数理解析研究所講究録
569巻 1985年 104-119

空間周期構造の安定性理論

京大理物理　山田道夫 (Michio Yamada)

1. はじめに

流体系を含む広い系において、空間的周期性を伴う定常状態がしばしば観測されている（対流のセル構造、波、流れの二次流、化学反応など）。この様な周期構造は大きく次の2種類に分けることができる。一つは、系の外部から熱などの強制力を周期的(空間)に加えることによって実現、維持されるものであり、他の一つは、その様な強制力なしに自発的に存在するものである。一般的に言って、前者の周期構造は強制力に依存しているためにその空間的な位置を動かすことはできないが、後者はそのような束縛を受けないので周期構造全体を移動させたものが再び定常状態となる。この違いは、現象を支配する方程式系が空間に関する並進対称性を持つか（後者）、持たないか（前者）に対応している。以下では便宜のため、並進対称性を持たない系をGroup I、持つ系をGroup II

と呼ぶことにする。

さて、不安定性の超臨界状態においてこれらの周期構造には、様々な周期の、あるいは非周期の、不安定モードが連続的に存在する。従って不安定攪乱の弱非線型段階を記述するためには、平行流の非線型安定論の場合と同様、空間と時間に多重尺度を導入し攪乱振巾を支配する方程式を得ることが必要である。もし、臨界に近い点の不安定モードと攪乱振巾の変化のスケールが分離可能ならば、このような解析によって(必ずしも常にではないが) Stewartson-Stuart タイプの方程式が得られる。しかし、周期構造の超臨界状態においてはこのスケールの分離はしばしば不可能となり、この場合、振巾方程式はもはや Stewartson-Stuart タイプにはならない。

このような場合の超臨界状態の記述は、近年 Kuramoto (1984) によって議論された。Kuramoto は Group II に属する周期構造について、状態を記述する量として位相に着目し、いくつかの仮定の下で座標と位相のスケーリングを行い、位相の変化を支配する閉じた非線型偏微分方程式を導いた。同時に Kuramoto は、ある反応拡散方程式において、これらの非線型偏微分方程式の導出の際用いられたいくつかの仮定が実際に満たされていることを示している。位相を用いて状態を記述する方法は現在"位相力学"(Phase Dynamics)と呼ばれているが、こ

のKuramotoの解析は、その非線型理論を与えている。

この小論では、Kuramoto (1984)によるPhase Dynamicsの方程式の導出を多重尺度展開法を用いて取扱い、反応拡散系とは異なるクラスの方程式に対してもやはり同じ方程式が得られることを示す。更にこの方法を、Group I に属する周期構造に対して適用し、適当な仮定の下に、再び同じ方程式が導かれることを示す。

2. 非線型位相力学 (Nonlinear Phase Dynamics)

この節ではKuramoto (1984)による非線型位相力学の方程式の導出を略述し次節以後の議論の準備をする。Kuramotoは最終的に4つの代表的方程式を導いているがここではそのうちの一つの導出部分のみを略述する。導出の詳細、また他の方程式や位相力学的背景、あるいはカオス理論との関連等については原論文を参照されたい。なお記述の都合上記号は原論文と若干異なるものを用いる。

Kuramoto (1984)は、空間2次元の散逸力学系、

$$\partial_t \vec{u} = \vec{F}(\vec{u};\partial_x,\partial_y) \tag{2.1}$$

の周期解

$$\left.\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_0(\psi) = \vec{u}_0(\psi+l) \\ \psi &= x - ct + \phi \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

のまわりの摂動を扱った。ここでϕ（位相, Phase）は定数、lは解の周期である。また$\vec{F}$は$\vec{u}$とその空間微係数の非線型関数であり、座標x, yを陽には含まない（Group II）とする。いまϕが定数ではなくゆるやかに変化する関数であり、そのために周期構造$\vec{u}_0(\phi)$がわずかに変形されているとしよう。このような$\vec{u}_0(\phi)$はもはや(2.1)の定常解ではなく時間的に変化する。ここで系が並進対称性を持つことに注意すると、周期構造の時間変化もゆるやかであり、その様子は（少くとも近似的に）ϕの変化として表現できると期待される。いま系を記述するゆっくり変化する量がϕだけであると仮定すると、ϕ以外の変数はϕに"断熱的に"追従すると考えられる。従って位相ϕは系全体を完全に決定する量であり、ϕの時間変化率はϕだけで決定されるだろう。すなわち

$$\partial_t \phi = \Omega[\phi]。 \qquad (2.3)$$

ここで右辺が局所的なϕ及びϕの空間微係数の値のみで記述されると仮定すると

$$\partial_t \phi = \Omega(\phi, \partial_x \phi, \partial_y \phi, \partial_x^2 \phi, \partial_x \partial_y \phi, \partial_y^2 \phi, \cdots)。 \qquad (2.4)$$

更に系の並進対称性（Group II）と反転対称性$(y \to -y)$から、Ωはϕに陽には依存せず、反転$y \to -y$に対して不変であることが要請される。

ところで、解$\vec{u}_0(x-ct)$の線型安定性問題の解

$$\hat{u} = \hat{v}(x-ct)\exp[i(q_x x + q_y y) + \sigma t] \qquad (2.5)$$

を考えると、Ωをϕに関して線型化したものは、σをq_x, q_yで展開した後変換$(\sigma, iq_x, iq_y) \to (\partial_t, \partial_x, \partial_y)$をほどこしたものと一致しなければならない。従って、上述の対称性を考慮して、σの形は、

$$\left.\begin{aligned}
\sigma &= i\sigma_i - \sigma_r \\
\sigma_i &= (a_1 q_x + a_3 q_x^3 + \cdots) + (C_{12} q_x q_y^2 + \cdots) \\
\sigma_r &= (a_2 q_x^2 + a_4 q_x^4 + \cdots) + (b_2 q_y^2 + b_4 q_y^4 + \cdots) \\
&\quad + (C_{22} q_x^2 q_y^2 + \cdots)
\end{aligned}\right\} \quad (2.6)$$

となる。ここでa_i, b_i, C_{ij}は実定数である。いまεを小さな正数とし、$a_2 = -\varepsilon$, $a_4 > 0$となる場合(Eckhaus instability)を考えると、q_xに関して、2次の項が不安定化、4次の項が安定化に寄与している。

さて、ここで位相ϕと座標x, yのスケーリングを導入し、ϕの関数形を

$$\phi = \varepsilon^{\beta} \tilde{\phi}(\varepsilon^{\nu} x, \varepsilon^{\nu'} y, \varepsilon^{\delta} t) \qquad (2.7)$$

を仮定すると、ϕ及びϕの空間微係数のオーダーを決めることができる。いま、安定化$(a_2 q_x^2)$と不安定化$(a_4 q_x^4)$がつり合う状況を考え、更に同じオーダーでy方向の散逸$(b_2 q_y^2)$が存在するとした後、非線型項の中で主要なもののみを選ぶと$(\beta = \nu = 1/2,\ \nu' = 1,\ \delta = 3/2)$、

$$\partial_t \phi = (a_1 \partial_x + a_2 \partial_x^2 - a_3 \partial_x^3 - a_4 \partial_x^4 + b_2 \partial_y^2)\phi + g(\partial_x \phi)^2 , \qquad (2.8)$$

を得る。ここでgは定数である。この方程式はϕに対して閉じた非線型偏微分方程式であり系の超臨界状態（弱非線型段階）を記述している。なおKuramoto（1984）は、更に、gを位相速度cと関係づける議論を与えているがここでは立入らない。

3. 多重尺度展開（Group II）

前節の直観的で簡潔な議論によって、位相ϕの従う方程式(2.8)が得られた。Kuramoto(1984)は次の形の反応拡散方程式

$$\partial_t \vec{u} = \vec{F}(\vec{u}) + D(\partial_x^2 + \partial_y^2)\vec{u} \qquad (3.1)$$

において、(2.8)に至るいくつかの仮定が実際に満たされていることを示している。ここでは多重尺度展開法を用いて別種のクラスの方程式の周期解に対してやはり(2.8)式が得られることを示す。以下記述の簡単のため、空間一次元(x)、一成分の場合を扱うが、多次元多成分の場合への拡張は形式的である。

次の方程式を考える（便宜上すべて実数とする）

$$\partial_t u + Lu + Mu \cdot Nu = 0 。 \qquad (3.2)$$

ここで$L = L(\partial_x)$, $M = M(\partial_x)$, $N = N(\partial_x)$はxに陽に依存しない

(Group II) ∂_xの多項式(演算子)である。非線型項の形は代数的なものを採用した。この方程式の周期定常解(存在を仮定する)

$$u = u_0(x) = u_0(x+l), \quad l\text{は周期}, \tag{3.3}$$

の摂動を考えよう。いま摂動された解を

$$u = u_0(x+\phi(x)) + h(x), \tag{3.4}$$

と表現し、ϕを前と同じく位相と呼ぶことにしよう。明らかにこのようなϕとhの組は、一般的には、一意的に定まらない。しかし以下に述べるように、漸近的な意味でϕを一意的に定めることは可能であり、このときϕの主要項は(2.8)あるいはそれに類似の方程式に従うのである。

小さなパラメーター(正数)εを用いて多重尺度

$$(t_n, x_n) = \varepsilon^n (t, x), \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3.5}$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_t &= \partial_{t_0} + \varepsilon\partial_{t_1} + \varepsilon^2\partial_{t_2} + \cdots \\ \partial_x &= \partial_{x_0} + \varepsilon\partial_{x_1} + \varepsilon^2\partial_{x_2} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

を導入し、ϕ及びhをεで展開する、

$$\phi = \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \varepsilon^3\phi_3 + \cdots, \tag{3.7}$$

$$h = \qquad \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^3 h_3 + \cdots. \tag{3.8}$$

いま位相ϕが周期構造のゆらぎを表現していることを考慮するならば、hは少くとも第一近似においてはϕ_1のみによって表現されなければならない。(3.8)で$h = O(\varepsilon^2)$とするのはこの反映である。ところで、位相ϕは空間的にも時間的にも

ゆるやかに変化することが期待される。すなわち速いスケールt_0, x_0には依存しない、

$$\phi_n = \phi_n(x_1, x_2, \cdots; t_1, t_2, \cdots) \text{ 。} \tag{3.9}$$

しかし、h_nは、空間的には、位相ϕの変化に吸収できない部分を記述するのでx_0に周期的(周期l)に依存しなければならない。すなわち

$$\begin{aligned} h_n &= h_n(x_0, x_1, x_2, \cdots; t_1, t_2, \cdots) \\ &= h_n(x_0 + l, x_1, x_2, \cdots; t_1, t_2, \cdots) \text{ 。} \end{aligned} \tag{3.10}$$

以上(3.4)〜(3.10)をもとの方程式(3.2)に代入しεのべきにそろえる。例えば(3.2)の第二項は代入により

$$Lu = \sum_{l,m,n,p,q} \frac{1}{n!}(\varepsilon^l \partial_{x_l})^n L_n \left[\frac{1}{m!}(\partial_{x_0}^m u_0)(\varepsilon^p \phi_p)^m + \varepsilon^q h_q\right] \tag{3.11}$$

となる。ここでL_nは

$$L_n = \left.\frac{d^n}{dz^n} L(z)\right|_{z=\partial_x} \tag{3.12}$$

で定義される∂_xの多項式(演算子)である。$Mu \cdot Nu$も同様にεで展開され、M_n, N_nも同様に定義される。

方程式(2.8)の線型化演算子$\mathcal{L}_0$及び$\mathcal{L}_n$を次のように定義すると、

$$\mathcal{L}_0 = L_0 + M_0 u_0 \cdot N_0 + N_0 u_0 \cdot M_0 \text{ 、} \tag{3.13}$$

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{n!}\left[L_n + M_0 u_0 \cdot N_n + N_0 u_0 \cdot M_n\right] \text{ 、} \tag{3.14}$$

方程式(2.8)の$O(\varepsilon)$は

$$\mathcal{L}_0 \partial_{x_0} u_0 = 0 \tag{3.15}$$

となり、これは系が並進対称性を持つこと(Group II)から常に満たされる。すなわち($u=u_0$の線型安定性問題において)$\partial_{x_0}u_0$は解u_0の並進に伴う固有値ゼロに属するtrivialな固有関数である。

$O(\varepsilon^2)$では次の方程式が得られる、

$$\partial_{x_0}u_0\cdot\partial_{t_1}\phi_1+\mathcal{L}_1\partial_{x_0}u_0\cdot\partial_{x_1}\phi_1+\mathcal{L}_0h_2=0 \qquad (3.16)$$

ここで$\mathcal{L}_0$の共役演算子$\mathcal{L}_0^\dagger$を、内積$<\,,\,>=\int_0^l dx_0$と共に導入し次の事を<u>仮定</u>する。

1. 方程式 $\mathcal{L}_0u=0$, $u(x_0)=u(x_0+l)$ 及び $\mathcal{L}_0^\dagger v=0$, $v(x_0)=v(x_0+l)$にはそれぞれ唯一つの解($u=\partial_{x_0}u_0$ 及び$v(x_0)$)が存在する。
2. 周期関数g(周期l)が与えられたとき、方程式、$\mathcal{L}_0f=g$, $f(x_0)=f(x_0+l)$に解が存在する条件は

$$<v,g>=0。\quad (可解条件) \qquad (3.17)$$

このとき(3.16)におけるh_2の可解条件から

$$<v,\partial_{x_0}u_0>\partial_{t_1}\phi_1+<v,\mathcal{L}_1\partial_{x_0}u_0>\partial_{x_1}\phi_1=0。\qquad (3.18)$$

更に不等式

$$<v,\partial_{x_0}u_0>\neq 0 \qquad (3.19)$$

を<u>仮定</u>すると、結局

$$\partial_{t_1}\phi_1+C_g\partial_{x_1}\phi_1=0,\quad C_g=<v,\mathcal{L}_1\partial_{x_0}u_0>/<v,\partial_{x_0}u_0>。\qquad (3.20)$$

このときh_2が解けるが不定性が残る。一般に他のh_nについて

も同様の不定性が残るが以下では、各h_nが"平行移動の成分を含まない"条件

$$\langle v, h_n \rangle = 0 、\quad (n=2,3,\cdots) \qquad (3.21)$$

を用いてこの不定性を消去する。

以上の手続きを逐次的に実行することにより、各h_nの可解条件からϕ_nの方程式が得られる。以下結果のみを列挙すると

$$O(\varepsilon^3) : (\partial_{t_1}\phi_2 + \partial_{t_2}\phi_1) + c_g(\partial_{x_1}\phi_2 + \partial_{x_2}\phi_1) - \kappa\partial_{x_1}^2\phi_1 = 0 、\quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^4) : & (\partial_{t_1}\phi_3 + \partial_{t_2}\phi_2 + \partial_{t_3}\phi_1) + c_g(\partial_{x_1}\phi_3 + \partial_{x_2}\phi_2 + \partial_{x_3}\phi_1) \\ & - \kappa(\partial_{x_1}^2\phi_2 + 2\partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi_1) + \mu(\partial_{x_1}^3\phi_1) + \nu(\partial_{x_1}\phi_1)^2 = 0 \quad (3.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^5) : & (\partial_{t_1}\phi_4 + \partial_{t_2}\phi_3 + \partial_{t_3}\phi_2 + \partial_{t_4}\phi_1) \\ & + c_g(\partial_{x_1}\phi_4 + \partial_{x_2}\phi_3 + \partial_{x_3}\phi_2 + \partial_{x_4}\phi_1) \\ & - \kappa(\partial_{x_1}^2\phi_3 + 2\partial_{x_1}\partial_{x_2}\phi_2 + \partial_{x_2}^2\phi_1 + 2\partial_{x_1}\partial_{x_3}\phi_1) \\ & + \mu(\partial_{x_1}^3\phi_2 + 3\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}\phi_1) + \eta(\partial_{x_1}^4\phi_1) \\ & + \nu(2(\partial_{x_1}\phi_1)(\partial_{x_1}\phi_2) + 2(\partial_{x_1}\phi_1)(\partial_{x_2}\phi_2)) \\ & + \lambda(\partial_{x_1}\phi_1)(\partial_{x_1}^2\phi_1) = 0 。\quad (3.24) \end{aligned}$$

ここでκ、μ、ν、λ、ηは次の様に定義される定数であり、

$$\kappa = -\langle v, \mathcal{L}_1 g_2 + \mathcal{L}_2 \partial_{x_0} u_0 \rangle / \langle v, \partial_{x_0} u_0 \rangle 、\quad (3.25)$$

$$\mu = \langle v, \mathcal{L}_1 g_3 + \mathcal{L}_2 g_2 + \mathcal{L}_3 \partial_{x_0} u_0 \rangle / \langle v, \partial_{x_0} u \rangle 、\quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \nu = & \langle v, \mathcal{L}_1 \hat{g}_2 + \mathcal{L}_2 \partial_{x_0}^2 u_0 + M_1 \partial_{x_0} u_0 \cdot N_1 \partial_{x_0} u_0 \\ & + M_1 \partial_{x_0} u_0 \cdot N_0 g_2 + (M \leftrightarrow N) \\ & + M_0 g_2 \cdot N_0 g_2 \rangle / \langle v, \partial_{x_0} u_0 \rangle 、\quad (3.27) \end{aligned}$$

$$\lambda = \langle \nu, \mathcal{L}_1(g_{44}+2g_{42}) + 3\mathcal{L}_2\hat{g}_2 + 3\mathcal{L}_3\partial_{x_0}^2 u_0$$
$$+ (M_0 g_2 + M_1\partial_{x_0}u_0)\cdot(N_0 g_3 + N_1 g_2 + \tfrac{1}{2}N_2\partial_{x_0}u_0)$$
$$+ (M \leftrightarrow N) \rangle \,/\, \langle \nu, \partial_{x_0}u_0 \rangle. \qquad (3.28)$$

$$\eta = \langle \nu, \mathcal{L}_1 g_{41} + \mathcal{L}_2 g_3 + \mathcal{L}_3 g_2 + \mathcal{L}_4\partial_{x_0}u_0 \rangle / \langle \nu, \partial_{x_0}u_0 \rangle. \qquad (3.29)$$

ここに現われる g_i, g_{ij} は次の様に定義される x_0のみの関数である。

$$\mathcal{L}_0 g_2 + (\mathcal{L}_1 - c_g)\partial_{x_0}u_0 = 0,$$
$$\mathcal{L}_0 g_3 + (\mathcal{L}_1 - c_g)g_2 + (\mathcal{L}_2 + \kappa)\partial_{x_0}u_0 = 0.$$
$$\mathcal{L}_0 g_{41} + (\mathcal{L}_1 - c_g)g_3 + (\mathcal{L}_2+\kappa)g_2 + (\mathcal{L}_3 - \mu)\partial_{x_0}u_0 = 0.$$
$$\mathcal{L}_0 g_{42} + (\mathcal{L}_1 - c_g)\hat{g}_2 + \mathcal{L}_2\partial_{x_0}^2 u_0 + M_1\partial_{x_0}u_0\cdot N_1\partial_{x_0}u_0$$
$$+ M_0 g_2\cdot N_0 g_2 + M_1\partial_{x_0}u_0\cdot N_0 g_2 + (M\leftrightarrow N) - \nu\partial_{x_0}u_0 = 0.$$
$$\hat{g}_2 = \partial_{x_0}g_2 + c_3\partial_{x_0}u_0.$$
$$g_{44} = \partial_{x_0}g_3 + c_3 g_2 + c_{44}\partial_{x_0}u_0,$$

但し、c_3, c_{44} は定数、$\langle \nu, \hat{g}_2\rangle = \langle \nu, g_i\rangle = \langle \nu, g_{ij}\rangle = 0$。

以上 (3.30)

またここで $(M\leftrightarrow N)$ は直前の項で M と N を入れ換えたものを表わす。

元の座標 x, y と位相 ϕ による表現に戻すために $(3.19)\times\varepsilon^2 + (3.22)\times\varepsilon^3 + (3.23)\times\varepsilon^4 + (3.24)\times\varepsilon^5$ を作ると $O(\varepsilon^5)$まで正しい式

$$\underbrace{(\partial_t + c_g\partial_x)\phi}_{O(\varepsilon^2)} - \underbrace{\kappa\partial_x^2\phi}_{O(\varepsilon^3)} + \underbrace{\mu\partial_x^3\phi + \nu(\partial_x\phi)^2}_{O(\varepsilon^4)}$$

$$+\underbrace{\eta\partial_x^4\phi+\lambda(\partial_x\phi)(\partial_x^2\phi)}_{O(\varepsilon^5)}=0 \qquad (3.31)$$

を得る。以上の導出の中で系を特徴づけるパラメーターの値は特に仮定しなかったが、それらの値の選び方によって(3.31)の各係数をεでスケーリングすることも可能である。方程式(3.31)は、(2.8)と比較されるべき式であり、Kuramoto (1984)による導出が多重尺度展開により支持されることを示している。なお、(3.31)の導出に際しては対称性に関する仮定は行っていないことを注意しておく。

4. 多重尺度展開 (Group I)

前節で示したように、系が並進対称性を持つ場合には(Group II)位相φが記述に適当な量となる。これは、周期構造のゆらぎが局所的にはパターンの平行移動とみなせること、また平行移動したパターンも定常的であることによっている。外部から強制された周期構造(Group I)の場合は後者の条件は満たされない。しかし前節の展開法が、$\mathcal{L}_0$のtrivialなゼロ固有値の存在によっていることに注意するならば、特別な場合ではあるが同様の多重尺度展開が可能な例を与えることができる。以下にその一例を示す。

次の方程式を考えよう。

$$\partial_t u + Lu + Mu \cdot Nu = F(x)。 \quad (4.1)$$

ここで$F(x)$は強制力であり、$L=L(x,\partial_x)$, $M=M(x,\partial_x)$, $N=N(x,\partial_x)$は(線型)微分演算子であるが前節と異なり空間座標xに依存していてもよい。この方程式が周期解$u_0(x)$を持つとして、そのまわりの線型化演算子$\mathcal{L}_0$及び$\mathcal{L}_n$を前節と同様に定義する。多重尺度(t_n, x_n)を(3.5), (3.6)のように導入しuをεで展開する。

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots\cdots 。 \quad (4.2)$$

ここで、$\mathcal{L}_0$の固有値ゼロに属する固有関数(g_1とする)が<u>定数のみ</u>(1に選ぶ)であるとし、前節と同様に$\mathcal{L}_0^\dagger$の性質を仮定する。このとき

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, \cdots; t_1, t_2, \cdots)、 \quad (4.3)$$

$$u_n = u_n(x_0, x_1, x_2, \cdots; t_1, t_2, \cdots\cdots)$$
$$= u_n(x_0 + l, x_1, x_2, \cdots\cdots; t_1, t_2, \cdots\cdots)、 \quad (4.4)$$

(但し lは$u_0(x)$の周期)

となり、(4.1)の多重尺度展開が可能となる。以下結果のみ列挙すると、

$$O(\varepsilon^2): \partial_{t_1} u_1 + C_g \partial_{x_1} u_1 = 0、 \quad (4.5)$$

$$O(\varepsilon^3): \partial_{t_2} u_1 + C_g \partial_{x_2} u_1 - K \partial_{x_1}^2 u_1 = 0、 \quad (4.6)$$

$$O(\varepsilon^4): \partial_{t_3} u_1 + C_g \partial_{x_3} u_1 - K\, 2\partial_{x_1}\partial_{x_2} u_1 + \mu \partial_{x_1}^3 u_1 + \nu (\partial_{x_1} u_1)^2 = 0、 \quad (4.7)$$

$$O(\varepsilon^5): \partial_{t_4} u_1 + C_g \partial_{x_4} u_1 - K(2\partial_{x_1}\partial_{x_3} u_1 + \partial_{x_2}^2 u_1)$$

$$+\mu 3\partial_{x_1}^2\partial_{x_2}u_1 + \nu 2(\partial_{x_1}u_1)(\partial_{x_2}u_1)$$
$$+\eta\,\partial_{x_1}^4 u_1 + \lambda(\partial_{x_1}u_1)(\partial_{x_1}^2 u_1) = 0、\quad (4.8)$$

ここで$c_g, \kappa, \mu, \nu, \eta, \lambda$は次の様に定義される定数で、

$$c_g = \langle v, \mathcal{L}_1 g_1\rangle / \langle v, g_1\rangle 、\quad (4.9)$$
$$\kappa = -\langle v, \mathcal{L}_1 g_2 + \mathcal{L}_2 g_1\rangle / \langle v, g_1\rangle 、\quad (4.10)$$
$$\mu = \langle v, \mathcal{L}_1 g_3 + \mathcal{L}_2 g_2 + \mathcal{L}_1 g_1\rangle / \langle v, g_1\rangle 、\quad (4.11)$$
$$\nu = \langle v, (M_1 g_1 + M_0 g_2)\cdot(N_1 g_1 + N_0 g_2)\rangle / \langle v, g_1\rangle 、\quad (4.12)$$
$$\eta = \langle v, \mathcal{L}_1 g_{41} + \mathcal{L}_2 g_3 + \mathcal{L}_3 g_2 + \mathcal{L}_4 g_1\rangle / \langle v, g_1\rangle 、\quad (4.13)$$
$$\lambda = \langle v, 2\mathcal{L}_1 g_{42} + (M_0 g_2 + M_1 g_1)\cdot(N_0 g_3 + N_1 g_2 + \tfrac{1}{2}N_2 g_1)$$
$$+ (M \leftrightarrow N)\rangle / \langle v, g_1\rangle 、\quad (4.14)$$

各g_i, g_{ij}は次のように定義される関数である。

$$g_1 = 1、$$
$$\mathcal{L}_0 g_2 + (\mathcal{L}_1 - c_g)g_1 = 0、$$
$$\mathcal{L}_0 g_3 + (\mathcal{L}_1 - c_g)g_2 + (\mathcal{L}_2 + \kappa)g_1 = 0、$$
$$\mathcal{L}_0 g_{41} + (\mathcal{L}_1 - c_g)g_3 + (\mathcal{L}_2 + \kappa)g_2 + (\mathcal{L}_3 - \mu)g_1 = 0、$$
$$\mathcal{L}_0 g_{42} + (M_1 g_1 + M_0 g_2)\cdot(N_1 g_1 + N_0 g_2) - \nu = 0、$$
$$\langle v, g_i\rangle = \langle v, g_{ij}\rangle = 0、$$

以上 (4.15)

前節と同様に(4.5)から(4.8)にεのベキをかけて加えると(u_n ($n \geq 2$)を含む項は全体としてゼロであることが示せるので)、結局

$$\underbrace{\partial_t u + c_g\partial_x u}_{O(\varepsilon^2)} - \underbrace{\kappa\partial_x^2 u}_{O(\varepsilon^3)} + \underbrace{\mu\partial_x^3 u + \nu(\partial_x u)^2}_{O(\varepsilon^4)}$$

$$+\underbrace{\eta(\partial_x^5 u)+\lambda(\partial_x u)(\partial_x^2 u)}_{O(\varepsilon^5)}=0 \qquad (4.16)$$

が得られる。この場合、uには“位相”の意味はないが得られた方程式は(3.31)と同じ形をしている。

5. おわりに

方程式(2.8)は以上のように多重尺度展開を用いて導くことができる。この多重尺度展開法は形式的であるので、本来(2.8)が考えられた系以外の系に対しても適用可能である。しかしそのとき、展開の中で用いられる仮定が必ずしも常に成り立つわけではない。特に保存系に対しては

$$\langle v, \partial_{x_0} u_0 \rangle = 0 \qquad (5.1)$$

となり仮定(3.19)が成り立たないことを示すことができる。このとき ϕ の従う方程式はもはや(2.18)ではないがここではこれ以上立入らない。

ここで導いた方程式(3.31)(4.16)は2つの非線型項と2つの散逸(不安定)項、1つの分散項を持ち、K-dV方程式やKuramoto-Sivashinsky方程式を極限の場合として含んでいる。そのためこれらの極限については、例えばChaos解(Kuramoto-Sivashinsky方程式)あるいはsoliton解(K-dV方程式)となるが、これらの複合的な効果についてはいまだ不明な点が多く今後の課

題であることを付記しておきたい。

References

Kuramoto, Y. (1984) Prog. Theor. Phys. 71 1182

Phase Dynamics に関して

Kuramoto, Y. (1984) "Chemical Oscillations, Waves and Turbulence" Springer-Verlag.

Cross, M.C. (1983) Phys. Rev. A27 490

Brand, H. & Cross, M.C. (1983) Phys. Rev. A27 1237