数理解析研究所講究録
566巻 1985年 189-197

nonsimple balanced arrays

東京理大理　栗木進二（Shinji Kuriki）

1. 序

ある $n\times m$ の(0,1)行列Tの任意の t 個の列からなる部分行列 T_0 において，weight が j である t 次元の(0,1)ベクトルがいずれも T_0 の行として，ちょうど μ_j 回 $(j=0,1,\dots,t)$ 現われる時，Tを，強さ t，size n，制約数 m，index set $\{\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_t\}$ の 2-symbol balanced array といい，$BA(n,m,2,t)\{\mu_j\}$ とかく。明らかに，$n=\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}\mu_j$ である。

もし $BA(n,m,2,t)\{\mu_j\}$ が強さ m の balanced array でもあるならば，それは simple $BA(n,m,2,t)\{\mu_j\}$（略して simple array）という。

また，Tのある分割 (T_1,T_2)（ここで T_j は $n\times m_j$ 行列，$m=m_1+m_2$）に対して，T_1 では weight が p_1 であり T_2 では weight が p_2 である m 次元の(0,1)ベクトルがいずれもTの行として，ちょうど $\mu(p_1;p_2)$ 回 $(p_j=0,1,\dots,m_j)$ 現われる時，Tを強さ $(m_1,$

m_2) の simple partially balanced array という。

もし $BA(n, m, 2, t)\{\mu_j\}$ が、ある (m_1, m_2) に対して、強さ (m_1, m_2) の simple partially balanced array であるならば、semisimple $BA(n, m, 2, t)\{\mu_j\}$（略して semisimple array）という。

simple array は、すべての (m_1, m_2) に対して、semisimple array である。

$BA(n, t, 2, t)\{\mu_j\}$ は明らかに simple array である。$BA(n, t+1, 2, t)\{\mu_j\}$ も simple array であることがよく知られている。また、nonsimple $BA(n, t+2, 2, t)\{\mu_j\}$ が存在することも知られている（例えば白倉[4]）。$t=2, 3, 4$ の時、山本・栗木・名取[6]は、nonsimple $BA(n, t+2, 2, t)$ しか存在しないようないくつかの index sets $\{\mu_j\}$ を与え、栗木・山本[3]は、そのすべての index sets $\{\mu_j\}$ を与えた。

本稿において、それらの nonsimple $BA(n, t+2, 2, t)$ しか存在しないような index sets $\{\mu_j\}$ に対して、semisimple array が存在することが示される。したがって、$t=2, 3, 4$ の時、$BA(n, t+2, 2, t)\{\mu_j\}$ が存在するならば、同じ index set $\{\mu_j\}$ を持つ semisimple $BA(n, t+2, 2, t)$ が存在することが示される。

2. 必要十分条件

$BA(n, t+2, 2, t)\{\mu_j\}$ の存在のための必要十分条件が，最初 Srivastava [5] によって得られた。最近，強さ t，制約数 $t+2$ の s-symbol balanced array の存在のための必要十分条件が，栗木 [1,2] によって得られ，ここでは，後者に従って，2-symbol balanced array の存在条件が議論される。

ある $n\times(t+2)$ の (0,1) 行列を T とし，その列番号の集合 $\{1, 2, \ldots, t+2\}$ を Ω とする。Ω のある部分集合 I に対して，$V(I)$ を I の列においては 0 が現われ，その他の列においては 1 が現われる T の行の個数とする。$V(\{i\})$ は $V(i)$ と略される。

もし，T が $BA(n, t+2, 2, t)\{\mu_j\}$ であるならば，$|I|=t-j$ を満足する Ω の互いに素な部分集合 I と $\{i_1, i_2\}$ のあらゆる族に対して，ある方程式系

$$V(I)+V(I\cup\{i_1\})+V(I\cup\{i_2\})+V(I\cup\{i_1, i_2\})=\mu_j \tag{2.1}$$

が満たされる。逆に，もし，ある与えられた非負の整数の集合 $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_t\}$ に対して，(2.1) を満足する 2^{t+2} 個の非負の整数 $V(I)$ が存在するならば，$BA(n, t+2, 2, t)\{\mu_j\}$ が存在する。

次の lemma と定理は，それぞれ栗木 [1,2] と山本・栗木・名取 [6] によって得られている。

<u>lemma 2.1.</u>

index set $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_t\}$ と $t+3$ 個の非負の整数 $V(J)$ $(|J|\leq 1)$

が与えられた時，方程式系(2.1)の残りの $2^{t+2}-(t+3)$ 個の解 $V(I)$ $(|I|\geq 2)$ は次式で与えられる。

(2.2) $$V(I)=\sum_{l'=0}^{l}(-1)^{l-l'}(l-l'+1)\mu_{t-l'}+(-1)^{l+1}\sum_{l'=0}^{l+1}V(i_{l-l'+2})+(-1)^{l+1}(l+1)V(\phi).$$

ここで，$I=\{i_1,i_2,\dots,i_{l+2}\}$，$l=0,1,\dots,t$.

<u>定理 2.2.</u>

$BA(n,t+2,2,t)\{\mu_j\}$ であるTの存在のための必要十分条件は，次の条件を満足する $t+3$ 個の非負の整数 $V(\phi),V(1),V(2),\dots,V(t+2)$ が存在することである。

(条件)

(2.3) $$V(1)\leq V(2)\leq\dots\leq V(t+2)$$

・l が偶数の時

(2.4) $$(l+1)V(\phi)+\sum_{l'=0}^{l+1}V(t-l'+2)\leq\theta_l$$

・l が奇数の時

(2.5) $$(l+1)V(\phi)+\sum_{l'=0}^{l+1}V(l'+1)\geq\theta_l$$

$l=0,1,\dots,t.$

ここで，

(2.6) $$\theta_l=\sum_{l'=0}^{l}(-1)^{l'}(l-l'+1)\mu_{t-l'}.$$

<u>定理 2.3.</u>

simple $BA(n,t+2,2,t)\{\mu_j\}$ であるTの存在のための必要十分条件は，定理2.2の条件を満足する $t+3$ 個の非負の整数

$V(\phi), V(1), V(2), \ldots, V(t+2)$ が

(2.7) $\qquad V(1)=V(2)=\cdots=V(t+2)$

となることである。

Ω のある分割を (Ω_1, Ω_2) とする。$BA(n, t+2, 2, t)\{\mu_j\}$ である T が *semisimple array* になるための必要十分条件は，(2.1) を満足するあらゆる非負の整数 $V(I)$ が，$I=I_1 \cup I_2$（ここで $I_j \subset \Omega_j$）である I_1 と I_2 に対して，I_1 と I_2 の大きさにしか依存しないことである。*lemma* 2.1 から，もし $V(J)$ $(|J| \leq 1)$ が，$J=J_1 \cup J_2$（ここで $J_j \subset \Omega_j$）である J_1 と J_2 に対して，J_1 と J_2 の大きさにしか依存しなければ，$V(I)$ $(|I| \geq 2)$ もまたそうであることがわかる。したがって，定理 2.2 から，次の定理が得られる。

<u>定理 2.4.</u>

semisimple $BA(n, t+2, 2, t)\{\mu_j\}$ である T の存在のための必要十分条件は，ある α に対して，定理 2.2 の条件を満足する $t+3$ 個の非負の整数 $V(\phi), V(1), V(2), \ldots, V(t+2)$ が

(2.8) $\qquad V(1)=V(2)=\cdots=V(\alpha),\ V(\alpha+1)=V(\alpha+2)=\cdots=V(t+2)$

となることである。

定理 2.3 と 2.4 からも，*simple array* は *semisimple array* であることが容易にわかる。

3. semisimple array

$t=2,3,4$ の時，定理2.2 と 2.3 を用いて，栗木・山本 [3] は，次の定理を示した。

<u>定理 3.1.</u>

(3.1) $\theta_0 \geqq 2,\quad \theta_1=1,\quad \theta_2=2$

である index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\}$ を持つ $BA(n,4,2,2)$ は存在し，nonsimple balanced array である。

<u>定理 3.2.</u>

(3.1) を満たさないような index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\}$ を持つ $BA(n,4,2,2)$ が存在するならば，同じ index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2\}$ を持つ simple $BA(n,4,2,2)$ が存在する。

<u>定理 3.3.</u>

(3.2) (1) $\theta_0 \geqq 1,\quad \theta_1 \leqq 0,\quad \theta_2=1,2,\quad \theta_3=1$

(2) $\theta_0 \geqq 2,\quad \theta_1 \leqq 0,\quad \theta_2=2,\quad \theta_3=2$

(3) $\theta_0 \geqq 3,\quad \theta_1 \leqq 3,\quad \theta_2=5,\quad \theta_3=6$

である index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ を持つ $BA(n,5,2,3)$ は存在し，nonsimple balanced array である。

<u>定理 3.4.</u>

(3.2) を満たさないような index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ を持つ $BA(n,5,2,3)$ が存在するならば，同じ index set $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ を持つ simple $BA(n,5,2,3)$ が存在する。

定理3.5.

(3.3)

(1) $\theta_0 \geqq 2u+2,\ \theta_1=3u,\ \theta_2 \geqq 4u+2,\ \theta_3=5u+1,\ \theta_4=6u+2\ (u \geqq 1)$

(2) $\theta_0=u+2,\ \theta_1 \leqq 2u+1,\ \theta_2 \geqq 3u+4,\ \theta_3=4u+3,\ \theta_4=5u+4\ (u \geqq 1)$

(3) $\theta_0 \geqq 2,\ \theta_1 \leqq 0,\ \theta_2 \geqq 2,\ \theta_3=1,\ \theta_4=2,3,4$

(4) $\theta_0 \geqq 2,\ \theta_1 \leqq 0,\ \theta_2 \geqq 3,\ \theta_3=2,\ \theta_4=3,4$

(5) $\theta_0 \geqq 2,\ \theta_1=1,\ \theta_2 \geqq 4,\ \theta_3 \leqq 2,\ \theta_4=4$

(6) $\theta_0 \geqq 2,\ \theta_1 \leqq 1,\ \theta_2 \geqq 4,\ \theta_3=3,\ \theta_4=4$

(7) $\theta_0 \geqq 2,\ \theta_1 \leqq 0,\ \theta_2=2,\ \theta_3=1,\ \theta_4 \geqq 5$

(8) $\theta_0 \geqq 3,\ \theta_1 \leqq 2,\ \theta_2 \geqq 6,\ \theta_3=6,\ \theta_4=8,9$

(9) $\theta_0 \geqq 4,\ \theta_1=3,\ \theta_2 \geqq 6,\ \theta_3=6,\ \theta_4=9$

(10) $\theta_0=3,\ \theta_1=3,\ \theta_2 \geqq 7,\ \theta_3=6,\ \theta_4=9$

(11) $\theta_0 \geqq 4,\ \theta_1 \leqq 3,\ \theta_2 \geqq 7,\ \theta_3=7,\ \theta_4=9$

(12) $\theta_0 \geqq 5,\ \theta_1 \leqq 5,\ \theta_2 \geqq 10,\ \theta_3=11,\ \theta_4=14$

である index set $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_4\}$ を持つ $BA(n, 6, 2, 4)$ は存在し，nonsimple balanced array である。

定理3.6.

(3.3)を満たさないような index set $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_4\}$ を持つ $BA(n, 6, 2, 4)$ が存在するならば，同じ index set $\{\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_4\}$ を持つ simple $BA(n, 6, 2, 4)$ が存在する。

定理3.1, 3.3 と 3.5 の証明において，nonsimple balanced array の存在を保証するために，彼らは，定理2.2 の条件を

満足する次の非負の整数解を与えた。

		$V(\phi)$	$V(1)$	$V(2)$	$V(3)$	$V(4)$	$V(5)$	$V(6)$
(3.1)		0	0	0	1	1		
(3.2)	(1)	0	0	0	0	0	1	
	(2)	0	0	0	0	1	1	
	(3)	0	1	1	1	1	2	
(3.3)	(1)	0	u	u	u	u	$u+1$	$u+1$
	(2)	u	0	0	1	1	1	1
	(3).(7)	0	0	0	0	0	1	1
	(4)	0	0	0	0	1	1	1
	(5).(6)	0	0	0	1	1	1	1
	(8)	1	0	0	0	1	1	1
	(9)	0	1	1	1	1	2	2
	(10).(11)	1	0	0	1	1	1	1
	(12)	2	0	0	1	1	1	1

これらの解は定理2.4の条件をも満足しているので、我々は次の定理を得る。

<u>定理 3.7.</u>

$t=2,3,4$ の時、$BA(n,t+2,2,t)\{\mu_j\}$ が存在するならば、同じ index set $\{\mu_j\}$ を持つ semisimple $BA(n,t+2,2,t)$ が存在する。

REFERENCES

[1] Kuriki, S. (1984). Existence conditions for balanced arrays of strength t, t+2 constraints and s symbols. *TRU Math.* 20-1, 139-161.

[2] Kuriki, S. (1984). General existence condition for balanced arrays of strength t, m constraints and s symbols. *TRU Math.* 20-2, 191-211.

[3] Kuriki, S. and Yamamoto, S. (1984). Nonsimple 2-symbol balanced arrays of strength t and t+2 constraints. *TRU Math.* 20-2, 249-263.

[4] Shirakura, T. (1976). Optimal balanced fractional 2^m factorial designs of resolution VII, $6 \leq m \leq 8$. *Ann. Statist.* 4, 515-531.

[5] Srivastava, J.N. (1972). Some general existence conditions for balanced arrays of strength t and 2 symbols. *J. Combinatorial Theory* (*A*) 13, 198-206.

[6] Yamamoto, S., Kuriki, S. and Natori, S. (1984). Some nonsimple 2-symbol balanced arrays of strength t and t+2 constraints. *TRU Math.* 20-2, 225-228.