega)$$

でが成立する。

この補題より，(5) の解を次のように定義した。

Def.　F が (5) の解であるとは，$F\in\mathcal{H}^{(1)}(I\times\Omega)$ で，すべての G に対して，

(5) $\varepsilon(\mathcal{D}F,\mathcal{D}G)_{0,2}+(F,G)_{0,1}-(KF,G)_{0,1}-(LF,\mathcal{D}G)_{0,2}=(H,G)_{0,1}$

が成立することである。ここで，$H\in\mathcal{H}(I\times\Omega)$，

$$KF(x) = \int_0^1 K(x,y)F(y)dy \qquad LF(x,y) = L(x,y)F(y).$$

これは，$F\in\mathcal{H}^{(2)}(I\times\Omega)$ のとき，(4) の通常の意味の解になる。

補題　$K_1<1$ とする。このとき，$\varepsilon>\dfrac{L_1^2}{4(1-K_1)}$ なら，(5) は一意に解を持つ。

証明　(5) の右辺を $\Phi(F,G)$ とおく。Φ は $\mathcal{H}^{(1)}(I\times\Omega)$ 上の bilinear form. Cauchy-Schwartz inequality より，

$$|\Phi(F,G)| \le (1+\varepsilon+K_1+L_1)\,\|F\|_{1,1}\,\|G\|_{1,1}$$

また，$\delta>0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\Phi(F,F) &\geq \varepsilon\|DF\|_{0,2}^2 + \|F\|_{0,1}^2 - K_1\|F\|_{0,1}^2 - L_1\|F\|_{0,1}\|DF\|_{0,2}^2 \\
&\geq \varepsilon\|DF\|_{0,2}^2 + (1-K_1)\|F\|_{0,1}^2 - L_1\left(\frac{\delta}{2}\|F\|_{0,2}^2 + \frac{1}{2\delta}\|DF\|_{0,2}^2\right) \\
&= \left(1-K_1-\frac{\delta}{2}L_1\right)\|F\|_{0,1}^2 + \left(\varepsilon - \frac{L_1}{2\delta}\right)\|DF\|_{0,2}^2
\end{aligned}
$$

ここで，$\frac{L_1}{2\varepsilon}<\delta<\frac{2(1-K_1)}{L_1}$ と取れば，(これは仮定より可能).

$$
\geq \min\left(1-K_1-\frac{\delta}{2}L_1,\ \varepsilon-\frac{L_1}{2\delta}\right)\|F\|_{1,1}^2 .
$$

従って，Lax - Milgram の定理より，(4)の *unique sol.* は存在して

$$
\|F\|_{1,1} \leq \frac{1}{\min\left(1-K_1-\frac{\delta}{2}L_1,\ \varepsilon-\frac{L_1}{2\delta}\right)}\|H\|_{0,1} \qquad //.
$$

本講演での証明の間違いは，(4)の解がすべての $\varepsilon>0$ に対して存在しているとしてしまったために起こった。しかも，もしすべての $\varepsilon>0$ に対して，(4)の解が存在しても，$\varepsilon\downarrow 0$ とすることは，PDE の特異摂動に対応して，非常にむずかしい問題である。Ornstein - Uhlenbeck op. A は無限次元での *viscosity* にあたり，(1)の近似として，(5)を考えるのは，PDE ではよくなされている。[1] [2]．しかし，[1]，[2] では(1)の解の概念を通常とは違うもの（もちろん，一意性は成立）としている。そこで，(1)の解の概念をかえれば，果たして，(1)の解が

$\mathcal{H}(I\times\Omega)$ で存在するのか。それとも，(1)のようなSDIは $\mathcal{H}(I\times\Omega)$ では解を持たないなどと問題は多い。また，(1)に帰着しうる現象の存在もまだよく分かっていない。

最後に証明に間違いがあったことをおわびすると同時に，これからの反省点としていきたいと思います。

References.

[1] M. G. Crandall, The semi-group approach to first order quasilinear equations in several space variables, Israel J. Math, 11 (1972), 108 - 132.

[2] M. G. Crandall and P. L. Lions. Viscosity solution of Hamilton - Jacobi equations, T.A.M.S. 277 (1983) 1-42.

[3] S. Ogawa, Quelques propriétés de l'integrale stochastique du type noncausal, Japan J. of Appl. Math. 1 (1984).

[4] Savenko and Shevljakov, Some stochastic integral equations containing a centered Poisson measure, Theory of random processes 11 (1984) 98 ~ 102 (in Russian).

[5] T. Sekiguchi and Y. Shiota, L^2-theory of noncausal stochastic integral, to appear in Toyama. Math. J.

[6] Y. Shiota, A linear stochastic differential equation of noncausal type, preprint.