数理解析研究所講究録
569巻 1985年 1-10

流れの空間不安定性理論

京大数理研　後藤金英　(Kanefusa Gotoh)

§1　空間不安定性と時間不安定性

流れの安定性は，流れに含まれる微小擾乱の振舞いで定まる。　微小擾乱の時間発展は初期値問題として定式化され，例えば，主流が2次元定常平行流であって，初期に擾乱が局在する場合には，空間変数についてFourier変換，時間についてLaplace変換をして，初期値問題は固有モードの固有値問題に帰着され，安定臨界条件は固有値で決まる。　初期条件の与え方に無関係に，個々のモードを取扱えばよいという普遍的で単純なこの定式化は，安定性理論の基礎となり，広く応用されている。　Fourier-Laplace逆変換を行って，時間発展する波束を再構成することは，殆んど行われない。Gaster (1975) は代表的な成果であるが，これは次に述べる空間不安定性の計算結果である。　その詳細については，この講究録の伊藤の論文を参照されたい。

ある時刻に瞬間的にある場所で擾乱を導入し，その発展

を追跡する形の実験は皆無ではないが(前述のGasterの理論に対する実験 Gaster と Grant (1975) がある。伊藤の論文参照), 大抵の実験では, ある場所である時刻以後, 絶え間なく撹乱が導入される。撹乱の導入からある程度時間が経過すると, 流れが不安定である場合には, 撹乱は流れ方向に成長するが振幅の分布は時間に依存せず, 空間の各点で振幅一定の時間変化を示すようになる。この種の撹乱は, Schubauer と Skramstad の実験で撹乱源として振動リボンを用いて導入されたので, リボン型撹乱と呼ばれるが, 一般的には, 連続振動撹乱源(Continuously Oscillating Source, 以下 C-O-S)による撹乱と呼ぶ。この場合の撹乱の成長は時間経過に対してではなく, 空間変数についてであるので, これを空間不安定性と呼び, 区別をつけるために, 冒頭に述べた不安定性を時間不安定性と呼ぶ。

時間不安定性と空間不安定性の対応については, 最初に次のようなことが考えられた。導入された撹乱が時間 t の間に x だけ下流に流されたとし, その間の成長を距離 x にわたる空間成長であり, 同時に時間 t の間の時間成長と考える。問題は x としてどんな値をとるかである。流体は流速 U で運ばれるが, 撹乱は流速ではなくて, 位相速度か群速度で伝播するであろう(Schlichting 1933)。成長率が微小な

場合のこの問題の回答は Gaster (1962) によって与えられ，空間成長率と時間成長率の間には

空間成長率 ＝ 時間成長率／群速度

の関係があることが証明された。 それでは，成長率が有限値をとる場合にはどのような関係があるのだろうか？

§2 空間不安定性理論

時間不安定性理論では，初期攪乱が局在していて微小であれば，攪乱方程式の線形化，Fourier 変換，Laplace 変換に疑問の余地はなく，攪乱の時間発展は固有モードの時間発展に帰着させることができる。 たとえ成長攪乱でも，成長の初期に限れば理論は妥当である。

これに対して，空間不安定の場合は，攪乱源で微小であっても，全空間での攪乱の局在性や線形化の可能性は一般に保証されない。 しかし，攪乱源を含む適当な有限領域の解は線形化攪乱方程式に支配されるであろう。 2次元定常平行流の場合には，攪乱方程式は複素波数と実振動数の Orr-Sommerfeld 方程式（以下，O-S 方程式）となり，問題は攪乱の振動数を与えて，波数の複素固有値を求める形に設定される。 そして，複素固有値の虚部が空間成長率を与える。O-S 方程式には，下流側の境界条件を満たす自由度はないの

で，問題は下流側境界条件を設定せずに解ける。

　ところで，攪乱源から有限の領域内で得られた解の有効性は，時間不安定性の場合の成長攪乱の有限時間内の解の有効性とは，本質的に異なるものである。　境界条件も含めて，問題領域の一部分でしか有効でない解は，空間変数について楕円型の基礎方程式に支配される境界値問題の解の構成要素ではあり得ても，確実に解の一部分である保証はなく，それ故に，少くとも実験の裏付けを必要とする。　この辺の事情を明らかにするための１つの試みは，C-O-S の問題をきちんと解くことである。　これについて次節に述べるが，そこでは成長モードが必ずしも不安定性と対応しない例が示される。

§3　Continuously Oscillating Source の問題

　境界 $y=y_1,\ y_2\ (>y_1)$ の２次元平行流 $U(y)$ を考える。速度攪乱 $u,\ v$ について，初期・境界条件を

$$\left.\begin{array}{ll} t \leqq 0 \text{ の時,} & u = v = 0, \\ t > 0 \text{ の時,} & \\ \quad y = y_1 \text{ で} & u = 0, \quad v = \delta(x)\cos\omega t, \\ \quad y = y_2 \text{ で} & u = v = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

と設定すると，v は次の形に表される（Gaster 1965）

$$v(y,x,t) = \frac{i}{4\pi^2}\int_{C_1} d\alpha \int_{C_2} d\beta \, \frac{\beta}{\beta^2-\omega^2}\, \frac{\Phi(y,\alpha,\beta)}{\Phi(y_1,\alpha,\beta)}\, e^{i(\alpha x-\beta t)} \qquad (2)$$

こゝに，$\Phi(y,\alpha,\beta)$ は，$y=y_2$ で $\Phi=\partial\Phi/\partial y=0$，$y=y_1$ で $\partial\Phi/\partial y=0$ を満足する O-S 方程式の解とする。被積分関数の極 $\beta=\omega$ からの積分への寄与は強制モードを導く。β を実数に限定した場合の $\Phi(y_1,\alpha,\beta)=0$ の α の複素根は空間モード（境界条件に依存しないという意味で，自由モードともいう）を導き，α を実数に限定した時の β の複素根は時間モードを導く。

Gaster は，攪乱の群速度 v_g の値の正または負に応じて，攪乱が攪乱源の下流または上流にのみ励起されることを示し，物理的に有意な $v_g>0$ の場合には，前述の Gaster 変換を用いて，時間成長（$\beta_i>0$）と空間成長（$\alpha_i<0$）の対応がつけられることを示した。添字 i は虚部を表す。この結果にもとづいて，空間不安定の判定条件は $\alpha_i<0$ とすることができるが，Gaster 変換の有効でない大きな成長率の攪乱について，α_i がどんな意味をもつかは明らかになっていない。

具体的な問題として，Couette 流 $U(y)=y$ をとりあげる。非粘性極限を考えることにすると，O-S 方程式と境界条件は，

$$d^2\phi/dy^2-\alpha^2\phi=0,\qquad \phi(\pm 1)=0, \tag{3}$$

であるから，自由モードの解は，

$$\left.\begin{aligned} \phi &= \sin\left[\frac{n\pi}{2}(y-1)\right], \\ \alpha &= \pm\frac{n\pi i}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

であり，$\alpha_i < 0$ の固有値がある。

この問題に前述の (2) を用いると，

$$v(y, x, t) = -\frac{i}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta}{\beta^2-\omega^2}e^{-i\beta t}d\beta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\alpha(y-1)}{\operatorname{sh}2\alpha}e^{i\alpha x}d\alpha$$

$$= \frac{\cos\omega t}{4}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-y)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}x + \cos\frac{\pi}{2}(1-y)} \qquad (5)$$

となるから，攪乱は，攪乱源からの距離 x の増加とともに単調に減衰する。　なお，時間不安定性の取扱いでは Couette 流は安定である。

もう1題，線形化 KdeV 方程式の問題を引用しておこう (Drazin 1977)。方程式，初期・境界条件は次のようである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

$t < 0$ の時，　$u = 0$,

$t \geqq 0$ の時，　$|x| \to \infty$ に従って　$u \to 0$,

　　$x = 0$ で　$u = e^{-i\omega t}$,　$\partial u/\partial x = \partial^2 u/\partial x^2 = 0$.

この問題の自由モードの解は

$$u = \exp[i(\alpha x - \omega t)],$$

ただし，　$\omega - \alpha + \alpha^3 = 0$

であるから，実数 α に対して ω は実数であり，時間安定性では中立安定であるが，実数 ω に対しては α の複素数根があり，しかも $v_g > 0$ で $\alpha_i < 0$ の場合を含むので，空間安定性では"不安定"と結論される。

一方，この問題の C-O-S の解は，$t \to \infty$ のとき，$x > 0$ では指数関数的に減衰する波を，$x < 0$ では負方向に伝播する平面波と，指数関数的に減衰する波の和を表す。

以上の例題に示された大事な点は，成長自由モードの存在が示されたとしても，C-O-S の解ではそれが $|x| \to \infty$ の境界条件によって排除されるということにある。このことは，一般に成長空間モードと主流の安定性との関係を境界条件を抜きにして議論することはできないことを示しており，こゝで再び境界条件の設定が問題となる。この点，時間不安定性理論では，成長モードが1つでも存在すれば，主流は必ず不安定と結論されるのと全く異なる事情にある。

線形空間不安定性理論では $x \to \infty$ での境界条件を抜きにしているから，成長モードの安定性への寄与は理論だけでは決められないが，成長モードが実験事実をよく説明するのであれば，その事実から逆に $x \to \infty$ での境界条件が成長モードを許容するものと考えてよかろう。

§4 自由モードは実験を説明するか

Jordinson (1970) によれば，Blasius 境界層の場合，局所空間成長率 α_i を求め，それを用いて計算した撹乱の振幅 A の大域変化

$$\frac{A(R)}{A(R_0)} = \exp\left(-\frac{2}{m^2}\int_{R_0}^{R}\alpha_i(R)\,dR\right)$$

は実験 (Ross et al. 1970) を良く説明する。 こゝに，R は排除厚を用いた Reynolds 数，R_0 は基準位置の R の値，$m = 1.7208$ である。

2次元 Poiseuille 流に関しては，Itoh (1974) の理論があり，Nishioka et al. (1975) による実験的検証も与えられている。

§5 非線形問題の困難

撹乱の非線形発展領域まで含めて問題を解く方法は今のところ数値シミュレーションが最有力である。 数値シミュレーションには計算法にまつわる固有の問題があるが，それにも増して空間不安定性問題の設定で困るのは，既に述べたように，下流側の境界条件である。 下流で流れが乱流になる場合は勿論，そうでなくても撹乱が減衰しない場合，減衰するが計算の都合上，そこまで計算領域を広げられない場合

には，境界条件の設定に解そのものが必要となる。いろいろな試みがなされているが，この問題については，この講究録の柳瀬および堀内の報告にとりあげられているので，こゝでは割愛する。下流条件の上流流れに及ぼす効果については，同じく藤村の報告を，*receptivity* の問題については，同じく伊藤および西岡の報告を参照して頂きたい。

最後に，Drazin と Reid の *Hydrodynamic Stability* の1節を引用する。この本は1981年刊であるが，現在でも事情はそれ程変っていない。

> Spatial modes seem to describe observed weak instability of parallel flows more faithfully than temporal modes, although their use has not been justified mathematically in an entirely convincing or complete way as yet. .... So, while awaiting further work to clarify the matter, one may say that spatial modes seem a valuable tool in studying weak linear instability of flows forced at a fixed frequency.

引用文献

Drazin, P.G. (1977) Q. J. Mech. Appl. Math. 30, 91-105.

Gaster, M. (1962) J. Fluid Mech. 14, 222-224.

Gaster, M. (1965) J. Fluid Mech. 22, 433-441.

Gaster, M. (1975) Proc. Roy. Soc. Lond. A 347, 271-289.

Gaster, M. and Grant, I. (1975) Proc. Roy. Soc. Lond. A 347, 253-269.

Itoh, N. (1974) Trans. Japan Soc. Aero. Space. Sci. 17, 65-75.

Jordinson, R. (1970) J. Fluid Mech. 43, 801-811.

Nishioka, M., Iida, S. and Ichikawa, Y. (1975) J. Fluid Mech. 72, 731-751.

Ross, J.A., Barnes, F.H., Burns, J.G. and Ross, M.A.S. (1970) J. Fluid Mech. 43, 819-832.

Schlichting, H. (1933) Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 181-208.

Schubauer, G.B. and Skramstad, H.K. (1947) J. Aero. Sci. 14, 69-78.