数理解析研究所講究録
566巻 1985年 64-73

Distance degrees of vertex-transitive graphs

上智大·理工　平野照比古（Teluhiko Hilano）*

1. Introduction

ここで扱うグラフはすべて単純グラフとする。グラフGの頂点集合を$V(G)$で表わす。各頂点uに対し次の集合を定義する。

$$\Gamma_i(u) = \{ v \in V(G) \ ; \ d(u,v) = i \}$$

$$\tilde{\Gamma}_i(u) = \{ v \in V(G) \ ; \ d(u,v) \leqq i \} .$$

グラフGが distance degree regular であるとは

$$|\Gamma_i(u)| = |\Gamma_i(v)| \qquad (1.1)$$

の関係がすべての$u, v \in V(G)$と自然数iについて成立するときをいう。このとき

$$k_i = |\Gamma_i(u)|$$

とおいて、i番目の distance degree という。

———————— <。> ————————

*）1985年4月1日より幾徳工業大学へ転職.

たとえば vertex-transitive なグラフは distance degree regular である。自明でない、distance degree regular なグラフの distance degree の間の関係としては次の定理が知られている。

Theorem 1.（Hilano-Nomura [3]）

Gを連結で．distance degree regular なグラフとする。

このとき

$$3k_r \geqq 2(1+k_1) \qquad (1.2)$$

が $r=1,2,\cdots\cdots,d(G)-1$ に対して成立する．

この定理によれば k_r（$r=2,\cdots,d(G)-1$）の下限の値は $k_1 \bmod 3$ の値により少し異ることがわかる。具体的に書くと

(i) $k_1=3n \Rightarrow k_r \geqq 2n+1$

(ii) $k_1=3n+1 \Rightarrow k_r \geqq 2n+2$

(iii) $k_1=3n+2 \Rightarrow k_r \geqq 2n+2$

となる。このうち．(iii)の場合においては k_r の下限を与えるグラフは存在し、かつ特徴づけも済んでいる。（[3. Theorem 2]）残りの場合において k_r の下限の値をとるグラフは一般に存在するかどうかは知られていない。もし vertex-transitive なグラフに限れば (i) の場合には次のことが示される。

Theorem 2.

Gを連結で vertex-transitive なグラフとする。$k_1=3n$、$k_r=2n+1$ $(2\leqq {}^{\exists}r<d(G))$ を満たすグラフは $n=1$ i.e. $k_1=k_r=3$ に限る。このとき $k_{r+1}=1$ であり、したがって $d(G)=r+1$ である。

Remark. (1.1) の関係が、すべての $u, v\in V(G)$ と $i=1, 2$ の場合に成立するグラフを考える。このとき $k_1=3n$, $k_2=2n+1$ を満たすいくらでも大きい直径をもつグラフは存在する。(Hilano[2])

2. 同値関係

各 $x, y\in V(G)$ に対し

$$x\sim y \iff \widehat{\Gamma_1}(x)=\widehat{\Gamma_1}(y)$$

と定義する。これは同値関係であり、任意の $u\in V(G)$ に対し、$\Gamma_i(u)$, $i\geqq 2$ はこの同値関係による同値類の合併として表わされる。vertex-transitiveなグラフにおいては各同値類の元の数は一定の値 m となる。上に述べたことにより、m は $1+k_1, k_2, \cdots, k_{d(G)}$ の公約数である。一方、定理の条件より

$$\begin{aligned}(1+k_1, k_r) &= (3n+1, 2n+1)\\ &= (n, 2n+1)=1\end{aligned}$$

であるから、$m=1$ となる。即ち、次のことが成立する。

Fact 1．定理2の条件のもとでは、相異なる2つの頂点 $x, y \in V(G)$ に対し、

$$\widetilde{\Gamma}_1(x) \neq \widetilde{\Gamma}_1(y)$$

が成立する。

3．定理の証明

$\Gamma_r(u)$ と $\Gamma_{r+1}(u)$ の間の edge の数を数えることにより

$$\sum_{x \in \Gamma_r(u)} |\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x)| = \sum_{y \in \Gamma_{r+1}(u)} |\Gamma_r(u) \cap \Gamma_1(y)| \qquad (3.1)$$

が成立する。

Fact 2．$|\Gamma_r(u) \cap \Gamma_1(y)| \geq n$

が $y \in \Gamma_{r+1}(u)$ に対し成立する。

（proof）$(u, v, w, \cdots, y)$ を長さ $r+1$ の path とする。

このとき

$$\widetilde{\Gamma}_r(w) \supset \widetilde{\Gamma}_{r-1}(v) \cup \widetilde{\Gamma}_1(y) \qquad (3.2)$$

である。これより

$$k_r \geq 1 + k_1 - |\Gamma_{r-1}(v) \cap \Gamma_1(y)| \qquad (3.3)$$

が成り立つ。一方

$$\Gamma_{r-1}(v) \cap \Gamma_1(y) \subset \Gamma_r(u) \cap \Gamma_1(y) \qquad (3.4)$$

であるので主張を得る。 □

Fact 3. $|\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x)| \leqq n$
が $x \in \Gamma_r(u)$ に対して成立する。

(proof) $(u, v, w, \cdots, x)$ を長さ r の path とする。任意の $y \in \Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x)$ に対し、$(u, v, w, \cdots, x, y)$ は長さ $r+1$ の path である。一般に、

$$\widetilde{\Gamma}_r(v) \supseteq \widetilde{\Gamma}_{r-1}(u) \cup (\Gamma_r(u) \cap \Gamma_{r-1}(v)) \cup (\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_r(v))$$

であり、さらに (3.5)

$$\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_r(v) \supset \Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x) \qquad (3.6)$$

$$\Gamma_r(u) \cap \Gamma_{r-1}(v) \supset \Gamma_{r-1}(v) \cap \Gamma_1(y) \qquad (3.7)$$

が成立する。したがって (3.3) により

$$|\Gamma_r(u) \cap \Gamma_{r-1}(v)| \geqq n$$

である。ここで

$$|\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x)| \geqq n+1$$

と仮定すると、(3.5) により

$$|\Gamma_r(u) \cap \Gamma_{r-1}(v)| = n$$

$$|\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x)| = n+1$$

でなくてはならない。よって、(3.2), (3.3), (3.7) より

$$\Gamma_r(u) \cap \Gamma_{r-1}(v) = \Gamma_{r-1}(v) \cap \Gamma_1(y) \qquad (3.8)$$

$$\tilde{\Gamma}_r(w) = \tilde{\Gamma}_{r-1}(v) \cup \tilde{\Gamma}_1(y) \qquad (3.9)$$

が任意の $y \in \Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x)$ について成立する。即ち $\tilde{\Gamma}_1(y)$ は y によらず一定である。$|\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x)| = n+1 \geqq 2$ より Fact 1. と矛盾する。 □

Fact 2, 3 と (3.1) により

$$k_r \geqq k_{r+1}$$

を得る。ここで場合を分ける。

Case 1) $k_r > k_{r+1}$ のとき

$3k_{r+1} < 2(1+k_1)$ であるので $d(G) = r+1$ である。Fact 3 と (3.1) により

$$\begin{aligned} n k_r &\geqq \sum_{y \in \Gamma_{r+1}(u)} |\Gamma_r(u) \cap \Gamma_1(y)| \\ &= \sum_{y \in \Gamma_{r+1}(u)} (k_1 - |\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(y)|) \\ &\geqq k_{r+1}(k_1 - (k_{r+1} - 1)) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} &k_{r+1}^2 - (3n+1)k_{r+1} + n(2n+1) \\ &\quad = (k_{r+1} - n)(k_{r+1} - (2n+1)) \geqq 0 \end{aligned}$$

である。条件より

$$k_{r+1} \leqq n$$

を得る。一方 $y \in \Gamma_{r+1}(u)$ に対し

$$\tilde{\Gamma}_1(y) \subseteq \Gamma_{r+1}(u) \cup \Gamma_r(u) \tag{3.10}$$

より

$$k_{r+1} \geqq 1 + k_1 - k_r = n$$

を得るので $k_{r+1} = n$ が成立する。これは (3.10) で等式が成立することを意味する。Fact 1. より $n=1$ となる。

Case 2) $k_r = k_{r+1}$ のとき

(3.1). Fact 2 により

$$\sum_{x \in \Gamma_r(u)} |\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x)| \geqq n k_{r+1} = n k_r$$

であり. Fact 3. によりすべての $x \in \Gamma_r(u)$ に対し

$$|\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x)| = n \tag{3.11}$$

が成立する。同様に

$$n k_{r+1} \geqq \sum_{y \in \Gamma_{r+1}(u)} |\Gamma_r(u) \cap \Gamma_1(y)|$$

であるから

$$|\Gamma_r(u) \cap \Gamma_1(y)| = n \tag{3.12}$$

がすべての $y \in \Gamma_{r+1}(u)$ に対して成立する。

$(u, v, w, \cdots, x)$ を長さ r の path とし. $y \in \Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x)$ を任意にとる。(3.3), (3.4), (3.12) により

$$|\Gamma_{r-1}(v) \cap \Gamma_1(y)| = n$$

となり. (3.2) において等式が成立する。

$$\tilde{\Gamma}_r(w) = \tilde{\Gamma}_{r-1}(v) \cup \tilde{\Gamma}_1(y) \tag{3.13}$$

一方、(3.5)–(3.7), (3.11), (3.12) より

$$n+1 \geqq |\Gamma_r(u) \cap \Gamma_{r-1}(v)| \geqq n$$

である。$n \geqq 2$ とする。もし、

$$|\Gamma_r(u) \cap \Gamma_{r-1}(v)| = n$$

であれば

$$\Gamma_r(u) \cap \Gamma_{r-1}(v) = \Gamma_{r-1}(v) \cap \Gamma_1(y)$$

が任意の $y \in \Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x)$ に対して成立し、(3.13) とあわせて、$\Gamma_1(y)$ は y によらず一定となる。これは Fact 1. に矛盾する。したがって $|\Gamma_r(u) \cap \Gamma_{r-1}(v)| = n+1$ である。このときには $x^* \in \Gamma_r(u) \cap \Gamma_{r-1}(v)$ で $y \notin \Gamma_1(x^*)$ なるものが存在する。(3.11) より

$$|\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_1(x^*)| = n$$

であるから、x^* のとり方より

$$|\Gamma_{r+1}(u) \cap (\Gamma_1(x) \cup \Gamma_1(x^*))| \geqq n+1$$

である。したがって

$$|\Gamma_{r+1}(u) \cap \Gamma_r(v)| \geqq n+1$$

である。(3.5) の両辺の元の数を数えると矛盾する。ゆえに $n=1$ となる。

仮に、$d(G) \geqq r+2$ とすれば、$k_{r+2} = 3$ or 1 であり、$y \in \Gamma_{r+1}(u)$ に対し、

$$|\Gamma_r(u) \cap \Gamma_1(y)| = |\Gamma_{r+2}(u) \cap \Gamma_1(y)| = 1$$

が成立する。したがって $<\Gamma_{r+1}(u)>$ は3点の1-regularグラフとなり、矛盾である。したがって $d(G)=r+1$ である。このときは (3,12) より

$$<\Gamma_{r+1}(u)> = K_3$$

である。$|\Gamma_{r+1}(u)\cap\Gamma_r(v)| \geqq 2$ とすると (3.11), (3.12) より

$$|\Gamma_r(u)\cap\Gamma_{r-1}(v)| \geqq 2$$

となり、(3.5) に矛盾する。したがって、各 $y\in\Gamma_{r+1}(u)$ に対し、$v\in\Gamma_1(u)$ で $d(v,y)=r$ なる元は unique に定まる。また $\Gamma_{r+1}(y)\subset\hat{\Gamma}_1(u)$ に注意すれば

$$<\hat{\Gamma}_1(u)> = K_4$$

となって $\Gamma_2(u)=\phi$ となる。

References

[1] Biggs, N. Algebraic graph theory, Cambridge Tracts No 67. 1974

[2] Hilano, T. Regular graphs with regular squares, (unpublished)

[3] Hilano, T., Nomura, K. Distance degree regular graphs, JCT(B) 37 (1984) 96-100

[4] 平野照比古, 斉藤友克 Some problems of distance degrees of symmetric graphs, 「群と組み合わせ論」研究集会, 1984年10月 (於上越教育大)

追加

榎本彦衛氏（東大理）により次のことが示された。

$C_m[K_{n+1}]$（$m \geq 8$ なる偶数）より 1-factor をぬいたグラフを考えれば、これは

$$k_1 = 3n+1,\ k_2 = 2n+3,\ k_3 = \cdots = k_{m/2-1} = 2n+2,\ k_{m/2} = n+1$$

なる distance degree regular グラフであり、適当な 1-factor を選べば vertex-transitive なグラフにもできる。

さらに、適当な 2-factor をぬけば $n \geq 2$ のとき

$$k_1 = 3n,\ k_2 = 2n+4,\ k_3 = \cdots = k_{m/2-1} = 2n+2,\ k_{m/2} = n+1$$

なる distance degree regular グラフが得られる。

たとえば $n \geq 2$ に対し

$$C_m[\overline{C_{n+1}}]$$

は条件を満す vertex transitive なグラフである。