数理解析研究所講究録
565巻 1985年 64-70

離散時の martingale-like sequenes

信州大・工　山崎基弘（Motohiro Yamasaki）

§1. 序

martingale を一般化した，所謂 martingale-like sequences は asymptotic martingale (amart) をはじめとして数多く知られている。ここではその主なものを、特に収束定理関係を中心に紹介する。

§2. Weak martingales

以下では、$\{X_n\}$ の可積分性を仮定する。weak martingales は Nelson [16] が導入した：

Def. $\{X_n\}$ が weak martingale とは

$$E[X_n \mid X_m] = X_m \quad a.s. \qquad (1 \leqq m \leqq n).$$

weak martingale であって martingle でない比較的簡単な例は、Bermann [2] に紹介されている。weak mart. は直交性をもつが、optional stopping theorem は成立しない [16]. 収束定理は次の形で与えられる：

<u>Th.</u> (Nelson [16], Dor [6])

L^1-bded weak martingale は conv. in prob.

[16] の証明は Burkholder によるもので、直接的な証明であるが、Dor は次の不等式を用いて証明している：

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{|X_{n-1}|\leqq\lambda}|X_n-X_{n-1}|\,dP\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\leqq(8\lambda\|X\|_1)^{\frac{1}{2}}\quad(\lambda>0).$$

この不等式は、$E[X_{n+1}|X_n]=X_n$ (all n) のもとで成立する。この仮定のもとでの興味深い不等式を Chen [11] が与えている。上の収束定理が a.s. で成立するかどうかは (L^2-bded のもとでさえ) 未解決である ([16], [6])。なお、totally finite signed measure sp. 上での L^2-bded weak mart. については a.s. 収束は言えない。又、$E[X_{n+1}|X_n]=X_n$ (all n) のもとでは L^p-bded ($1\leq\forall p<\infty$) でも div. a.s. なる例が知られている (Starr [19])。

<u>§3. Games which become fairer with time と Martingales in L^1</u>

以下では、$\{X_n, \mathcal{F}_n; n\geqq1\}$ が adapted であることを仮定する。

<u>Def.</u> (Blake [3]) $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ が game which become fairer with time (GFT) とは、

$$\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\geqq m\to\infty}P(|E[X_n|\mathcal{F}_m]-X_m|>\varepsilon)=0$$

え

<u>Def.</u> (Pe grad [17]) $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ が martingale in L^1 とは

$$E[X_n \mid \mathcal{F}_m] - X_m \to 0 \ \text{ in } L^1 \quad (n \geqq m \to \infty)$$

この2つについては次の収束定理が知られているが、他に見るべき結果は得られていない：

<u>Th.</u> (Subramanian [20], Mucci [14])

unif. integrable な GFT は conv. in L^1.

<u>Th.</u> (Peligrad [17])

L^1-bded な mart. in L^1 の process が martingale in the limit なら、conv. a.s. かつ conv. in L^1。

mart. in the limit については次節で述べる。定義から、L^1-bded な GFT や mart. in L^1 が必ずしも a.s. conv. しないことは殆んど明らかである。

<u>§4. Martingales in the limit</u>

Mucci [14] により導入された：

<u>Def.</u> $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ が martingale in the limit (MIL) とは

$$\lim_{n \geq m \to \infty} (E[X_n \mid \mathcal{F}_m] - X_m) = 0 \quad \text{a.s.}$$

これは当然GFTになっており、更に unif. integrable であれば mart. in L^1 でもある。MILについては mart. と同様な収束定理が得られている：

<u>Th.</u> $\{X_n\}$: MIL なら

(i) L^1-bded $\Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X \in L_1$ (Mucci [23])

(ii) $\int_{(\tau<\infty)} |X_\tau| < \infty$ for all stop times $\tau \Rightarrow X_n$: conv. a.s.

(Yamasaki [21])

しかし、martingale の他の有用な性質（maximal inequality, Riesz-decomposition, optional stopping theorem, optional sampling theorem）は持たないし、$\{|X_n|, \mathcal{F}_n\}$ が MIL であることも（L^1-bded のもとでも）保証されない。

§5. Asymptotic martingales (amarts)

amart の概念は Meyer [13] にはじまるが、組織的な研究は、Edger & Sucheston [8] 以降になる。

Def. $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ が asymptotic martingale (amart) とは

$$(E X_\tau)_{\tau \in T} : \text{conv.} \quad (T \equiv \{\text{bded. stop. times}\})$$

mart. はもちろん amart であるが、non-stochastic conv. seq., $(E X_n)_n$ が bded な sub-(super-) mart. 等も amart である。更に、MIL も amart となる（Edgar & sucheston [10], Blake [4]）ので当然,

Th. (Austin, Edgar & Ionescu Tulcea [15])

L^1-bded amart は conv. a.s.

である。この証明は、次の Lem を用いたエレガントなもの

である。

<u>Lem.</u> Y: $\mathcal{F}_\infty$ー可測．$\{X_n\}$の cluster value

$\Rightarrow \ {}^\exists(\tau_n)\subset T,\ \tau_n \geqq n\ ;\ Y_{\tau_n} \longrightarrow Y$ a.s.

又、次の収束定理も興味深い。

<u>Th.</u> (Dvoretzky [7])

$\lim X_n$ exists ($\pm\infty$も) $\Leftrightarrow {}^\forall\lambda,\ \{-\lambda \vee X_n \wedge \lambda\}$: amart.

MIL と異なり、amart では、Riesz-分解, optional stopping theorem, optional sampling theorem が成立している。しかも、optional sampling theorem と Riesz-分解の可能なクラスを amart より大きくできないことも知られている (Edgar & sucheston [10])。

amart は定義に条件付期待値が必要でなく，martingale の諸性質のうち、stopping time に依存する証明はよりスマートに導くことができる。勿論直交性がないので、L^p-不等式等は望む可くもない。ある process が amart であることを確かめるのはそれ程容易ではなく、得られている必要十分条件は：

<u>Th.</u> (i) $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$: amart

$\Leftrightarrow$ (ii) (Edgar & sucheston [9])

$E[X_{\tau_n} | \mathcal{F}_n] - X_n \xrightarrow{L_1} 0 \quad ({}^\forall(\tau_n)\subset T,\ \tau_n \geq n)$

$\Leftrightarrow$ (iii) (Ghoussoub & Sucheston [11])

$X_n = M_n + Z_n$; (M_n): mart., $\{|Z_n|\}$: dominated by Doob's potential.

amartの組織的な研究は初期のものは Edgar & Sucheston [8], 最近のものは Schmidt [18], Gut [19] に詳しい。最近は Banach sp. 上の amart についての研究が盛んである。

参考文献

[1] D. G. Austin, G. A. Edgar & A. Ionescu Tulcea, Pointwise convergence in terms of expectations, Z.W., 30(1974),17-26.

[2] J. Bermann, An example of a weak martingale, Ann. Prob., 4(1976),107-108.

[3] L.H. Blake, A generalization of martingales and two consequent convergence theorems, Pacific J. Math., 35(1970),279-283.

[4] ———, Every amart is a martingale in the limit, J. London Math. Soc., 18(1978),381-384.

[5] L. H. Y. Chen, A martingale inequality of the square and maximal functions, Ann. Probab., 7(1979),1051-1055.

[6] L. E. Dor, Some inequalities for martingales and applications to the study of L , Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 89(1981), 135-148.

[7] A. Dvoretzky, On stopping time directed convergence, Bull. A.M.S., 82(1976),347-349.

[8] G. A. Edgar & L. Sucheston, Amarts: a class of asymptotic martingales A. discrete parameter, B. continuous parameter J. Multvariate Anal., 6(1976),193-221,572-591.

[9] ———, The Riesz decomposition for vector-valued amarts Z. W., 36(1976),85-92.

[10] ———, Martingales in the limit and amarts, Proc. A.M.S., 67(1977),315-320.

[11] N. Ghoussoub & L. Sucheston, A refinement of the Riesz decomposition for amarts and semiamarts, J. Multiv. Anal., 8(1978),146-150

[12] A. Gut, An introduction to the study of asymptotic martingales, Lec. Note in Math. 1042, Springer 1983.

[13] P. A. Meyer, Le retournement du temps, d'après Chung et Walsh, L. N. in Math. 191, Springer 1971.

[14] A.G. Mucci, Limits for martingale-like sequences, Pacific J. Math., 48(1973),197-202.

[15] ———, Another martingale convergence theorem, Pacific J. Math., 64(1976),539-541.

[16] P. I. Nelson, A class of orthogonal series related to martingales, Ann. Math. Statist., 41(1970),1684-1694.

[17] M. Peligrad, A limit theorem for martingale-like sequences, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 11(1976),733-736.

[18] K.D. Schmidt, Amarts - a measure theoretic approach, L.N. in Math. 1042, Springer 1983.

[19] N. Starr, On an operator limit theorem of Rota, Ann. Math. Statist., 36(1965),1864-1866.

[20] R. Subramanian, On a gerneralization of martingales due to Blake, Pacific J. Math., 48(1973),275-278.

[21] M. Yamasaki, Another convergence theorem of martingales in the limit, Tohoku Math. J., 33(1981),555-559.