

Linear arboricity of 2-regular directed graphs

筑波大 社工 中山 明 (Akira Nakayama)

東大理 榎本彦衛 (Hikoe Enomoto)

Abstract

線形樹化数と呼ばれる無向グラフでの概念を有向グラフに
対して適用し、考察する。さらに、Péroche が与えた誤った
証明を訂正し、『 D が位数 3 以上の連結 2-正則有向グラフ
で、 K_3 と同形なグラフでないならば、 D の有向線形樹化数は
3 である。』という定理を証明する。

Definitions and Notations

無向グラフ G に対して、 $V(G)$, $E(G)$ をそれぞれ G の点集合
辺集合とする。点 $x \in V(G)$ に対して、 x と隣接している辺
の数を x の次数といい、 $\deg(x)$ と書く。 G が k -正則グラフと
は、各点 $x \in V(G)$ について $\deg(x) = k$ となるグラフのことであ
る。 K_n で位数 n の完全グラフを表わすものとする。 G の各成
分が (開いた) 道となっているとき、 G を線形林と呼ぶ。無
向グラフ G に対して、 $E(G)$ を覆うのに必要な線形林の最小個

数を G の線形樹化数といい, $la(G)$ で表わす.

同様に有向グラフ D に対して, $V(D)$, $A(D)$ をそれぞれ D の点集合, 弧集合とする. 点 $x \in V(D)$ に対して, x から出ている弧の数を x の出次数, x に入ってくる弧の数を入次数といい, それぞれ $\deg^+(x)$, $\deg^-(x)$ で表わす. D が k -正則有向グラフであるとは, 各点 $x \in V(D)$ について $\deg^+(x) = \deg^-(x) = k$ となる有向グラフのことである. K_n^* は位数 n の $(n-1)$ -正則有向グラフとする. D が有向線形林であるとは, D の各成分が (開いた) 有向道となる有向グラフのことである. 有向グラフ D に対して, $A(D)$ を覆うのに必要な有向線形林の最小個数を D の有向線形樹化数と呼び, $la(D)$ と書く.

実数 α に対して, $\lceil \alpha \rceil$ は α の切り上げとする.

Introduction

線形樹化数の概念は, Harary [2] によって導入され, 今までに種々の結果が得られている ([1] の文献を参照のこと.) この問題に対しては, つぎの予想 1 が有名である.

予想 1 G が k -正則グラフならば,

$$la(G) = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$$

この予想について, $k \leq 6$, $k=8$, $k=10$ (?) の場合のみ確かめられている. 一方, 有向線形樹化数に関して Péroche はつぎの予想 2 を与えた.

予想2 D が k -正則有向グラフならば,

$$l_a(D) = k + 1$$

さらに Péroche は、 $k=2$ の場合の証明を試みたが、誤っていた。つまり、帰納法を用いて示そうとしたが、例外となる K_3^* の存在と連結性を全く考慮していなかった。しかしながら後で示すように、適当な条件を追加することにより、 $l_a(D) = 3$ が証明される。 K_n^* は $(n-1)$ -正則有向グラフであるが、この有向グラフに関して、つぎの事実1が成立し、予想3が考えられる。

事実1 n が偶数ならば,

$$l_a(K_n^*) = n.$$

予想3 n が奇数ならば

$$l_a(K_n^*) = n + 1.$$

この事実を示すには、 $l_a(K_n) = \lceil n/2 \rceil$ ([3]) と不等式 $l_a(K_n^*) \leq 2 l_a(K_n)$ を用いればよい。一方、この予想については、 $n=3, 5$ の時だけ確かめられている。ここで注意すべき点は、 K_3^*, K_5^* に対して予想2は成立しないことである。したがって、 k が偶数の場合の予想2は、つぎの修正予想2にすることが考えられる。

修正予想2 偶数 k に対して、 D が k -正則有向グラフ

で、各連結成分が K_{k+1}^* と同形でなければ、 $l_a(D) = k + 1$

以下に示す仮定に対して、適当な条件を追加することによって $k=2$ に関して修正予想 2 が成立することがわかる。つまり、有向グラフ D に対して、つぎの 2 つの仮定を用意する。

A1 D はループをもたない。

A2 D は多重弧をもたない。

このとき、つぎの 2 つの定理を得る。

定理 A D は A1, A2 を満たすと仮定する。

D が連結な 2-正則有向グラフで、 $|V(D)| \geq 4$ ならば、

$$l_2(D) = 3$$

定理 B D は A1 を満たすと仮定する。

D が連結な 2-正則有向グラフで、 $D \not\cong K_3^*$ かつ $|V(D)| \geq 3$

ならば、 $l_2(D) = 3$

これから、定理 B だけの証明を示す。

Proof of theorem B

定理 A, B の証明は、共に帰納法を用いて行なうが、その際つぎの事実 2 に注意する。

事実 2 D は A1, A2 を満たす 2-正則有向グラフならば、(1) $|V(D)| \geq 3$.

(2) $|V(D)| = 3$ ならば、 $D \cong K_3^*$, $l_2(K_3^*) = 4$

この事実は容易に示すことができる。つぎの補題 1 は、まず $l_2(D)$ の下限を求めたものである。

補題1 D が k -正則有向グラフならば,

$$\ell_{\vec{\alpha}}(D) \geq k + 1$$

(証明) 有向グラフ D に対して、つぎの式が成立する。

$$\sum_{x \in V(D)} \deg^+(x) = \sum_{x \in V(D)} \deg^-(x) = |A(D)| \quad (1.1)$$

そこで、 D を k -正則有向グラフとし、 $\ell_{\vec{\alpha}}(D) = k$ と仮定する。
ここで各 $i = 1, \dots, k$ に対して、 F_i を D の有向線形林とすると、以下に示す不等式が成立する。

$$|A(F_i)| \leq |V(D)| - 1 \quad (i = 1, \dots, k) \quad (1.2)$$

(1.2) 式より、

$$\sum_{i=1}^k |A(F_i)| \leq k |V(D)| - k \quad (1.3)$$

となる。ところで、 D は k -正則有向グラフなので、

$$\sum_{x \in V(D)} \deg^-(x) = k |V(D)| \quad (1.4)$$

である。ここで、 $|A(D)|$ を評価すると、(1.3) より

$$|A(D)| \leq \sum_{i=1}^k |A(F_i)| \leq k |V(D)| - k \quad (1.5)$$

となるが、(1.1) と (1.4) より矛盾が導かれる。 $\ell_{\vec{\alpha}}(D) \geq k$ は明らかに成立するので、この補題が成立する。 \square

つぎの補題2は、定理Bの仮定を満たす有向グラフ D が、3つの有向線形林で覆えることを示している。

補題2 D は、 A_1 を満たす連結2-正則有向グラフで、 $D \neq K_3^*$ かつ $|V(D)| \geq 3$ ならば、 $\ell_{\vec{\alpha}}(D) \leq 3$ 。

(証明) D の位数に関する帰納法を用いる。 $x \in V(D)$ に対

して、 $N(x)$ をつぎのように定義する。

$$N(x) = \{y \in V(D) \mid (x, y) \in A(D) \text{ または } (y, x) \in A(D)\}$$

$|N(x)| = 1$ ならば、 $|V(D)| = 2$ となるので仮定に反する。よって、 $|N(x)| \geq 2$ としてよい。さらに、 $\delta^+(D) \leq 3$ を満足する D に対しては、いつも3つの互いに素な有向線形林 F_1, F_2, F_3 で覆われているものとする。このとき、各 F_i を色 i でぬると、 D は3色1, 2, 3で色分けされる。 $a \in A(D)$ に対して、 $c(a)$ は弧 a にぬられている色とする。 $u, v \in V(D)$ に対して、 $n(u, v)$ を u と v を結ぶ弧の数とする。 $|V(D)| = 3$ の場合、この補題は容易に確かめられるので、 $|V(D)| \geq 4$ で考える。

Case 1 $|N(x)| = 2$: $N(x) = \{y_1, y_2\}$ とおいて分類する。

Case 1.1 $n(x, y_1) = 1$ or 3 : $n(x, y_1) = 3$ の場合を調べれば十分である。 $N(y_1) \setminus \{x\} = \{z\}$ とおき、 $(x, y_2) \in A(D)$ と仮定する。これから、2つの場合に分ける。

(I) $z \neq y_2$: $D^* = D - \{x, y_1\} + (z, y_2)$ とおく。このとき、 $D^* \cong K_3^*$ の場合に例外となるが、 D にもとせば直接、3色でぬれることがわかる。(図2.1) $D^* \not\cong K_3^*$ ならば、帰納法の仮定より、 $\delta^+(D^*) \leq 3$ となる。 $c((z, y_2)) = 1$ としてよいので、図2.2のようにもとせる。

(II) $z = y_2$: $N(y_2) \setminus \{x, y_1\} = \{\omega_1, \omega_2\}$ とおく。ただし、 $\omega_1 = \omega_2$ となる場合もある。そこで、 $\omega_1 \neq y_1$ かつ

$x \neq \omega_2$ に注意して, $D^* = D - y_2 + (\omega_1, y_1) + (x, \omega_2)$ とおく。
 $|V(D^*)| \geq 4$ より, $l_{\vec{\alpha}}(D^*) \leq 3$ となる。 $c((\omega_1, y_1)) = \alpha$,
 $c((x, \omega_2)) = \beta$ とおくとき, $\alpha \neq \beta$ ならば, D において,
 $c((\omega_1, y_2)) = c((y_2, y_1)) = \alpha$, $c((x, y_2)) = c((y_2, \omega_2)) = \beta$ とすれば
よい。したがって, $\alpha = \beta = 1$ の場合を考えれば十分。この
ときは, 図 2.3 のようにして, D にもとせる。ただし, D^* に
対しては, $c((x, y_1)) = 2$, $\omega_1 \neq \omega_2$ と仮定してよいことに注
意する。

Case 1.2 $n(x, y_1) = 2$: x と y_1 を結ぶ弧は, 同じ方
向 ($(y_1, x)_1, (y_1, x)_2 \in A(D)$ とする。) か, 異なるかである。

(I) 同じ方向の場合 : $D^* = D - x + (y_1, y_2)_1 + (y_1, y_2)_2$
とおく。ただし, $(y_1, y_2)_1, (y_1, y_2)_2$ は, 多重弧 (y_1, y_2) を意味
するものとする。 $D^* \neq K_3^*$ かつ $|V(D^*)| \geq 3$ より, $l_{\vec{\alpha}}(D^*) \leq 3$ 。
したがって, $c((y_1, y_2)_1) = 1$, $c((y_1, y_2)_2) = 2$ とおけば, D に対
して, 図 2.4 のように色を割りつけられる。

(II) 異なる方向の場合 : $D^* = D - x + (y_1, y_2) + (y_2, y_1)$
とおく。 $D^* \cong K_3^*$ の場合に例外と存するが, この場合も D を直接
3色でぬれることがわかる。(図 2.5) $D^* \neq K_3^*$ ならば, D^* は 3
色でぬれる。よって, $c((y_1, y_2)) = 1$, $c((y_2, y_1)) = 2$ とすれば,
 D において, $c((y_1, x)) = c((x, y_2)) = 1$, $c((y_2, x)) = c((x, y_1)) = 2$
とおけばよい。

Case 2 $|N(x)| = 3$: $N(x) = \{y_1, y_2, y_3\}$ とおく。このとき、 $n(x_1, y_1) = 2$ と仮定してよい。ここで、 x と y_1 を結ぶ 2 つの弧 a_1, a_2 の方向に関して場合に分ける。

Case 2.1 a_1 と a_2 は同じ方向の場合 : $(y_1, x)_1, (y_1, x)_2 \in A(D)$ の場合のみ示す。 $D^* = D - x + (y_1, y_2) + (y_1, y_3)$ とおく。 $D^* \cong K_3^*$ となる例外の D は、 $l_2(D) \leq 3$ なる事実と共に図 2.6 に示されている。 $D^* \not\cong K_3^*$ ならば、 $l_2(D^*) \leq 3$ である。 $c((y_1, y_2)) \neq c((y_1, y_3))$ より、 $c((y_1, y_2)) = 1, c((y_1, y_3)) = 2$ としよ。このとき、 $c((y_1, x)_1) = c((x, y_2)) = 1, c((y_1, x)_2) = c((x, y_3)) = 2$ とおけば、 D にもとすことができる。

Case 2.2 a_1 と a_2 は異なる方向の場合 : まず D^* を $D^* = D - x + (y_1, y_3) + (y_2, y_1)$ とおく。 $D^* \cong K_3^*$ となる例外の D に対して、 $l_2(D) \leq 3$ が成立する。(図 2.7) 一方、 $D^* \not\cong K_3^*$ ならば、 $l_2(D^*) \leq 3$ となる。 $c((y_2, y_1)) \neq c((y_1, y_3))$ ならば、 $c((y_2, y_1)) = 1, c((y_1, y_3)) = 2$ としよるので、 $c((y_1, x)) = c((x, y_3)) = 2, c((x, y_1)) = c((y_2, x)) = 1$ とおけば、 D を得る。 $c((y_2, y_1)) = c((y_1, y_3))$ のとき、 $N(y_1) \setminus \{x\} = \{z_1, z_2\}$ とおく。 $c((z_1, y_1)) \neq c((y_1, z_2))$ ならば、 $c((y_2, y_1)) = 1, c((z_1, y_1)) = 2, c((y_1, z_2)) = 3$ としよ。したがって、図 2.8 のようになる。もし、 $c((z_1, y_1)) = c((y_1, z_2))$ ならば、 $c((y_2, y_1)) = 1, c((z_1, y_1)) = 2$ としよるので、 D にもとせる。(図 2.9)

Case 3 $\forall x \in V(D), |N(x)| = 4 : N(x) = \{y_1, y_2, y_3, y_k\}$ とし、 $(y_1, x), (y_2, x), (x, y_3), (x, y_k) \in A(D)$ と仮定する。このとき、 $D^* = D - x + (y_1, y_k) + (y_2, y_3)$ とおく。

Case 3.1 D^* が非連結有向グラフとなる場合 : ここで、各 $i = 1, 2$ に対して、 D^* の連結成分 D_i^* の位数は 4 以上となることに注意する。したがって、 $l_2(D_i^*) \leq 3$ ($i = 1, 2$)。 $c((y_1, y_k)) \neq c((y_2, y_3))$ とできるので、明らかに D にもどせる。

Case 3.2 D^* が連結有向グラフとなる場合 : Case 3.1 より、 $c((y_1, y_k)) = c((y_2, y_3)) = 1$ と仮定してよい。ここで、 y_3 から y_1 への色 1 の有向道及び y_k から y_2 への色 1 の有向道が、両方とも存在することはない。よって、 y_k から y_2 への色 1 の有向道はないとしてよい。さらに、 D^* において y_3, y_k に入ってくる弧で、 $(y_2, y_3), (y_1, y_k)$ と異なるものをそれぞれ $(s, y_3), (t, y_k)$ とし、 y_1 から出る弧で、 (y_1, y_k) と異なるものを (y_1, u) とおく。しかも、 $c((y_1, u)) = 2$ と仮定してよい。以上をまとめたものが、図 2.10 である。

(I) $c((s, y_3)) = 3$ または、 $c((t, y_k)) = 3$ の場合 : $c((s, y_3)) = 3$ の場合だけ調べる。このとき、図 2.11 のようにして D にもどせることがわかる。

(II) $c((s, y_3)) = c((t, y_k)) = 2$ の場合 : ここでは、つぎの点に注意する。つまり、 y_3 から y_1 への色 3 の有向道及び、

y_0 から y_1 への色 3 の有向道は両方とも存在することはない。
よって、 y_0 から y_1 への色 3 の有向道はないと仮定する。こ
こで、 D にもとすと図 2.12 のようになる。

以上で補題 2 が成立することがわかった。 □

補題 1, 2 をまとめれば、定理 B を得る。(定理 A も同様に
して証明される。)

References

- [1] H. Enomoto, B. Péroche; The linear arboricity of some regular graphs, JGT 8 (1984) 309-324.
- [2] F. Harary; Covering and packing in graphs, I. Ann. N. Y. Acad. Sci. 175 (1970) 198-205.
- [3] R. Stanton, D. Cowan, L. James; Some results on path numbers, Proc. Louisiana Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, Baton Rouge (1970) 112-135.

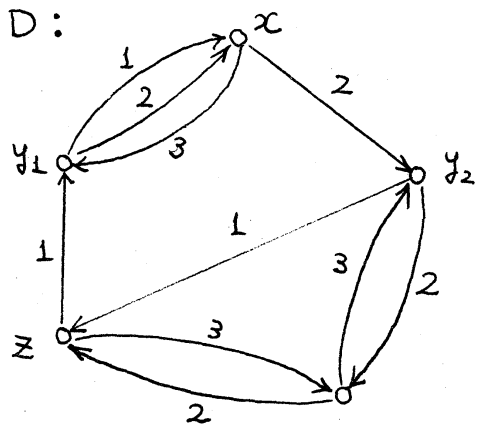


图 2.1

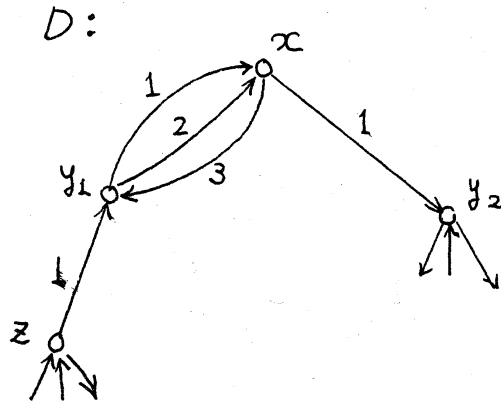


图 2.2

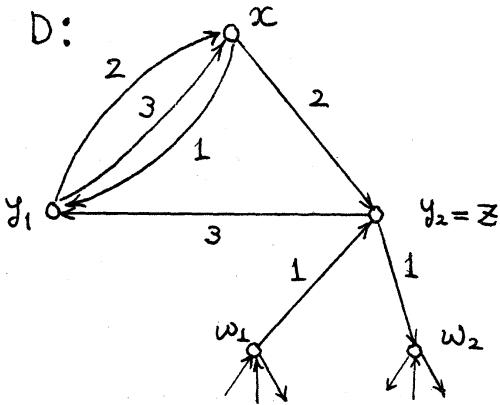


图 2.3

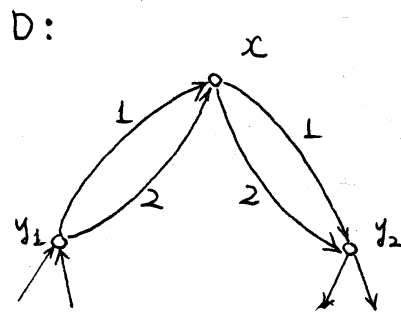


图 2.4

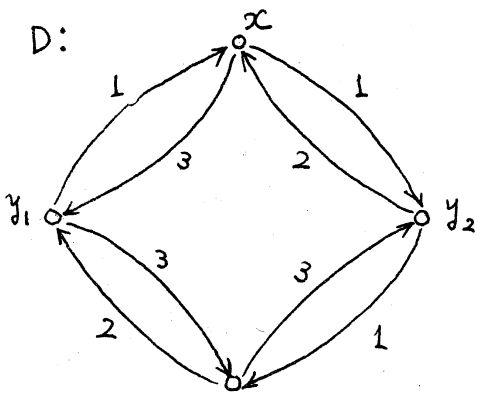


图 2.5

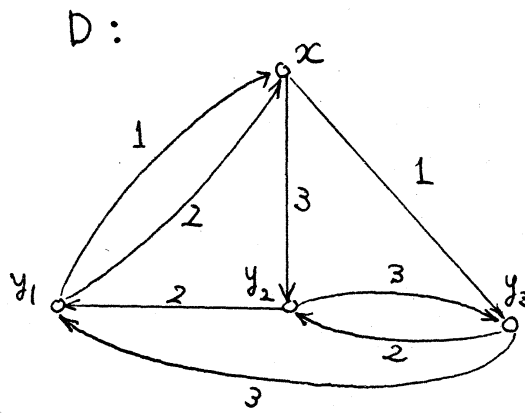


图 2.6

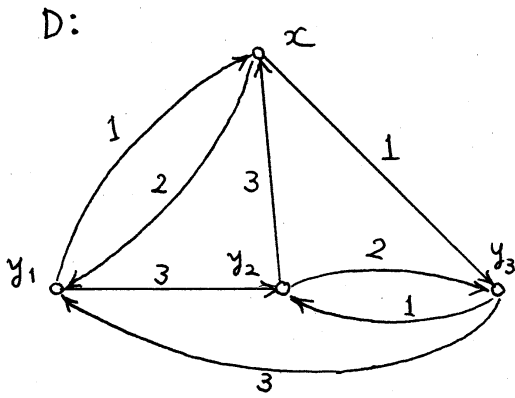


図 2.7

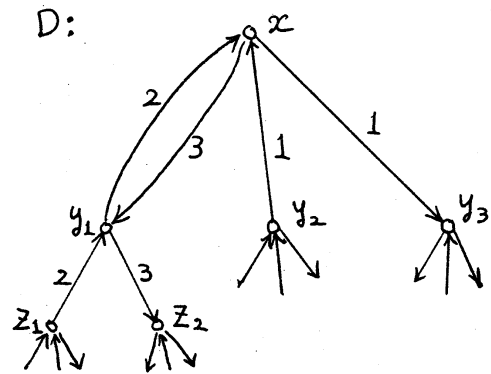


図 2.8

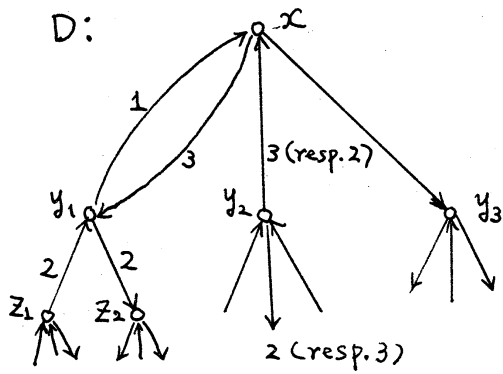


図 2.9

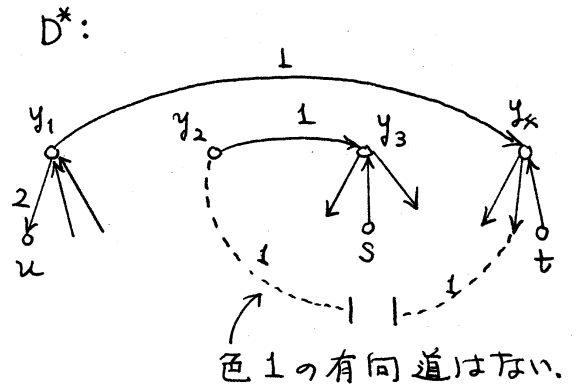


図 2.10

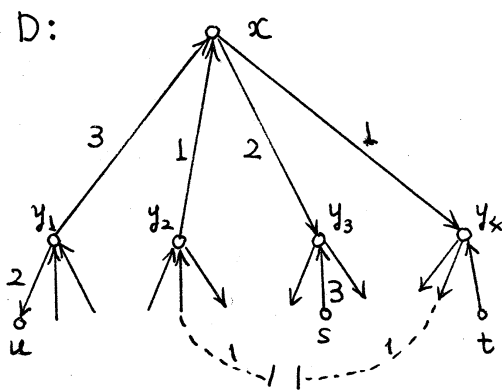


図 2.11

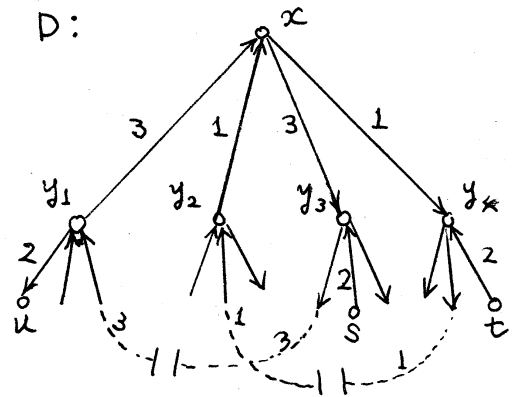


図 2.12