数理解析研究所講究録
565巻 1985年 71-87

Brownian space 上のCarleson型測度とその応用

早大理工　　新井 仁之 (Hitoshi Arai)

本稿では、解析学でよく知られたCarleson測度の確率論的アナロジーをBrownian space上に導入し、その応用を与える。まず、§1で、Brownian space 上にCarleson 型測度を定義し、それが、解析学におけるCarleson測度と類似した性質をもつことを証明する。§2では、§1で得た結果を2径数化する。その応用として、§3で、bi-disc 上のCarleson測度に関するChang[4]の結果をより一般の領域（境界がDirichlet 問題に関する正則点からなっている領域の直積）上に拡張し、また、§4では、面積積分の変形に関するStein [13]の結果を確率論的立場から論ずる。

1. Carleson型測度. まず、Brownian space の定義をしておく。$(B_t)_{t\ge0}$ をある完備確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義されたd次元Brown運動で、原点を出発点とするものとする。

$$\mathcal{F}_t = \sigma[B_s : 0 \leq s \leq t] \vee \{P\text{\_零集合}\} \qquad (t \geq 0)$$

とし、$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ $(= \vee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$ を仮定する。このとき、組 $(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t); (B_t))$ を Varopoulos [15] に習って、d 次元 Brownian space ということにする。よく知られているように、$(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t))$ は、usual condition をみたす filtered probability space になっている (cf. Meyer [11, P. 286])。

つぎに、Carleson 型測度を導入する。

定義1.1. μ を $([0,\infty[\times\Omega, \mathcal{B}([0,\infty[)\otimes\mathcal{F})$ 上の測度とする。ここで、$\mathcal{B}([0,\infty[)$ は $[0,\infty[$ の Borel 集合体を表わすものとする。つぎのノルム

$$\|\mu\|_c \equiv \sup\{\mu([\![T,\infty[\![)/P(T<\infty) : T \text{ は } (\mathcal{F}_t)\text{\_停止時間で、} P(T<\infty)\neq 0 \text{ となるもの}\}$$

が有限であるとき、μ を Carleson 型という。

このように定義しておくと、Carleson 型測度が Carleson 測度と、ほぼ同じ性質をもつことがわかる。実際、つぎの定理が成り立つ。以下、$\mathcal{M}^p \equiv \{X = (X_t) : X \text{ は } (\mathcal{F}_t)\text{\_martingale で、} X^* \equiv \sup_t |X_t| \in L^p\}$ $(0<p\leq\infty)$ とおく。

定理1.1. $([0,\infty[\times\Omega, \mathcal{B}([0,\infty[)\otimes\mathcal{F})$ 上の測度 μ に対して、

つぎの (1)〜(4) は、互いに同値である。

(1) μ は、Carleson 型

(2) $\exists C>0,\ 0<\forall p<\infty,\ \forall X\in\mathcal{M}^p:\ \iint |X|^p d\mu \le C\|X^*\|_p^p.$

(3) $1<\forall p<\infty,\ \exists C_p>0,\ \forall X\in\mathcal{M}^p:\ \iint |X|^p d\mu \le C_p\|X_\infty\|_p^p.$

(4) $1<\exists p<\infty,\ \exists C_p>0,\ \forall X\in\mathcal{M}^p:\ \iint |X|^p d\mu \le C_p\|X_\infty\|_p^p.$

証明. (1)→(2). 任意の $\lambda>0$ を固定する。$T=\inf\{t: |X_t|>\lambda\}$ とおく。$\{|X_s|>\lambda\}\subset\{T\le s\}$ であるから、

$$\{(s,\omega): |X_s(\omega)|>\lambda\}\subset [\![T,\infty[\![.$$

である。ゆえに、

$$\mu(\{(s,\omega): |X_s(\omega)|>\lambda\})\le\mu([\![T,\infty[\![)\le\|\mu\|_c P(T<\infty)$$
$$\le\|\mu\|_c P(X^*>\lambda)$$

ゆえに、(1)→(2) が成り立つ。

(2)→(3). Doob の不等式より明らか。(3)→(4) 明らか。

(4)→(1). T を任意の $(\mathcal{F}_t)$ 停止時間とする。

$X_t=E[I_{\{T<\infty\}}\|\mathcal{F}_t]$ ($I_{\{\cdot\}}$ = "$\{\cdot\}$の特性関数") とおく。このとき、

$$X_t\ge E[I_{\{T\le t\}}\|\mathcal{F}_t]=I_{\{T\le t\}}\quad ,t\ge 0$$

であるから、

$$\mu([\![T,\infty[\![)\le\iint I_{\{T\le t\}}\mu(dt,d\omega)\le\iint|X|^p d\mu$$
$$\le C_p\|X_\infty\|_p^p\le C_p P(T<\infty)$$

となるから、(4)→(1) が成り立つ。■

この定理は、Carleson の定理（cf. [7, p.33]）の確率論的アナロジーである。さらに、Fefferman-Stein の定理（cf. [7, p.240]）の確率論的アナロジーとして、つぎのことが成り立つ。

定理 1.2. $X \in \mathcal{M}^2$ に対して、$\mu_X(F) = E[\int_0^\infty I_F \, d\langle X \rangle]$, $F \in \mathcal{B}([0,\infty[) \otimes \mathcal{F}$ とおくと、

$$\|X\|_{BMO}^2 = \|\mu_X\|_C$$

である。ただし、ここで、$\|X\|_{BMO}^2 \equiv \sup_{t \geq 0} \| E[|X_\infty - X_t|^2 \| \mathcal{F}_t] \|_\infty$ とする。

定理 1.2 は、Meyer [11, p.333] から容易に導ける。

今、Carleson 型測度 μ が与えられているとする。すると、定理 1.1 (1)→(3) より、すべての evanescent set H に対して、$\mu(H) = 0$ が成り立っている。したがって、Dellacherie の定理（cf. [11, p.250]）を使えば、定理 1.2 は、つぎのように一般化できる。このことは、風巻紀彦先生よりご指摘いただいた。

定理 1.3 （風巻 [10]）. μ を $([0,\infty[\times \Omega, \mathcal{B}([0,\infty[) \otimes \mathcal{F})$ 上の測

度とする。このとき、つぎの(1),(2) は同値である。

(1) μ は、Carleson 型である。

(2) ある raw IV 過程 A が一意的に存在して、

(a) $\exists C>0$, $\forall T$ $((\mathcal{F}_t)$-停止時間$)$: $E[A_\infty - A_T \| \mathcal{F}_T] \leq C$

(b) $\mu(F) = E[\int_0^\infty I_F \, dA]$, $F \in \mathcal{B}([0,\infty[) \otimes \mathcal{F}$

をみたす。

ところで、定理1.1, 定理1.2 から Carleson 型測度が、Carleson 測度の確率論的な類似物になっていることがわかるが、それのみならず、Carleson 型測度から実際に、Carleson 測度をつくることができる。このことについて述べる。簡単のため、$d=2$ を仮定する。

μ を Carleson 型測度とする。$\tau = \inf\{t : |B_t| = 1\}$ とおき、$\Delta \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ($\mathbb{C}$ = 複素数体)とおく。Δ の Borel 集合 F に対して、

$$\tilde{F} \equiv \{(t,\omega) : B_t(\omega)\} \cap [\![0, \tau[\![$$

とおく。そこで、

$$N_\mu(F) = \mu(\tilde{F}) \quad (F \subset \Delta)$$

とおくと、この N_μ が、Δ 上の Carleson 測度になっている。実際、弧 $I \subset \partial\Delta$ に対して、$S(I) \equiv \{z \in \Delta : \frac{z}{|z|} \in I,\ 1-|z| \leq$ "Iの長さ"$/2\pi\}$ とおき、$T_I(\omega) = \inf\{\ : (t,\omega) \in \widetilde{S(I)}\}$ とおくと、$\widetilde{S(I)}$ が progressive setであるから、T_{I_i} は、$(\mathcal{F}_t)$-停止時間である。

さらに、

$$\widetilde{S(I)} \subset [\![T_I, \infty[\![, \quad P(T_I < \infty) \leq A|I| \quad (A: 絶対定数)$$

であるから、

$$N_\mu(S(I)) \leq \mu([\![T_I, \infty[\![) \leq \|\mu\|_c P(T_I < \infty) \leq A\|\mu\|_c |I|$$

が成り立つ。

2. Bi-Brownian space 上の Carleson 測度。 $(\Omega_j, \mathcal{F}^j, P^j; (\mathcal{F}^j_{t_j}); (B^j_{t_j}))$ を $n(j)$ 次元 Brownian space とする $(n(j) \geq 1$; $j = 1, 2$). $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ を $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2, P^1 \otimes P^2)$ の完備化とし.

$$\mathbb{F}_{st} = (\mathcal{F}^1_s \otimes \mathcal{F}^2_t) \vee \{\mathbb{P}\text{-零集合}\} \qquad (s, t \geq 0)$$

とおく。このとき、$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}; (\mathbb{F}_{st}); B^1, B^2)$ を $B_{n(1)} \times B_{n(2)}$ 空間という。この§では、$B_{n(1)} \times B_{n(2)}$ 空間上に Carleson 型測度を導入する。そのために、まず、random region を定義しておく。

定義 (Sato [12]). $\mathcal{P}$ を $\{A \times]s_1, t_1] \times]s_2, t_2] : 0 \leq s_j < t_j$; $j = 1, 2$; $A \in \mathbb{F}_{s_1 s_2}\}$ で生成される σ-集合体とする。

$R^1_+ =]0, \infty[$ とする。Ω から $(R^1_+)^2$ の巾集合への写像 T が、

$$\{(s, t, \omega) \in (R^1_+)^2 \times \Omega : (s, t) \in T(\omega)\} \in \mathcal{P}$$

をみたすとき、T を random region という。

この random region を使って、$B_{n(1)} \times B_{n(2)}$ 上の Carleson 型測度をつぎのように定義する。

定義2.1. μ を $((R_+^1)^2 \times \Omega, \mathcal{B}(R_+^1)^2 \otimes \mathbb{F})$ 上の測度とする。ただし、$\mathcal{B}(R_+^1)=$ "R_+^1 の Borel 集合体" とする。Random region T に対して、$S(T) \equiv \{(s,t,\omega) \in (R_+^1)^2 \times \Omega : (s,t) \in T(\omega)\}$ とおく。μ が、

$$\|\mu\|_c \equiv \sup\{\mu(S(T))/\mathbb{P}(T \neq \phi) : T \text{ は random region で、} \mathbb{P}(T \neq \phi) > 0 \text{ をみたす}\} < \infty$$

となるとき、μ を（$B_{n(1)} \times B_{n(2)}$ 上の）Carleson 型測度ということにする。

さて、ここでK^p空間の定義をしておく。

$K^p \equiv \{X = (X_{st}) : (X_{s0})_s, (X_{0t})_t$ はそれぞれ $(\mathcal{F}_s^1), (\mathcal{F}_t^2)$ に適合した局所 martingale で、$\Delta X_{st} \equiv X_{st} - X_{s0} - X_{0t} + X_{00}$ は、[3] の意味での 2 径数確率積分表示をもち、$X^* \equiv \sup_{s,t}|X_{st}| \in L^p(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})\}$ $(0 < p \leq \infty)$ とおく。

このとき、定理1.1 と同様にして、つぎのことが得られる。

定理2.1. $((R_+^1)^2 \times \Omega, \mathcal{B}(R_+^1)^2 \otimes \mathbb{F})$ 上の測度 μ に対して、つぎの (1)～(4) は互いに同値である。

(1) μ は（$B_{n(1)} \times B_{n(2)}$ 上で）Carleson 型

(2) $\exists C>0,\ 0<\forall p<\infty,\ \forall X \in K^p:\ \iint |X|^p d\mu \leq C\|X^*\|_p^p$

(3) $1<\forall p<\infty,\ \exists C_p>0,\ \forall X \in K^p:\ \iint |X|^p d\mu \leq C_p \|X_{\infty\infty}\|_p^p$

(4) $1<\exists p<\infty,\ \exists C_p>0,\ \forall X \in K^p:\ \iint |X|^p d\mu \leq C_p \|X_{\infty\infty}\|_p^p$

また、（$B_{n(1)} \times B_{n(2)}$ 上の）Carleson 型測度と Sato [12] による BMO とは、つぎのような関係にある。

定理 2.2. $X \in K^2$ で、$X=\Delta X$ とする。$\mu_X(F) \equiv E[\int_0^\infty\int_0^\infty I_F\, d\langle X\rangle]$, $F \in \mathcal{B}(R_+^{\prime})^2 \otimes \mathbb{F}$ とおくと、

$$\|\mu_X\|_c = \|X\|_{BMO}^2$$

である。ここで、$\|X\|_{BMO} = \sup\{\|X_T\|_2/\sqrt{P(T\neq\phi)}$: T は random region で、$P(T\neq\phi)>0\}$.

3. 直積領域上の Carleson 測度への応用。 S. Y.-A. Chang [4] は、つぎのことを証明した。

定理 C. Bi-disc Δ^2 上の有界な bi-harmonic 関数 u に対して、$d\mu_u \equiv |\nabla_1\nabla_2 u(z_1,z_2)|^2 \log\frac{1}{|z_1|}\log\frac{1}{|z_2|}\, dz_1 d\bar{z}_1 dz_2 d\bar{z}_2$ は、Δ^2 上の Carleson 測度である。すなわち、任意の開集合 $U \subset \partial\Delta\times\partial\Delta$

に対して、

$$(*) \qquad \mu_u(S(U)) \leq C|U|$$

をみたす。ただし、ここで、$S(U) \equiv \{(z,w) \in \Delta^2 : I_z \times I_w \subset U\}$, $I_z \equiv \{e^{i\varphi} : |\varphi - \operatorname{Arg} z| < 1-|z|\}$ であり、C は U に依存しない定数である。

また、Chang [4] は、条件 $(*)$ がつぎのことと同値であることも示している。

$$(**) \quad 1 < \forall p < \infty,\ \exists C_p > 0,\ \forall f \in L^p(\partial\Delta \times \partial\Delta) :$$

$$\int |\tilde{f}|^p d\mu_u \leq C_p \|f\|_p^p$$

($\tilde{f}$ は f の Δ^2 への bi-harmonic extension).

この§では、定理Cをより一般の領域へ拡張する。

以下、本稿では、$D_j \subset \mathbb{R}^{n(j)}$ $(n(j) \geq 2\ ;\ j = 1, 2)$ で、境界が Dirichlet 問題に関する regular boundary point (cf. [8, p.168]) からなっている有界領域を表わすものとする。

$z_j \in D_j$ に対して ω_{z_j} で z_j と D_j に関する調和測度を表わし、dV_j で $n(j)$ 次元 Lebesgue 測度を表わす。

本稿では、$z_j^{(0)} \in D_j$ を1つとり、固定し、$\omega_{z_j^{(0)}}$ を ω_j と略して記すことにする。また、簡単のため、

$$D = D_1 \times D_2,\quad \partial_0 D = \partial D_1 \times \partial D_2,\quad d\omega = d\omega_1 \times d\omega_2,\quad dV = dV_1 \times dV_2$$

とする。$G_j(\cdot,\cdot)$ を D_j の Green 関数とする。

$f \in L^1(d\omega)$ に対して、$\tilde{f}(z_1, z_2) = \iint f\, d\omega_{z_1} d\omega_{z_2} \quad ((z_1, z_2) \in D)$

とおく。

この§での主要結果は、つぎの定理である。

定理3.1. $f \in L^\infty(d\omega)$ とする。$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in D$ に対して、

$d\mu_f^\xi(\eta_1, \eta_2) \equiv G_1(\xi_1, \eta_1) G_2(\xi_2, \eta_2) |\nabla_1 \nabla_2 \tilde{f}(\eta_1, \eta_2)|^2 dV(\eta_1, \eta_2)$

とおくと、$d\mu_f^\xi$ は、任意の $1 < p < \infty$ に対して、$L^p(d\omega)$ 有界になる。すなわち、

$$1 < \forall p < \infty,\ \exists C_{p,f,\xi} > 0,\ \forall g \in L^p(d\omega):$$

$$\int_D |\tilde{g}|^p d\mu_f^\xi \le C_{p,f,\xi} \int_{\partial_0 D} |g|^p d\omega$$

が成り立つ。

この定理は、定理2.1から導かれる。

ここで、D上の Carleson 測度について述べる。

$B_j(x_j, r) \equiv \{ z_j \in \mathbb{R}^{n(j)} : |z_j - x_j| < r \} \quad (x_j \in \mathbb{R}^{n(j)},\ r > 0)$ とし、

$S_j(x_j, r) \equiv B_j(x_j, r) \cap \partial D_j$ とおく。

$z_j \in D_j$ に対して、$d_j(z_j) \equiv \inf\{ |z_j - x_j| : x_j \in \partial D_j \}$ とする。

前述の S. Y.-A. Chang [4] の bi-disc Δ^2 上の Carleson 測度の定

義を修正して、D上のCarleson測度をつぎのように定義する。

定義3.1. μをD上の測度とする。μが、

$\exists C>0,\ \forall U\subset\partial_0 D$（開集合）： $\mu(S(U))\leq C\omega(U)$

をみたすとき、μをω-Carleson測度ということにする。ただし、ここで、

$S(U)\equiv\{(z_1,z_2)\in D:\ S_1(x_1,d_1(z_1))\times S_2(x_2,d_2(z_2))\subset U$ が

$|x_j-z_j|=d_j(z_j)$ をみたすすべての $x_j\in\partial D_j$ に対して成り立つ $(j=1,2)\}$ とする。

このとき、つぎのことが成り立つ。

定理3.2. D_jが、Jerison_Kenig [9]の意味でのNTA領域であるとする。つぎの(1), (2), (3)は同値である。

(1) μは、ω-Carleson測度

(2) $\mu(D)<\infty$, $\exists\varepsilon>0$, $\exists C_{\mu,\varepsilon}>0$, $\forall U\subset\partial_0 D$（開集合）：

$$\mu(D_\varepsilon\cap S(U))\leq\omega(U),$$

ここで、$D_\varepsilon\equiv\{(z_1,z_2)\in D:\ d_j(z_j)<\varepsilon,\ j=1,2\}$.

(3) $1<\forall p<\infty$, $\exists C_p>0$, $\forall f\in L^p(d\omega)$ ： $\int_D|\tilde{f}|^p d\mu\leq C_p\int_{\partial_0 D}|f|^p d\omega$.

したがって、定理3.1及び定理3.2より、つぎの系が成り

立つ。

系 3.3. D_j を NTA 領域とする $(j=1,2)$。$f\in L^\infty(d\omega)$, $\xi\in D$ に対して、定理 3.1 で定めた測度 $d\mu_f^\xi$ は、ω-Carleson 測度である。

定理 C は、この系 3.3 の 1 つの系として導かれる。また、定理 2.1 の系として、つぎも得られる。以下、

$$H^1\equiv\{f\in L^1(d\omega):\ \|f\|_{H^1}\equiv\|N(\tilde f)\|_{L^1(d\omega)}<\infty\},\quad N(\tilde f)(x_1,x_2)$$
$$\equiv\sup\{|\tilde f(z)|:\ z\in\Gamma^1(x_1)\times\Gamma^2(x_2)\},\quad \Gamma^j(x_j)\equiv\{z_j\in D_j:\ |z_j-x_j|<2d_j(z_j)\}$$

とおく。

系 3.4. $D_j\subset\mathbb{R}^2$ を単連結な NTA 領域とする $(j=1,2)$。$f\in L^2(d\omega)$ に対して、つぎの (1), (2), (3) は同値である。

(1) f は H^1 の双対空間に属する。

(2) $\forall\xi\in D$: $d\mu_f^\xi$ は ω-Carleson 測度である。

(3) $\exists\xi\in D$: $d\mu_f^\xi$ は ω-Carleson 測度である。

この結果は、D が bi-disc の場合には、R. Fefferman [6] によって得られている。系 3.4 の D_j に関する条件が系 3.3 に比べて複雑である理由は、その証明に関数論の Walsh の定理 (cf. [14, p.170]) を使

っているという(おそらくtechnical)なものである(cf[1])。

注意。定理3.1及び系3.3の結論は、$f \in L^\infty(dw)$でなくとも、$(\tilde{f}(\tau(\xi_1)\wedge s, X^2_{\tau(\xi_2)\wedge t}))_{st} \in BMO$ (ここで、$X^j = B^j + \xi_j$; $\tau(\xi_j) = \inf\{t_j : X^j_{t_j} \notin D\}$)であれば成り立つ。

4. Varopoulosの不等式への応用.

$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P}; \mathbb{F}_{st}; B^1; B^2)$ を $B_{n(1)} \times B_{n(2)}$ 空間とし、

$B^i = (x^i_1, \cdots, x^i_{n(i)})$, $i = 1, 2$

とおく。

$X \in K^p$ $(0 < p \leq \infty)$ に対して、

$$|\nabla_i X_{st}|^2 = \sum_{j=1}^{n(i)} \left| \left(\frac{\partial X}{\partial x^i_j} \right)_{st} \right|^2 \qquad (i = 1, 2)$$

とおく。ここで、$\dfrac{\partial}{\partial x^i_j}$ は通常の確率微分である。

$X, Y \in \bigcup_{p>0} K^p$ に対して、

$$V(X, Y) \equiv \left(\int_0^\infty \int_0^\infty |\nabla_1 X_{st}|^2 |\nabla_2 Y_{st}|^2 \, ds\,dt \right)^{1/2}$$

とおく。最近、N. Varopoulos([16])は、つぎの不等式を証明した:

$1 < p < 2$, $2 < q < \infty$, $1/r = 1/p + 1/q$, $1/p + 2/q < 1$ のとき、

$\exists C_{p,q} > 0$, $\forall X \in K^p$, $\forall Y \in K^q$: $\|V(X, Y)\|_r \leq C_{p,q} \|X^*\|_p \|Y^*\|_q$

この不等式は、定理2.1を使うことによって、つぎのよう

に拡張できる。

定理4.1. $0<p<\infty$, $0<q\le\infty$, $1/r=1/p+1/q$ とする。このとき、

$\exists C_{p,q}>0$, $\forall X\in K^p$, $\forall Y\in K^q$: $\|V(X,Y)\|_r \le C_{p,q}\|X^*\|_p\|Y^*\|_q$.

証明は、[2] にゆずるが、$0<p<2$, $q=\infty$ の場合に、定理2.1. を使う。

以下、$n(1)=n(2)=2$, $D_j\subset\mathbb{R}^2$ $(j=1,2)$, 及び D_j が (多重連結) 有界 C^2 領域であることを仮定する。容易にわかるように、前述の Varopoulos の作用素 $V(\cdot,\cdot)$ は、E. Stein [13] によって導入された面積積分

$$B(u,v)(x)=\left(\iint_{\Gamma(x)}|\nabla_1 u(z_1,z_2)|^2|\nabla_2 v(z_1,z_2)|^2\,dz_1\,d\bar z_1\,dz_2\,d\bar z_2\right)^{1/2},$$

$$\Gamma(x)\equiv\Gamma^1(x_1)\times\Gamma^2(x_2)\qquad(x=(x_1,x_2)\in\partial_0 D)$$

の確率論的アナロジーになっている。

定理4.1 の系として、$B(\cdot,\cdot)$ に関する Stein の定理 ([13, Theorem]) の確率論的精密化が導かれる:

定義. $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in D$ に対して、$X^j(\xi_j,t_j)=B^j_{t_j}+\xi_j$ とし、$\tau(\xi_j)=\inf\{t_j : X^j(\xi_j,t_j)\notin D_j\}$ $(j=1,2)$ とおく。

$H^p(D)\equiv\{u : u$ は D 上の bi-harmonic 関数で、$\|u\|_{H^p}\equiv\|N(u)\|_{L^p(d\omega)}<\infty\}$

とし、 $u, v \in \bigcup_{p>0} H^p(D)$ に対して、

$$\tilde{B}^{\xi}(u,v) = \left(\int_0^{\tau(\xi_1)}\int_0^{\tau(\xi_2)} |\nabla_1 u|^2 |\nabla_2 v|^2 (X^1(\xi_1,s), X^2(\xi_2,t))\, ds\, dt\right)^{1/2}$$

$$M^{\xi}u = \sup\{|u(X^1(\xi_1,t_1), X^2(\xi_2,t_2))| : 0 \le t_j < \tau(\xi_j),\ j=1,2\}$$

とおく。

Steinの定理（[13, Theorem]）の確率論的精密化はつぎのものである。

系4.2. $0<p<\infty$, $0<q\le\infty$, $1/r = 1/p + 1/q$ とする。このとき、

$\forall \xi \in D$, $\exists C_{r,\xi} > 0$, $\exists C_{p,q,\xi} > 0$, $\exists C'_{p,q,\xi} > 0$,

$\forall u \in H^p(D)$, $\forall v \in H^q(D)$:

$$\|B(u,v)\|_{L^r(d\sigma)} \le C_{r,\xi} \|\tilde{B}^{\xi}(u,v)\|_{L^r(dP)}$$

$$\le C'_{p,q,\xi} \|M^{\xi}u\|_{L^p(dP)} \|M^{\xi}v\|_{L^q(dP)}$$

$$\le C_{p,q,\xi} \|u\|_{H^p(D)} \|v\|_{H^q(D)}$$

ただし、ここで、$d\sigma$ は、$\partial_0 D$ 上の induced Eucledean measure とする。

（注） Steinの定理は、Dが bi-disc, $\xi=(0,0)$ のとき、

$\|B(u,v)\|_{L^r(d\sigma)} \le C_{p,q} \|u\|_{H^p(D)} \|v\|_{H^q(D)}$ ということを主張している。

5. 本稿での結果の証明及び、そのほか詳しいことがらは、[1], [2] として別に発表する予定です。

参考文献

[1] H. Arai, Carleson measures on product domains and 2-parameter Brownian martingales, preprint.

[2] H. Arai, On an inequality of Varopoulos for 2-parameter Brownian martingales, preprint.

[3] Brossard and L. Chevalier, Calcul stocastiques et inégalités de norme pour les martingales bi-browniennes; application aux fonctions bi-harmoniques, Ann. Inst. Fourier, 30 (1980), 97-120.

[4] S. Y. -A. Chang, Carleson measure on bi-disc, Ann. of Math. 109 (1979) 613-620.

[5] E. Decamp, Caractérisation des espaces BMO de martingales dyadiques à deux indeces, st de fonctions bi-harmoniques sur $R_+^2 \times R_+^2$, Thése de doctrat de 3^e cycle, Grenoble (1979).

[6] R. Fefferman, Bounded mean oscillation on polydisc, Ann. of Math. 110 (1979), 395-406.

[7] J. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, 1981.

[8] L. L. Helms, Introduction to Potential Theory, Wiley-Interscience, New York, 1969.

[9] D. S. Jerison and C. E. Kenig, Boundary behaviour of harmonic functions in non-tangentially accessible domains, Advan. in Math. 46 (1982), 80-147.

[10] 風巻紀彦, Private communications (1984).

[11] P. A. Meyer, Un cours sur les integrales stochastiques, Lect. Notes in Math., 511, Springer Verlag, (1976), 245-400.

[12] H. Sato, Caractérisation par les transformations de Riesz de la classe de Hardy H^1 de fonctions bi-harmoniques sur $R_+^{m+1} \times R_+^{n+1}$, Thése de doctrat doctrat de 3^e cycle, Grenoble (1979).

[13] E. M. Stein, A variant of the area integral, Bull. Sc. math. 2^e Série 103 (1979), 449-461.

[14] 竹之内，阪井，貴志，神保．関数環．培風館．

[15] N. Th. Varopoulos, The Helson-Szegö theorem and A_p-functions for Brownian motion and several variables, J. Func. Analysis 39 (1980), 85-121.

[16] N. Th. Varopoulos, Probabilistic approach to some problems in complex analysis, Bull. Sc. math. 2^e série 105 (1981), 181-224.