数理解析研究所講究録
565巻 1985年 158-166

ある種の確率偏微分方程式の解の近似について

九大工. 国田 寛 (Hiroshi Kunita)

ランダムな係数をもつ偏微分方程式を確率偏微分方程式という. ランダムな媒質における熱方程式, ランダムなポテンシャルをもつSchrodinger方程式等はその例であり, 物理学の種々の問題と関係して研究されている. 一方制御理論, フィルター理論等工学の問題においても確率偏微分方程式が研究されている. この報告では非線形フィルター理論で用いられるZakaiの確率偏微分方程式をとりあげ, その方程式の解の近似を確率力学系(Stochastic flow)の近似の問題と関連させて論じたい.

I. Zakaiの確率偏微分方程式

まず二階及び一階の偏微分作用素を導入する

$$L(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} X_j(t)^2 + h_0(t),$$

$$M_k(t) = Y_k(t) + h_k(t), \qquad k=1,\dots,m.$$

ただし $X_j(t)$, $j=1,\cdots,r$ 及び $Y_k(t)$, $k=1,\cdots,m$ は一階偏微分作用素で

$$X_j(t)=\sum_{i=1}^{d}X_j^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad Y_k(t)=\sum_{i=1}^{d}Y_k^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表わされ係数 $X_j^i(t,x)$, $Y_k^i(t,x)$ は (t,x) につき連続かつ x について C^∞-級関数とする. $h_k(t)=h_k(t,x)$, $k=0,\cdots,m$ は (t,x) について連続, x について C^∞-関数とする.

$W_t=(W_t^1,\cdots,W_t^m)$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F}_t)$ 上の standard なブラウン運動とする. Zakai の確率偏微分方程式は次のように表わされる

$$(1)\qquad du_t(x,\omega)=L(t)u_t(x,\omega)dt+\sum_{k=1}^{m}M_k(t)u_t(x,\omega)\circ dW_t^k$$

定義 確率場 $u_t(x,\omega)$; $0\le t\le T$, $x\in R^d$ が次の性質をもつとき, $t=t_0$ で初期値 $f(x)$ をもつ方程式(1)の解という.

(i) ほとんど全ての ω に対し, $u_t(x,\omega)$ は (t,x) について連続かつ x について C^∞-級関数

(ii) x を固定すると $u_t(x)$ は $\mathcal{F}_t$ に適合した semimartingale かつ, その martingale 部分は (t,x) について連続かつ x について C^∞-級 (a.s.)

(iii) 各 x を固定すると次の確率積分方程式をみたす

$$(2)\qquad u_t(x)=f(x)+\int_{t_0}^{t}L(\tau)u_\tau(x)\,d\tau+\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}M_k(\tau)u_\tau(x)\circ dW_\tau^k.$$

上の確率偏微分方程式の解の存在，一意性については，Pardoux [1]，Krylov - Rozovsky [2]，Kunita [3] 等の研究がある

二階の放物型線形方程式の解は確率微分方程式の解を用いて表現されることはよく知られている　上述のZakai方程式の解も確率微分方程式の解を用いて表現出来る　このことを示すために別の確率空間 $(W, \mathcal{B}, \hat{P})$ 上に r-次元 Wiener 過程 $B_t(w) = (B_t^1(w), \cdots, B_t^r(w))$ を用意する　直積空間 $(\Omega \times W, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, P \otimes \hat{P})$ を考えると，W_t と B_t は独立な Wiener 過程である．

$$\tilde{\mathcal{F}}_{s,t} = \sigma(B_u - B_v,\ W_u - W_v;\ s \le u, v \le t)$$

とおく．$(\Omega \times W, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, P \otimes \hat{P})$ 上に次の後向き確率微分方程式を考える．

$$(3) \qquad \hat{d}\xi_s = -\sum_{j=1}^{r} X_j(s, \xi_s) \circ \hat{d}B_s^j - X_0(s, \xi_s) - \sum_{k=1}^{m} Y_k(s, \xi_s) \circ \hat{d}W_s^k$$

<u>定義</u>．t を固定する．$\tilde{\mathcal{F}}_{s,t}$ に適合した後向きの連続 semi-martingale $\hat{\xi}_s$, $s \in [0, T]$ が

$$(4) \qquad \hat{\xi}_s = x + \sum_{j=1}^{r} \int_s^t X_j(\tau, \hat{\xi}_\tau) \circ \hat{d}B_\tau^j + \int_s^t X_0(\tau, \hat{\xi}_\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{m} \int_s^t Y_k(\tau, \hat{\xi}_\tau) \circ \hat{d}W_\tau^k$$

をみたすとき(3)の解という．ただし $X_j(\tau, x)$，$Y_k(\tau, x)$ は一階偏微分作用素 $X_j(t)$，$Y_k(t)$ の係数の作るベクトル．

$\int_s^t f_\tau \circ \hat{d}B_\tau$ は後向きの Stratonovich 確率積分で，$\mathcal{F}_{s,t}$ に適合した後向き semimartingale $f_s,\ s\in[0,T]$ に対し次式で定義される．

$$\int_s^t f_\tau \circ \hat{d}B_\tau = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{2}(f_{t_\ell}+f_{t_{\ell+1}})(B_{t_{\ell+1}}-B_{t_\ell})$$

ただし $\Delta=\{s=t_1<t_2<\cdots<t_n=t\}$．

以下では係数 $X_j(\tau,x)$，$Y_k(\tau,x)$ は有界関数であるとする．このとき (4) は唯一つの解をもつ．それを $\hat{\xi}_{s,t}(x)=\hat{\xi}_{s,t}(x,\omega,\tilde{\omega})$ と書く．次の命題はよく知られている．

__命題 1.__ $\hat{\xi}_{s,t}(x,\omega,\tilde{\omega})$ の変形で，ほとんど全ての $(\omega,\tilde{\omega})$ に対して次の性質をもつものが存在する．

(i) $\hat{\xi}_{s,t}(x,\omega,\tilde{\omega})$ は (s,t,x) について連続，x について C^∞．

(ii) s,t を固定すると，写像 $\hat{\xi}_{s,t}(\cdot,\omega,\tilde{\omega}):R^d\to R^d$ は C^∞ 微分同型である．

(iii) $\forall s<t$ に対し $\hat{\xi}_{s,u}=\hat{\xi}_{s,t}\circ\hat{\xi}_{t,u}$

証明は Kunita [4] を参照されたい．

今 t_0 を固定して $t\in[t_0,T]$ に対し

(5) $$u_t(x,\omega)=\tilde{E}\Big[f(\hat{\xi}_{t_0,t}(x,\omega,\cdot))\exp\Big\{\sum_{k=1}^m\int_{t_0}^t h_k(\tau,\hat{\xi}_{\tau,t}(x,\omega,\cdot))\circ\hat{d}W_\tau^k + \int_{t_0}^t h_0(\tau,\hat{\xi}_{\tau,t}(x,\omega,\cdot))d\tau\Big\}\Big]$$

とおく．

定理 2. 上の $u_t(x,w)$ は (2) の解である

証明の概略.

$$\Phi_{s,t}(x) = \exp\Big\{\sum_{k=1}^{m}\int_s^t h_k(r, \hat{\xi}_{r,t}(x))\circ \hat{d}W_r^k + \int_s^t h_0(r, \hat{\xi}_{r,t}(x))\,dr\Big\}$$

とおく. 後向きの伊藤の公式 (Kunita [4]) を後向きの積分に適用すると, 次の前向きの伊藤型公式を得る.

(6) $f(\hat{\xi}_{s,t}(x))\hat{\Phi}_{s,t}(x) - f(x)$

$$= \sum_{j=0}^{r}\int_s^t X_j(\tau)(f\circ\hat{\xi}_{s,\tau}\,\hat{\Phi}_{s,\tau})(x)\circ dB_\tau^j$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\int_s^t Y_k(\tau)(f\circ\hat{\xi}_{s,\tau}\,\hat{\Phi}_{s,\tau})(x)\circ dW_\tau^k$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\int_s^t f\circ\hat{\xi}_{s,\tau}(x)\, h_k(\tau, \hat{\xi}_{s,\tau}(x))\,\hat{\Phi}_{s,\tau}(x)\circ dW_\tau^k$$

$$+ \int_s^t f\circ\hat{\xi}_{s,\tau}(x)\, h_0(\tau, \hat{\xi}_{s,\tau}(x))\,\hat{\Phi}_{s,\tau}(x)\,d\tau$$

ただし $B_t^0 = t$ とする. 右辺の第一項を伊藤積分で書き直すと

(7) $$\sum_{j=1}^{r}\int_s^t X_j(\tau)(f\circ\hat{\xi}_{s,\tau}\,\hat{\Phi}_{s,\tau})(x)\,dB_\tau^j$$

$$+ \int_s^t L(\tau)(f\circ\hat{\xi}_{s,\tau}\,\hat{\Phi}_{s,\tau})(x)\,d\tau$$

(6) の各項を測度 $\hat{P}$ で積分する. 左辺は $u_t(x,w) - f(x)$. 右辺の第一項の積分は (7) の第一項の積分が 0 であることに注意し, 微分と積分の順序交換を行えば

$$\tilde{E}\left[\int_s^t L(\tau)(f\circ\hat{\xi}_{s,\tau}\hat{\Phi}_{s,\tau})(x)\,d\tau\right] = \int_s^t L(\tau)u_\tau(x,\omega)\,d\tau$$

(6)の右辺の第2項の積分は，確率積分と順序交換を行うことにより

$$\sum_{k=1}^m \int_s^t Y_k(\tau)u_\tau(x,\omega)\circ dW_\tau^k.$$

第3項及び第4項の積分についても類似の結果を得る。これらを合せれば(2)が成立することがわかる。

II. 解の近似

確率微分方程式の近似解を求める方法として，Wiener過程を折線で近似したり，mollifierを用いて滑らかなもので近似する方法が知られている。これらの方法は確率微分方程式の解がstochastic flowを定義することを証明するために用いられた。Ikeda-Watanabe [5], Bismut [6], Shu [7]. 確率偏微分方程式についてもこれらの近似が有効であることを示そう。

Wiener過程 $W_t=(W_t^1,\dots,W_t^m)$ の折線近似 $W_t^{(n)}$ は次のように定義する。

$$W_t^{(n)} = W_{\frac{k}{n}T} + \frac{n}{T}\left(W_{\frac{k+1}{n}T} - W_{\frac{k}{n}T}\right)\left(t-\frac{k}{n}T\right),$$

$$\frac{k}{n}T \le t < \frac{k+1}{n}T \quad \text{のとき}$$

また mollifier による近似列 $W_t^{(n)}$ は次で定義する.

$$W_t^{(n)} = \int_0^T W_s \varphi_n(t-s)ds$$

ただし $\varphi(t)$ は $[0,1]$ に台をもつ非負 C^∞ 関数で $\int_0^1 \varphi(s)ds = 1$. $\varphi_n(t) = n\varphi(ns)$. いずれの場合でも $W_t^{(n)}, n=1,2\cdots$ は W_t に一様収束する.

Wiener 過程 W_t の区分的になめらかな近似列 $W_t^{(n)}, n=1,2\cdots$ が与えられているとする. 各 n に対し次の確率偏微分方程式を考える.

$$(8) \qquad \frac{\partial u_t(x)}{\partial t} = L(t)u_t(x) + \sum_{k=1}^{m} M_k(t)u_t(x)\cdot \dot{W}_t^{(n),k}$$

ただし $\dot{W}_t^{(n)}$ は $W_t^{(n)}$ の時間微分である. $t=t_0$ で初期値 $f(x)$ をとる解を $u_t^n(x,w)$ とする. これを前節と同様に確率微分方程式の解を用いて表わそう. 確率空間 $(\Omega\times W, \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}, P\times\hat{P})$ 上に次の後向き確率微分方程式を考える.

$$d\hat{\xi}_s = \sum_j X_j(\hat{\xi}_s)\circ \hat{d}B_s^j + \sum_{k=1}^{m} Y_k(\hat{\xi}_s)\dot{W}_t^{(n),k}$$

時刻 t で点 x を通る解を $\hat{\xi}_{s,t}^n(x)$ と書く. 即ち

$$(9) \qquad \hat{\xi}_{s,t}^n(x) = x + \sum_{j=0}^{r}\int_s^t X_j(\hat{\xi}_{r,t}^n(x))\circ \hat{d}B_r^j + \sum_{k=1}^{m}\int_s^t Y_k(\hat{\xi}_{r,t}^n(x))\dot{W}_r^{(n),k}dr$$

$\hat{\xi}_{s,t}^n$ についても命題1が成立する.

<u>定理3.</u> t_0を固定する.

(10) $u_t^n(x,w) = \tilde{E}[f(\hat{\xi}^n_{t_0,t}(x,w,\cdot))\,\hat{\Phi}^n_{s,t}(x,w,\cdot)]$

は(2.1)の解である. ただし

(11) $$\hat{\Phi}^n_{s,t}(x,w,\tilde{w}) = \exp\Big\{\sum_{j=1}^{r}\int_s^t h_k(\tau,\hat{\xi}^n_{\tau,t}(x))\,\dot{W}^{(n),k}_\tau\,d\tau + \int_s^t h_0(\tau,\hat{\xi}^n_{\tau,t}(x))\,d\tau\Big\}$$

証明は定理2と同様に出来る.

<u>定理4.</u> $W_t^{(n)}, n=1,2\cdots$ がWiener過程の折線近似またはmollifier近似とする. $u_t^n(x,w)$ 及び $u_t(x,w)$ をそれぞれ初期値$f(x)$をもつ確率偏微分方程式(2)及び(8)の解とする. このとき任意の $D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\cdots(\frac{\partial}{\partial x_d})^{\alpha_d}$ に対し

$$D^\alpha u_t^n(x) \Longrightarrow D u_t(x,w) \quad (\text{広義一様}) \ \text{in } L^2(P)$$

が成立する.

この定理の証明のためには次のstochastic flowの収束定理が基礎になる.

<u>定理5</u> 定理3と同じ仮定の下で

$$D^\alpha \hat{\xi}^{(n)}_{s,t}(x,w,\tilde{w}) \Longrightarrow D^\alpha \hat{\xi}_{s,t}(x,w,\tilde{w}) \quad (\text{広義一様}) \ \text{in } L^2(P\otimes\tilde{P})$$

$$D^\alpha (\hat{\xi}^{(n)}_{s,t})^{-1}(x,w,\tilde{w}) \Longrightarrow D^\alpha (\hat{\xi}_{s,t})^{-1}(x,w,\tilde{w}) \quad (\;\;''\;\;) \quad ''$$

が成立する.

文　献

[1] E. Pardoux, Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, Stochastics, 3 (1979), 127-167.

[2] N. V. Krylov-B. L. Rozovskii, On the Cauchy problem for linear stochastic partial differential equations, Math. USSR Izvestiya 11(1977), 1267-1284.

[3] H. Kunita, Cauchy problem for stochastic partial differential equations arizing in nonlinear filtering theory, Systems & Control letters, 1(1981), 37-41.

[4] H. Kunita, Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms, Lecture Notes in Math. 1097 (1984), 144-303.

[5] N. Ikeda-S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes, North Holland-Kodansha, 1981.

[6] J. M. Bismut, Mécanique aléatoire, Lecture Notes in Math. 866 (1981).

[7] J. G. Shu, On the mollifier approximation for solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. 22 (1982), 243-254.