数理解析研究所講究録
565巻 1985年 138-157

逐次推定の問題について

富山大　経済学部
高橋 一
(Hajime Takahashi)

§1. はじめに。 $x_1, x_2, \cdots$ を有限な平均 μ, 分散 σ^2 を持つ独立で同一分布にしたがう確率変数列とする時，未知の平均 μ の推定問題を考える。伝統的には与えられた標本数 n に対し標本平均 $\bar{x}_n = (x_1 + \cdots + x_n)/n$ で μ を推定するのが一般的であろう。したがって問題は，n の大きさをいかに決定するかである。さて大数の強法則(以後SLLNと記す)より $\bar{x}_n \xrightarrow{a.e.} \mu \quad n \to \infty$ が，又中心極限定理より $\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu)/\sigma \xrightarrow{d} N(0,1)$ が成立する。(ここで $N(\mu, \sigma^2)$ は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布を意味する。以下分布関数を意味する場合，及確率変数を表わす場合等あるが，その意味は文脈より明らかであろう。) 故に $\bar{x}_n$ と μ との"距離"は"確率的"には，ほぼ $\sigma/\sqrt{n}$ に比例する。(これはもち論，$\bar{x}_n$ の分散が σ^2/n であり，又 $\bar{x}_n$ が μ に収束する事を，ごく雑に言ったものであるが) これより n が大きければ，大きい

程，より精度の高い推定量が得られる。一方もしも同時にサンプリングのコストを考えれば，n の値は小さな方が良い。そこで，一個の標本のコストを1とした時，ある正定数 A に対して次の損失関数及危険関数（リスク）

$$(1.1) \qquad L_n = A(\bar{X}_n - \mu)^2 + n$$

$$(1.2) \qquad R_n = E\{L_n\} = A\sigma^2/n + n$$

に基づく，n の決定方式は合理的であろう。この様な定式化は Robbins[1959] により始めて行われたが，以後 Starr[1966], Starr and Woodroofe[1968], [1969], [1972], Woodroofe[1977], Chow and Yu[1981], Chow and Martinsek[1982], Martinsek[1983], [1984] 等により，さまざまの拡張，精密化が行われてきた。本稿では上記理論の概要を論じたあと，最近の martingale 理論に於ける大きな結果の一つである Burkholder, Davis and Gundy[1972] の定理の逐次分析への応用として特に Chow and Yu[1981] の研究の一部を照介する。

§2. 問題の定式化。 まず前節で定義した R_n について考えよう。 R_n を n の連続微分可能な関数とみなせば，形式的に R_n を n で微分することより，

$$\left.\frac{d}{dn}R_n\right|_{n=\sqrt{A\sigma^2}} = 0$$

を得る。ここで正整数 n_0 を

$$\sqrt{A\sigma^2} \leq n_0 \leq \sqrt{A\sigma^2}+1 \tag{2.1}$$

とすれば，明らかに

$$R_{n_0} \leq R_n \quad \text{for all } n \tag{2.2}$$

が成立，そこで以後簡単のため A を $\sqrt{A\sigma^2}=n_0$ なる様にえらんでやれば

$$R_{n_0} = 2\sqrt{A\sigma^2} = 2n_0, \tag{2.3}$$

従って，もしも σ^2 が既知ならば，リスクを最小にする標本数は n_0 であり，その時の期待損失は (2.3) で与えられ，問題は解決している。しかしながら，σ^2 が未知の時，固定

標本数にもとずく，いかなる方法によってもこの問題を解くことは出来ない。Robbins [1959] は，$x_1, \cdots, x_n$ が観測された時 σ^2 を

$$V_n = (n-1)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

で推定し，(2.1) の類推より

$$n < \sqrt{A V_n}$$

なる限り，サンプリングを続ける方式を提唱した。即ち，停止時刻 T を，ある正整数 m に対し

$$(2.4) \qquad T = T_{A,m} = \inf\{ n \geq m \,;\, n \geq \sqrt{A V_n} \}$$

$$= \inf\{ n \geq m \,;\, V_n \leq A^{-1} n^2 \}$$

で定義して，μ を $\bar{x}_T$ で推定する。この時のリスクは，

$$(2.5) \qquad R_T = E\{ A(\bar{x}_T - \mu)^2 + T \}$$

で与えられる．ここで $\bar{x}_T = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_k I_{[T=k]}$，$L_T = \sum_{k=1}^{\infty} L_k I_{[T=k]}$，$I_A$ は集合 A の定義関数である（もち論 $P\{T<\infty\}=1$ である事は必要，このことは以下の議論より明らかになってくる）。

さて上の決定方式において，直観的には $R_{n_0} \leq R_T$ は明らかであろう（σ^2 を推定する分だけ情報の損失がある）．したがって，T にもとずく推定方式の性能の分析に際して，次の3つの量を考えることは自然であろう．

(A1)　リスク効率　R_{n_0}/R_T

(A2)　リグレット (Regret)　$R_T - R_{n_0}$

(A3)　期待標本数　$E\{T\}$

以下 (A1)〜(A3) についての Heuristic な議論を次節で与える。本節を終るにあたり次節での議論に必要な確率論からの導具を定理の形で述べておくが，その前に次の事を注意しておく；SLLN より $V_n \xrightarrow{a.e.} \sigma^2$ $(n\to\infty)$．したがって，$P\{T<\infty\}=1$ は明らか，又 $A\to\infty$ とす

れば $T_A \xrightarrow{ae} \infty$ となることも自明であろう。

<u>定理1.</u> (Anscombe [1952])。$Y_1, Y_2, \cdots$ を平均 0 で有限な分散 σ^2 をもつ同一分布からの独立な確率変数列，又 $t_1, t_2, \cdots$ は正整数値確率変数列で，ある正の定数列 $b_1, b_2, \cdots \nearrow \infty$ に対しある $c > 0$ が存在して

$$\frac{t_n}{b_n} \xrightarrow{P} c \qquad n \to \infty$$

を満足する。この時

$$(2.6) \qquad \frac{1}{\sigma\sqrt{t_n}} \sum_{k=1}^{t_n} Y_k \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad n \to \infty$$

が成立する。

次に停止時刻 T 及 (2.4) に於ける boundary crossing の際生じる"余り"の極限分布について述べるが，議論の単純化のために，<u>$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ を仮定しておく。</u> この仮定のもとで，V_n が独立で同一分布にしたがう確率変数の和に書かれることをまず示そう。

確率変数 W_k を

$$W_k = \left(\sum_{i=1}^{k} X_i - kX_{k+1}\right) \Big/ \sqrt{k(k+1)} \qquad k \geq 1$$

で定義すれば，簡単な代数計算より

$$(2.7) \quad (n-1)V_n = W_1^2 + \cdots + W_{n-1}^2$$

又 $E\{W_k\} = 0$，$Var\{W_k\} = \sigma^2$，$cov(W_k, W_j) = 0$ (for all $k \neq j$) もすぐに計算できる．したがって正規性の仮定より $W_k \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$ となり (2.7) の右辺を S_{n-1} と書くことにすれば，それは独立で $\sigma^2\chi^2(1)$ にしたがう確率変数の和となっている．これより T の定義は

$$(2.4') \quad T = T_{A,m} = \inf\{n \geq m-1;\ S_n \leq n(n+1)^2/A\}$$

とも書ける．ここで余り (Under-shoot) Z を

$$(2.8) \quad Z = T(T+1)^2/A - S_T$$

で定義する．さて，$E\{W_i^2\} = \sigma^2$，$Var\{W_i^2\} = 2\sigma^4$,

SLLN より, $S_n/n \xrightarrow{a.e.} \sigma^2$ as $n\to\infty$, (2.7)
で $Z=0$ として, $S_T \simeq \sigma^2 T$ を考慮すれば

$$(2.9).\qquad T \sim \sqrt{A\sigma^2} = n_0 \qquad (A\to\infty)$$

を得る。 より精密には

<u>定理 2.</u> (Bhattacharya and Mallik [1973])

$$(2.10)\quad T^* = \frac{T-n_0}{\sqrt{n_0}} \xrightarrow{d} N(0, \tfrac{1}{2}) \quad A\to\infty.$$

一方 Z の漸近分布については, 次の結果がある.

<u>定理 3</u> (Woodroofe [1977]). $A\to\infty$ なる時, Z と T^* とは漸近的に独立で T^* の漸近分布は $N(0,\frac{1}{2})$ 又 Z の漸近分布関数 H は密度 $h=H'$ を持つ, ここで

$$(2.11)\quad h(y) = \frac{2}{\sigma^2}P\{S_j \le 3j\sigma^2 - y,\ \forall j\ge 1\},\quad y>0.$$

さらに H の平均は

$$(2.12)\qquad \nu = \frac{3}{2}\sigma^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}E\{(S_n-3n\sigma^2)^+\},$$ となる.

<u>§3. Heuristics.</u> まず(A1)のリスク効率から考えてみよう. R_T の定義より

$$R_T = E\{A(\bar{x}_T-\mu)^2 + T\}$$

$$= E\{\frac{\sigma^2 A}{T}[\frac{\sqrt{T}}{\sigma}(\bar{x}_T-\mu)]^2 + T\}.$$

故に, リスク効率は ($n_0 = \sqrt{A\sigma^2}$ であるから)

(3.1) $$R_T/R_{n_0} = E\{\frac{n_0}{2T}[\frac{\sqrt{T}}{\sigma}(\bar{x}_T-\mu)]^2 + \frac{T}{2n_0}\}.$$

さて, SLLN より $T/n_0 \xrightarrow{a.e.} \frac{1}{2}$ $(A\to\infty)$. 又定理1より $(\sqrt{T}/\sigma)(\bar{x}_T-\mu) = \sum_1^T (x_i-\mu)/\sigma\sqrt{T}$ $\xrightarrow{d} N(0,1)$ $(A\to\infty)$. 以上より, 直観的には

(3.2) $$R_T/R_{n_0} \text{ “}\longrightarrow\text{” } E\{\frac{1}{2}[N(0,1)]^2 + \frac{1}{2}\}. \ (A\to\infty)$$

ここで "$\longrightarrow$" は極限と, 積分の順序交換が可能であれば, 有効な極限を示す. 即ち, (3.2) が可能であるための一つの十分条件は,

(a) $\{T_A/n_0,\ A>0\}$

(3.3) (b) $\{n_0/T_A,\ A>0\}$

(c) $\left\{\left[\frac{\sqrt{T}}{\sigma}(\bar{x}_T-\mu)\right]^2,\ A>0\right\}$

で与えられる列がそれぞれ一様に積分可能(u. i.)であることである。実際 $x_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ であれば $m \geq 3$ なる時 (3.2) が成立、従って、

(3.4) $$R_T/R_{n_0} \longrightarrow 1 \qquad (A\to\infty)$$

が成立することは Starr [1966] により証明されている。一般の分布の場合 (3.3) の (u.i) は Chow and Yu [1981] が証明している。これについては次節で又論じる。

次にリグレット、期待標本数について考えるが、以下簡単のため $x_i \overset{i.i.d}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ を仮定する。上と同様にして、

(3.5) $$R_T = E\left\{\frac{A\sigma^2}{T}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\sum_1^T(x_i-\mu)\right]^2 + T\right\}$$

さて，事象 $[T=n]$ は T の定義より $V_n=(n-1)^{-1}\sum_{1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ を通じてのみ $x_1,\cdots,x_n$ に依存．したがって $[T=n]$ と $\bar{x}_n$ とは独立．故に条件付き確率の議論より．もしも (3.3)(b)(c) が (u.i) であれば (3.5) は $A\to\infty$ なる時漸近的に

$$(3.6)\qquad 2n_0+E\left[\frac{T'-n_0}{\sqrt{T}}\right]^2+o(1)$$

に等しくなる。したがって．もしも $\{(T^*)^2,\ A\geq 0\}$ が (u.i) であれば定理2より (3.6) は

$$(3.7)\qquad 2n_0+\frac{1}{2}+o(1)$$

となり．リグレットは $\frac{1}{2}$ である。ここでも上と同様リグレットが有界である条件は (3.3) にみられる様な一様積分可能性に大きく依存している。正規性の仮定下でリグレットが有界である十分条件は Starr and Woodroofe [1969] により，又一般の場合同様の結果は Chow and Martinsek [1982] により研究された．上記 (3.7) は Woodroofe [1977] で証明されている。

本節の最後に期待標本数 $E(T)$ を求めてみよう。この為に T の定義式 (2.4') をもちいると便利である。Waldの補題より

$$(3.8)\qquad E\{S_T\} = E\{T\}\cdot E\{W_1^2\}$$

故に (2.8) より

$$\sigma^2 E\{T\} = E\{T(T+1)^2/A + Z\}$$

$$(3.9)\qquad = E\left\{\frac{T^3}{A}\right\} + 2\sigma^2 E\left\{\frac{T^2}{A\sigma^2}\right\} + E\{Z\} + o(1)$$

$(A\to\infty)$。ここで (3.9) の両端の式より $\sigma^2 n_0$ を引き, T^3 を n_0^3 のまわりで Taylor 展開すれば, 適当な (u.i.) 条件下で, 定理3より

$$(3.10)\qquad E\{T-n_0\} \to \frac{1}{2\sigma^2}\nu - \frac{3}{4}\sigma^2 \qquad (A\to\infty)$$

が成立する。ここで ν は (2.12) で与えられる。又 (3.10) が成り立つ一つの十分条件は $m \geq 3$ であることが Woodroofe [1977] で示されている。

§4. 一様可積分可能性. 本節では最近の martingale 理論が5の大きな結果の一つである, Burkholder, Davis and Gundy の不等式の統計学への応用例として, Chow and Yu [1981] の研究の一部を紹介する. 我々が示さいる結果は次の

定理 4. (Burkholder, Davis and Gundy [1972]).
Φ を $[0, \infty]$ で単調増加, $[0, \infty)$ で連続な関数で, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = \Phi(\infty-)$ を満足. さらに, ある定数 $c > 0$ が存在して, すべての $\lambda > 0$ に対し

$$\Phi(2\lambda) \le c\,\Phi(\lambda) \tag{4.1}$$

が成り立つものとする. この時 $1 \le \alpha \le 2$ なる任意の α に対し, ある有限定数 $A = A_{c,\alpha}$ が存在して, すべての martingale $f = \{f_n, \mathcal{F}_n, n \ge 1\}$ に対して

$$\begin{aligned} &E\{\Phi(\sup_{n\ge 1}|f_n|)\} \\ &\le A\,E\{\Phi((\sum_{j=1}^{\infty} E\{|f_j - f_{j-1}|^{\alpha} \mid \mathcal{F}_{j-1}\})^{1/\alpha})\} \\ &\quad + A\,E\{\Phi(\sup_{n\ge 1}|f_n - f_{n-1}|)\} \end{aligned} \tag{4.2}$$

が成り立つ。

定理4の証明はもち論 Burkholder et al. [1972] にあるが、比較的読みやすい証明は Chow and Teicher [1978] Ch.11 にある。Chow and Teicher [1978] にもある様、定理4の応用例としては、やはり(u.i.)性の証明の際に多くもちいられている様である。この時、例えば Brown の定理の証明の方法は標準的で、以下に述べる Chow and Yu [1981] の定理の証明も基本的には同じ方法がもちいられている（cf. Chow and Teicher [1978] p.398 Corollary 2）。次に述べるものは (3.3) (a)〜(c) の一般の場合の証明である。

<u>定理5</u>（Chow and Yu [1978]） $x_1, x_2, \cdots$ を平均 μ、分散 σ^2 の同一分布からの独立な確率変数列、停止時刻 T は (2.4) で定義されたものとする。

(1) もしも $m = o(\sqrt{A})$ as $A \to \infty$ であれば

$$(4.3) \qquad \lim_{A \to \infty} \frac{T}{\sqrt{A}} = \sigma \qquad a.e$$

$$(4.4) \qquad \lim_{A \to \infty} E\left\{\frac{T}{\sqrt{A}}\right\} = \sigma$$

(iii) もしも $E|X_1|^{2p} < \infty$ がある $p > 1$ に対し成立，そして，ある $K \geq K_{\alpha,p}$ に対し

$$K \log A \leq m = o(\sqrt{A}) \quad A \to \infty$$

であれば

$$(4.5) \quad \frac{R_T}{R_{n_0}} = E\left\{\frac{A(\bar{X}_T - \mu)^2 + T}{2n_0}\right\} \to 1$$

as $A \to \infty$．即ちリスク効率は漸近的に 1 である．

定理5の証明は，基本的には適当な martingale を考えることにより (3.3) (a)〜(c) の一様積分可能性を証明する事にある。(4.4) については(比較的初等的な) Doob の定理より証明される。(4.5) の証明に対して鍵となるのが次の補題である。

<u>補題1</u> $Y_1, Y_2, \cdots$ を平均 0 の独立な確率変数列で，ある $p \geq 2$ に対し $\{|Y_n|^p, n \geq 1\}$ は一様可積分，又 $\{M(b), b \in B\}$ $B \subset (0, \infty)$ は σ-加法族 $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ $n \geq 1$ に適応

する $\mathcal{F}_n$－停止時刻で $\{(b^{-1}M(b))^{p/2},\ b\in B\}$ は一様可積分。この時

$$(4.6)\qquad \left\{\left|\frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{i=1}^{M(b)} Y_i\right|^p,\ b\in B\right\}\ \text{は一様可積分}$$

"証明" 主要な部分のみをスケッチする。一様可積分は，ある意味での有界性の拡張である。その意味で $|b^{-1}M(b)|^{p/2}$ を有界とみなす事は可能，即ち任意の $b\in B$ に対し，

$M' = M(b)\wedge N,\quad N = [Kb]\quad K\geq 1$ を考え

$M_n = M'\wedge n$ を定義する。次に $(|Y_n|^p,\ n\geq 1)$ の一様可積分性より，任意の $\delta>0$ に対し，ある $K_1>0$ が存在して

$$\sup_{n\geq 1} E\left|Y_n I_{[|Y_n|\geq K_1]} - EY_n I_{[|Y_n|\geq K_1]}\right|^p < \delta$$

となる。ここで

$$W_n = Y_n I_{[|Y_n|\geq K_1]} - EY_n I_{[|Y_n|\geq K_1]}$$

$$Z_n = Y_n - W_n$$

と書けば $f=\{f_n=\sum_{i=1}^{M_n} w_i,\ n\geq 1\}$, $g=\{g_n=\sum_{i=1}^{n} Z_i,\ n\geq 1\}$ は，ともに martingale，ここで f に対しては $\Phi(\lambda)=\lambda^p$，$\alpha=2$ で定理4を適用すれば，多少の計算のあと，

$$(4.7)\qquad E\{|\sum_{i=1}^{M'} w_i|^p\} \leq 2A\delta E\{M'\}^{p/2}.$$

同様にして

$$(4.8)\qquad E\{|\sum_{i=1}^{M'} z_i|^{p+1}\} \leq 2^{p+1}AK_1^{p+1}E\{M'\}^{(p+1)/2}.$$

以上より $\{|\frac{1}{\sqrt{b}}\sum_{i=1}^{M'} Y_i|^p,\ b\in B\}$ の一様可積分性が証明される。証明の残りは，やはり標準的な方法（Chow and Teicher [1978]，P. 398）により行われる。

§5. 結び. §4までの議論は，もっぱら標本平均 $\bar{X}_n$ を用い μ の推定を行ってきたが，応用上の問題点としては，$\bar{X}_n$ は一般に "Outlier" に対し Robust ではない事がある。したがって応用上有効な推定方法を考えるにあたり，標本中位数，トリム平均，又はランク統計量にもとずく推定量等も広く考える必要があろう。これらの問題は，最近 Sen [1981] や Martinsek [1984] らにより論じられているが，

これからの研究課題としても興味深い問題を数多く含んでいる。

参考文献

Anscombe, F. [1952], Large sample theory of sequential estimation, Proc. Cambridge Philos. Soc. 48 pp. 600 - 607.

Bhattacharya, P. K. and Mallik, A. [1973], Asymptotic normality of the stopping times of some sequential procedures, Ann. Statists. 1. pp. 1203-1211.

Burkholder, D. L., Davis, B. J. and Gundy, R. F. [1972], Inequalities for convex functions of operators on martingales, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 2.

Chow, Y. S. and Martinsek, A. T. [1982], Bounded regret of a sequential procedure for estimation of the mean, Ann. Statists. 10, pp. 909-914

Chow, Y. S. and Teicher, H. [1978], Probability Theory, Springer-Verlag, New York.

Chow, Y. S. and Yu, K. F. [1981], The performance of a sequential procedure for the estimation of the mean, Ann. Statists. 9, pp. 184-189.

Martinsek, A. T. [1983], Second order approximation to the risk of a sequential procedure, Ann. Statists. 11, pp. 827-836.

______________ [1984], Sequential determination of estimator as well as sample size, Ann Statists, 12, pp. 533 - 550

Robbins, H. [1959], Sequential estimation of the mean of a normal population, Prob. and Statists (Harald Cramér Volume). Almquist. Uppsala.

Sen, P. K. [1981], Sequential Nonparametrics, Wiley, New York.

Starr, N. [1966]. On the asymptotic efficiency of a sequential procedure for estimating the mean, Ann. Math. Statists. 37, pp. 1173-1185.

Starr, N. and Woodroofe, M. [1969], Remarks on sequential point estimation; Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A. 63 pp. 285-288.

________________ [1968], Remarks on a stopping time; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 61. pp. 1215-1218.

Woodroofe, M. [1977], Second order approximations for sequential point and interval estimation. Ann. Statists. 5, pp. 984-995.

Starr, N. and Woodroofe. M. [1972], Further remarks on sequential estimation : the exponential case, Ann. Math. Statists. 43, pp. 1147-1154.