

$Sp(n, \mathbb{R})$ の指標等式と不変固有超関数の 持ち上げについて

福井大学 教育 三上俊介 (Shunsuke Mikami)

§1. 序

G を実連結半単純 Lie 群, π を G の tempered 既約ユニタリ表現, その指標を Θ_π と表わす。離散系列表現の指標, 及び cuspidal parabolic 部分群からの誘導指標という方法により (少なくとも regular infinitesimal character をもつ場合には), Θ_π の形は知られている。ところが離散系列の指標の形を見ても, Θ_π の height とよばれる Cartan 部分群 (離散系列の場合は compact Cartan 部分群) 上でのきれいな形から, height より離れるに従って Cartan 部分群上での Θ_π の形は複雑なものになっていく。そこでより見易い形の指標の間関係式があることが望まれる。

その様な指標の間関係式を系統的に得る方法の一つが, D. Shelstad により "stable tempered は不変固有超関数の持ち上げ" を用いて示された。[5] それは G とはくつかの

Cartan部分群を共有する群 ((T, π) -group とよばれるもの) との間
の指標の間関係式を G の各 Cartan 部分群上毎に与えるもの
で、そのうちのいくつかは

$$\sum \varepsilon_i \otimes \pi_i = 0 \quad \text{on } T \quad \dots \quad \textcircled{*}$$

(T は G のある Cartan 部分群) と同じ形に与える。そこで $\textcircled{*}$
のよう形に指標等式に着目した。問題を正確に記述す
る為にいくつかの記号と用語を導入する。 \otimes を G 上の tempered
な不変固有超関数 (以下 IED と略記する) とする。Harish-
Chandra の結果より、 \otimes は G 上の局所可積分関数であり、

G_{reg} ($:= G$ の regular elements 全体) 上で実解析関数に与える。そ
れを \otimes' で表わすことにする。

$\text{Car}(G) := G$ の Cartan 部分群の共役類の全体

とし、 G の Cartan 部分群 T に対し $[T]$ でその属する共役類を
表わす。 $\text{Car}(G)$ の中に real root に関する Cayley 変換を用いて
順序を導入する。すなわち、 $T, T' \in G$ の Cartan 部分群とし、
 $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}'$ でその Lie 環とす。 $\forall \alpha (\mathfrak{t}_\alpha) \cap \mathfrak{t}' = \mathfrak{t}'$ のとき、
 $[T] < [T']$ と定め、これを transitive に拡張して順序 $<$ が
定まる。(但し \mathfrak{t} は G の Lie 環、 α は $(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')$ の real root、
 ν_α は α に関する Cayley 変換、 \mathfrak{t}_α は \mathfrak{t} の複素化を表わす。)

$$C(\otimes) := \{ [T] \in \text{Car}(G); \quad \otimes'_{T \cap G_{\text{reg}}} \neq 0 \}$$

とおく。 $C(\otimes)$ の今導入した順序に関する maximal elements

全体を Θ の height とする。

問題 $\Theta \in G$ 上の tempered IED とする。ある Cartan 部分群 T ($[T]$ は Θ の height より低い) 上 $\Theta'_{[T] \cap G_{\text{reg}}} \equiv 0$ とする様な Θ はどのくらいあるか。(これは Shelstad により示された持ち上げの手法により尽くされるか、云々換えると、 Θ の型の指標等式は持ち上げの手法により尽くされるか?)

またこの様な等式が成り立つ為の必要十分条件を Θ の height 上で与えることが出来るか?

以下 §2 において、Shelstad の手法 (stable tempered IED の持ち上げ) を説明し、§3 において $G = Sp(n, \mathbb{R})$ の場合の上の問題に関し、目下のところ得られてゐる結果を述べる。

§2. stable tempered IED の持ち上げ

Shelstad [5] に従い、 \llcorner の記号を導入する。 G を \mathbb{R} 上定義された連結半単純線型代数群とし、その \mathbb{R} -rational points 全体を $\underline{G}(\mathbb{R})$ で表わす。以下 $G = \underline{G}(\mathbb{R})$ とする連結実半単純 Lie 群について考える。そのとき G の Cartan 部分群 T には、 \underline{G} の \mathbb{R} 上定義された maximal torus \underline{T} で $T = \underline{T}(\mathbb{R})$ とする

が対応する。

$$A(\mathbb{T}) = \{ g \in G ; \text{ad}g|_{\mathbb{T}} \text{が } \mathbb{R} \text{上定義される} \}$$

とおく。 $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ とすると $A(\mathbb{T})$ は次の様に云々換えることが出来る。

$$\begin{aligned} A(\mathbb{T}) &= \{ g \in G ; \sigma(g^{-1})g \in \mathbb{T} \} \quad (\text{但し } e \neq \sigma \in \Gamma) \\ &= \{ g \in G ; g\mathbb{T}g^{-1} \subset G \} . \end{aligned}$$

$$\mathcal{O}(\mathbb{T}) = G \backslash A(\mathbb{T}) / \mathbb{T}$$

定義 G 上の tempered IED Θ が stable

$$\Leftrightarrow \Theta'(t) = \Theta'(gtg^{-1}) \quad \forall t \in \mathbb{T} \cap G_{\text{reg}}, \forall g \in A(\mathbb{T})$$

次に (T, π) -group (又は G の endoscopic group) とよばれる群 H の stable tempered IED の G に持ち上げを以下において説明する。

[注. Θ の様な等式を考える場合、従って §3 の議論においては、 H の形も重要ではあるが、 $\text{Car}(H)$ の構造、及び H の stable tempered IED を G に持ち上げたとき、どの様なものが得られるかが必要になる。]

$\mathcal{C}(G)$ で G 上の急減少関数の空間を表わす。 $f \in \mathcal{C}(G)$, $t \in \mathbb{T} \cap G_{\text{reg}}$ (\mathbb{T} は G の Cartan 部分群) に対し " π -unstable orbital integral " $\Phi_f^\pi(t)$ を次のように定める。

$$\Phi_f^\chi(t) = \sum_{\omega \in \mathcal{O}(T)} \chi(\omega) \int_{G/T} f(g t^\omega g^{-1}) d\bar{g}$$

(Harish-Chandra の結果より右辺の積分は収束する。) χ は $\mathcal{O}(T)$ 上 $\{\pm 1\}$ の値をとる以下の様に構成された写像である。(特に $\chi \equiv 1$ のときは χ は stable orbital integral と呼ばれる。) 同様に $A(T) \ni g \mapsto \Gamma \rightarrow \underline{T}$ ($1 \mapsto 1, \sigma \mapsto \sigma(g^{-1})g$) の 1-cycle が対応する。従って $\mathcal{O}(T) \hookrightarrow H^1(\Gamma, \underline{T})$. 実際には, \underline{G} の derived group \underline{G}_{der} , その普遍被覆群 $\tilde{\underline{G}}$, \underline{G}_{der} の projection $\pi: \tilde{\underline{G}} \rightarrow \underline{G}_{der}$ $\pi^{-1}(\underline{T} \cap \underline{G}_{der})$ とおくと $\mathcal{O}(T)$ は $H^1(\Gamma, \pi^{-1}(\underline{T} \cap \underline{G}_{der})) \rightarrow H^1(\Gamma, \underline{T})$ の像に含まれる。Tate-Nakayama の定理を適用して $\mathcal{O}(T) \hookrightarrow \{ \lambda^\vee \in \langle \Sigma^\vee \rangle; \sigma_\tau \lambda^\vee = -\lambda^\vee \} / \mathcal{L}(T)$ となる。記号を説明する。

$$\mathcal{L}(T) = \{ \lambda^\vee \in \langle \Sigma^\vee \rangle; \lambda^\vee = \sigma_\tau \mu^\vee - \mu^\vee \text{ for some } \mu^\vee \in X_*(\underline{T}) \}$$

$\Sigma^\vee := (\underline{G}, \underline{T})$ の co-root 系

$X^*(\underline{T}) := \underline{T}$ の (rational) character module

$$X_*(\underline{T}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(\underline{T}), \mathbb{Z})$$

$\langle \Sigma^\vee \rangle$ は Σ^\vee で生成される $X_*(\underline{T})$ の部分群

σ_τ は \underline{T} 上の σ の action ρ ; 自然に誘導される $X_*(\underline{T})$ 上の σ の action を表わす。

いま $\chi \in \text{Hom}(\langle \Sigma^\vee \rangle, \mathbb{C}^*)$, 但し $\chi(\mathcal{L}(T)) \equiv 1$ とすると, 上の対応により, χ は $\mathcal{O}(T)$ 上 ± 1 の値をとる前述の写像を導く。

(それを同じ記号で表わしておく。)

注. $\alpha \in (G, \underline{T})$ の non-compact imaginary root とし $w_\alpha \in \alpha$ に
 関する reflection を引きおこす \underline{G} の元とするとき, Tate-Nakay
 ama の duality において, $\mathcal{D}(\underline{T}) \ni \langle w_\alpha \rangle \mapsto \alpha^\vee + \mathcal{L}(\underline{T})$ が対応す
 ることが知られている。

詳細は Langlands [2], Shelstad [4] を参照していただく
 ことにして, L-group を経由することにより, 次の条件を満
 たす $((T, \pi)$ -group とよばれる) quasi-split reductive \mathbb{R} -代数群
 H を構成できる。 H は \mathbb{R} 上定義され, $H = H(\mathbb{R})$ とおく。

$$1) \dim H \leq \dim G, \quad \text{rank } H = \text{rank } G$$

2) H は \underline{T} (と同型 \mathbb{R} -Cartan 部分群) を含み, $\pi \in \mathcal{D}_H(\underline{T})$
 上にうつすと, $\pi \equiv 1$ と \mathbb{R} になる。

(i.e. (H, \underline{T}) の co-root 系を $\Sigma_H^\vee (\subset \Sigma^\vee)$ とすると $\pi|_{\Sigma_H^\vee}$ は
 対応する $\mathcal{D}_H(\underline{T})$ 上の写像は恒等的に 1 に \mathbb{R} になる。)

以後, 1) から 2) の (T, π) の代りに (T_0, π_0) と表わすことに
 する。 §3 の為には $Sp(n, \mathbb{R})$ の場合の例をあげておく。

例 $G = Sp(n, \mathbb{R})$ $\underline{G} = Sp(n, \mathbb{C})$, $T_0 := G$ の compact Cartan
 部分群の場合 (このとき $\sigma_{T_0} = (-1) \times \text{id}$ と \mathbb{R} になる。)

$$\Sigma^\vee = B_n \text{ 型の root 系} = \{ \pm e_i, \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n), \pm e_i \ (1 \leq i \leq n) \}$$

従って π_0 は各 e_j の値により定まる。 1) より $\pi_0(e_1) = \dots = \pi_0(e_n) =$
 -1 , $\pi_0(e_{n+1}) = \dots = \pi_0(e_n) = 1$ とする。 このとき (T_0, π_0) -group

$\in \underline{H}$ とおくと, $\Sigma_H^\vee = \{ \alpha^\vee \in \Sigma^\vee ; \alpha_0(\alpha^\vee) = 1 \}$. 故に Σ_H^\vee は B_{n-1} 型 ($k=1$), または $D_k \times B_{n-k}$ 型 ($k \geq 2$) のルート系と見らる. 従って $(\underline{H}, \underline{T})$ のルート系は C_{n-1} 型 または $D_k \times C_{n-k}$ 型の quasi-split T_0 群に属する. (一般に quasi-split reductive T_0 代数群 $\underline{G}^*/\mathbb{R}$ に対し, その \mathbb{R} 上定義された Borel 部分群 \underline{B}^* , \underline{B}^* に含まれる \mathbb{R} 上定義された maximal torus \underline{T}^* とおく. Σ^+ で $(\underline{G}^*, \underline{T}^*)$ のルート系の positive system で \underline{B}^* に対応するものをとると, $\sigma = \sigma_{\underline{T}^*}$ は Σ^+ を不変にする. この action を $\sigma_{\underline{G}^*}$ と書くことにすると 今の場合, $\underline{G}^* = \underline{H}$, $\sigma_H = \omega_0^{-1} \cdot \sigma_{T_0}$ (ω_0 は Σ_H^\vee の Weyl 群の最長元) で与えられ, また $X_H^*(\underline{T}) = X_G^*(\underline{T}) = T_0$, とする. 従って B_{n-1} 型のと看做, $H \cong Sp(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{T}$ と見らる.)

このとき, G の n 個の Cartan 部分群と, H の n 個の Cartan 部分群の間に対応がつかうことが重要である. すなわち,

$$\exists \{ [T'_m] ; m=0, 1, \dots, N \} \subset \text{Car}(H)$$

$$\exists \{ [T_m] ; m=0, 1, \dots, N \} \subset \text{Car}(G)$$

$$\exists i_m : T'_m \longrightarrow T_m \quad (m=0, 1, \dots, N) ; \mathbb{R} \text{ 上定義された同型}$$

写像

注1. \underline{G} 自身 quasi-split の場合は $\underline{H} \in \underline{T}^*$ は (\mathbb{C} 上の maximal torus と (7) 含み, $i_m = \text{ad} g^{-1} \circ \text{ad} h$ と同じ形で得られる.

$\mathcal{O}(T_m)$ 上の ± 1 の値をとる写像を定めることがいえる。以下特に誤解を生じないときには α_m ($m=0, \dots, N$) を区別せず, α と書くことにする。

Proposition 1. (Shelstad [5])

G を単連結とする。このとき $(\bigcup_{m=0}^N T_m) \cap G_{\text{reg}}$ 上の関数 $\Delta_H^G(t)$ で次の条件 (**) を満足するものが存在する。

$$(*) \quad \begin{aligned} & \forall f \in \mathcal{C}(G) \text{ に対し } \exists f_H \in \mathcal{C}(H) \text{ s.t.} \\ & \Phi_{f_H}^G(t') = \begin{cases} \Delta_H^G(t) \Phi_f^H(t) & \text{if } i_m(t') = t \in G_{\text{reg}} \\ 0 & \text{if } t' \in H_{\text{reg}} \text{ かつ } t' \text{ が含む } H \\ & \text{の Cartan 部分群が } G \text{ に originate} \\ & \text{しない。} \end{cases} \end{aligned}$$

この $\mathcal{C}(G)$ と $\mathcal{C}(H)$ との対態 (f, f_H) の dual を考えたのが stable tempered IED の持ち上げである。すなわち

定義 H 上の stable tempered IED Θ_H に対し, その G への持ち上げと呼ばれる tempered 超関数, $\text{Lift } \Theta_H$ を次の様に定義する。

$$\forall f \in \mathcal{C}(G) \text{ に対し, } \text{Lift } \Theta_H(f) = \Theta_H(f_H)$$

注. f に対して f_H は一意に定まるわけではなからず, Θ_H が stable であることより, $\text{Lift } \Theta_H$ は f_H のとり方に依らず, well-defined である。更に $\text{Lift } \Theta_H$ は G 上の tempered IED になる。

次に持ち上げと指標等式の関連について述べる。その前に stable tempered IED の例を与えておく。[3]

例 1. 離散系列の場合 (T_0' を compact Cartan 部分群とする。)

$\Lambda \in T_0'$ の unitary character とし, $\lambda \in \mathfrak{a}$ の微分, $\mu = \lambda + \rho$ とおく。(但し, ρ は λ が dominant なる様 \bar{T}_0 ($\underline{H}, \underline{T}_0'$) の \mathfrak{a} -系 (positive system Ψ に関する positive roots の和) の半分の)

$$\chi_\mu = \sum_{w \in W(\underline{H}, T_0') \setminus W(\underline{H}, \underline{T}_0')} \Theta_H(w\mu, w\Psi)$$

とおくと, χ_μ は stable tempered IED になる。但し, $\Theta_H(\mu, \Psi)$ は H の離散系列の指標で, その T_0' 上の形が

$$\Theta_H(\mu, \Psi)(\exp X) = (-1)^{\dim \mathfrak{a}} \left(\sum_{s \in W(\underline{H}, T_0')} \det s \cdot e^{(s\mu - \rho)(X)} \right) / \prod_{\alpha \in \Psi} (1 - e^{-\alpha(X)})$$

となるものである。また $N_H(T_0')$ で H にあける T_0' の normalizer を表わし, $W(\underline{H}, T_0') = N_H(T_0')/T_0'$, $W(\underline{H}, \underline{T}_0') = N_{\underline{H}}(\underline{T}_0')/\underline{T}_0'$ ($\cong (\underline{H}, \underline{T}_0')$ の \mathfrak{a} -系の Weyl 群) とする。

例 2. 線型 reductive algebraic group \underline{H}/\mathbb{R} , $H = \underline{H}(\mathbb{R})$ とし, T はその Cartan 部分群, $\Lambda \in T$ の unitary character とする。 \underline{T} の maximal \mathbb{R} -split subtorus を $\underline{S}(T)$ と書く。

$$\underline{M} = Z_{\underline{G}}(\underline{S}(T)) \quad (\underline{G} : \text{あける } \underline{S}(T) \text{ の centralizer}),$$

$$M = \underline{M}(\mathbb{R}), \quad M \in \text{Levi 部分群に } \mathfrak{m} \supset \text{parabolic 部分群}$$

$P = MN$ とする.

$M^+ := M$ の derived group の単位元を含む連結成分.

$T^+ = T \cap M^+$, (このとき $T = T^+ \cdot Z_M$, Z_M は M の中心)

$\lambda \in \Lambda_{|T^+}$ の微分, $\mu = \lambda + \rho$ (但し ρ は λ の dominant になる様

は (M, Γ) のルート系の positive system に関する positive roots の和の

半分) とおく. Harish-Chandra により示された, μ に対応する M^+

の離散系列表現を $\pi(\lambda, \rho)$, $\pi(\lambda, \rho) = \text{Ind}_{Z_M M^+ T^+} \pi(\lambda, \rho) \otimes \Lambda_{|Z_M}$ とお

くと, 表現

$$\text{Ind}_{P \uparrow H} \left(\sum_{\omega} \pi(\omega\lambda, \omega\rho) \right) \otimes 1_N$$

の指標 χ が H の stable tempered IED にある。 Σ の中の ω は

$W(M, T) \setminus W(M, \Gamma)$ をわたる。

一般に $\varphi = \langle \Lambda \rangle = \{ \Lambda \circ \text{ad } k^{-1}; k \in A(\Gamma) \}$ とおくと, こ

の様にして, φ に対し stable tempered IED $\chi_\varphi = \chi$ が構成でき

る。特に T が compact のときが例 1 の場合にあたる。

更に [5] において Shelstad は Lift $\chi_\varphi \in G$ の既約指標の符号

号つきの和 (同じ "L-packet" に属する既約ユニタリ表現の指標

の符号つきの和) として表わす公式を与えた。特に χ_φ が例 1 の

$$\text{Lift } \chi_\varphi = \varepsilon \cdot \sum_{\omega \in W(G, T_0) \setminus W(G, \Gamma_0)} \pi(\omega\omega^*) \otimes_{\mathbb{H}_G} (\omega\omega^*\mu_\varphi, \omega\psi_\varphi)$$

とき, Lift χ_φ は regular infinitesimal character を持つ。

と表わされる。ただし, $\mu_G - \rho_G$ は T_0 のある unitary character の微分にたがっていて, μ_G は μ 及び ν (T_0, \mathfrak{g}_0)-group の構成より定まる $\sqrt{-1}\mathfrak{t}_0^*$ の元である。(\mathfrak{t}_0 は T_0 の Lie 環, \mathfrak{t}_0^* は その dual.)

(§3 の $G = Sp(n, \mathbb{R})$ の場合は $\mu_G = \mu$ とできる。) また w^* は $w^*\mu_G$ が Ψ_G に関して dominant になる様な $W(G, T_0)$ の元であり, ε は $+1$ または -1 を表わす。

指標等式に関しては, 次の命題が [5] において示された。

Proposition 2. (Shelstad [5])

1°) $\varphi = \langle \Lambda \rangle$, Λ が H のある Cartan 部分群 T' 上の unitary character であって, T' が G に originate したとせば,

$$\text{Lift } \chi_\varphi \equiv 0.$$

2°) $\varphi = \langle \Lambda \rangle$, Λ が T' 上の unitary character で, T' が G に originate するとせば,

a) $\gamma \in T_j \cap G_{\text{reg}}$ ならば

$$\text{Lift } \chi_\varphi(\gamma) = \varepsilon_j \sum_{\substack{m: \\ \underline{t}_m(\gamma) = \gamma}} \sum_{w \in W_0(\underline{G}, \underline{T}_j) / W_0(\underline{H}, \underline{T}_m)} \chi_m(w) \Delta_m^{\text{HIG}}(\gamma^w) \chi_\varphi(\gamma'^w)$$

但し, $W_0(\underline{G}, \underline{T}_j) = \{ w \in W(\underline{G}, \underline{T}_j); w\sigma = \sigma w \}$,

$$\Delta_m^{\text{HIG}}(\gamma) = \eta_m \Delta_H^G \prod_{\alpha \in \Delta(\underline{H}, \underline{T}_m)} |1 - \alpha(\gamma'^{-1})| / \prod_{\alpha \in \Delta(\underline{G}, \underline{T}_j)} |1 - \alpha(\gamma^{-1})|,$$

$\Delta(\underline{G}, \underline{T}_j)$ は $(\underline{G}, \underline{T}_j)$ のル-ト系, $\varepsilon_j, \eta_m = +1$ または -1 .

b) $[T] \in \text{Car}(G)$, T は originate する H の Cartan 部分群が

存在したとせよ

$$\text{Lift } \chi_{\varphi}' \equiv 0 \quad (\text{on } T \cap G_{\text{reg}})$$

注1. §3で扱った $G = \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ のときは, G が split であり,

1° の case は生じない。

注2. 2) の b) については (**) の直接的帰結である。

序において述べた様に, ④の型の指標等式が, この様に

して一定の手続きにより, 多く構成できる (2°のb)の形) こと

がわかる。従って序に掲げた問題の前半は ④の型の指標等式

が上述の方法により得られるもので尽まっているかどうかを

調べることにする。

§3. $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ の指標等式

以後 $G = \text{Sp}(n, \mathbb{C}) = \{ g \in \text{GL}(2n, \mathbb{C}) : {}^t g J g = J \}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$.

$G = \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ とする。 $\text{Car}(G)$ の完全代表系 $\{ T^{k,l} ; k, l \geq 0,$

$k+2l \leq n \}$ を次の様にとることにする。

$$T^{k\theta} = \left[\begin{array}{cc} \begin{array}{l} \cos \varphi_1 \\ \vdots \\ \cos \varphi_k \\ e^{\tau_1 u(\theta_1)} \\ \vdots \\ e^{\tau_2 u(\theta_2)} \\ \varepsilon_1 e^{\tau_1} \\ \vdots \\ \varepsilon_m e^{\tau_m} \end{array} & \begin{array}{l} -\sin \varphi_1 \\ \vdots \\ -\sin \varphi_k \end{array} \\ \begin{array}{l} \sin \varphi_1 \\ \vdots \\ \sin \varphi_k \end{array} & \begin{array}{l} \cos \varphi_1 \\ \vdots \\ \cos \varphi_k \\ e^{-\tau_1 u(\theta_1)} \\ \vdots \\ e^{-\tau_2 u(\theta_2)} \\ \varepsilon_1 e^{-\tau_1} \\ \vdots \\ \varepsilon_m e^{-\tau_m} \end{array} \end{array} \right],$$

但し $m = n - k - 2l, \quad \varphi_1, \dots, \varphi_k, \tau_1, \dots, \tau_2, \theta_1, \dots, \theta_2, t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R},$
 $u(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m = \pm 1$

また対応する Cartan 部分環を $\mathfrak{t}^{k\theta}$ と書く。明らかに $T^{k\theta}$ が G の compact Cartan 部分群であり, $T^{k\theta} (= T^*$ と書く) が G の split Cartan 部分群に属する。

定義 G の Cartan 部分群 T に対して, (T_0, \mathfrak{h}_0) -group H が条件 $(N(T))$ を満たす

$\Leftrightarrow H$ は $[T]$ に originate する Cartan 部分群を含む T_0 である。

(注: G は split 代数群だから, H の Cartan 部分群は G に originate している。)

次に $Sp(n, \mathbb{R})$ に関し, §1 での問題に対する, 現在のところ得られている結果を次の定理の形で述べる。

Theorem. $\Theta \in$ regular infinitesimal character $\in \mathfrak{t}^+$, G 上の tempered IED とする。

1). $T = T^*$ の場合, 次の a) ~ c) は同値である。

a) Θ' は $T \cap G_{\text{reg}}$ 上恒等的に 0 になる。

b) Θ の height $\in [T_1]$, $\omega \in (G, T_1)$ の imaginary Weyl 群 $W_I(G, T_1)$ の最長元とすると,

$$\Theta'(t^\omega) = -\Theta'(t) \quad \forall t \in (T_1) \cap G_{\text{reg}}.$$

c) Θ は $(N(T))$ を満たす (T_0, σ_0) -group H 達の lift X_φ の一次結合として表わせる。

2) $T = T^{k_0}$ の場合も, Θ の height $\in [T^{k_0}]$ のときは, b) を次の b') に代えることにより, a), b'), c) が同値になる。

$$b') \quad \Theta'(t^\omega) = -\Theta'(t), \quad \forall t \in T^{k_0} \cap G_{\text{reg}}.$$

ここで ω としては, $W' = \{ w \in W(G, T^{k_0}) ;$

$w|_{T^{k_0} \cap T_0} \equiv \text{id} \}$ の中で最長元をとる。但し,

T_0 は T^{k_0} の単位元を含む連結成分を表わす。

注. imaginary Weyl 群 $W_I(G, T_1)$ とは (G, T_1) の imaginary

roots に関する reflections に より 生成 される $W(G, T_1)$ の 部分群
 として $M \in p_{10}$ の 様に T_1 に対し 構成 すれば, $W(G, T_1) \cong W(M, T_1)$
 と なる。

証明の概略

1). Step 1. \textcircled{H} a height の compact Cartan 部分群 の 場合に
 だけ 証明 する。

c) \Rightarrow a) Shelstad の 結果 による。

b) \Rightarrow c) 今 の 場合, T_0 は compact Cartan 部分群 T^{no}

と して なる。

$$t_0 = t^{no} = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & -\varphi_1 & \\ \varphi_1 & & & -\varphi_n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R} \right\}$$

に対し $e_j(X) = \sqrt{-1} \varphi_j$ と おく と, $\{\pm e_i, \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n), \pm 2e_i \ (1 \leq i \leq n)\}$ が (\mathfrak{g}, t^{no}) の ルート系 を 与える。

Lemma (T_0, σ_0) -group H が $(N(T^*))$ を 満たす

$\Leftrightarrow \#\{i; \sigma_0(e_i) = -1\}$ が 奇数。

この 様 T_0, σ_0 に対し $\{i; \sigma_0(e_i) = -1\} = \{i_1, \dots, i_k\}$ と おく と,

$$\text{Lift } \chi_\varphi = \varepsilon \sum_{w \in W(G, T_0) \setminus W(G, T_0)} \nu_{i_1} \dots \nu_{i_k} \textcircled{H}_G(w\mu, w\Psi_G) \dots \textcircled{D}$$

とある。但し、この場合 $\mu = \mu_G$ とする。

$$\mu(\exp X) = e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} \varphi_j} \quad (\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0, \lambda_j \in \mathbb{Z})$$

とある $T^{n,0}$ 上の unitary character τ $w\mu = i\tau$

$$w\mu(\exp X) = e^{\sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} \nu_j \varphi_j} \quad (\nu_j = +1 \text{ 又は } -1)$$

が対応してゐるとする。($W(G, T_0) \ni (g, t_0)$ のルート系の Weyl 群

と同一視する。) また $\varepsilon = +1$ 又は -1 の符号。

一方,

$$\Theta = \sum_{w \in W(G, T_0) \setminus W(G, T_0)} c_w \Theta(w\mu, w\psi_G)$$

とおくと、条件 b) 及び n 次の関係式

$$\Theta(w\mu, w\psi_G)(t^n) = \Theta(w\mu, w\psi_G)(t^{-1}) = \Theta(w\mu, w\psi_G)(t)$$

より,

$$c_w = -c_{ww} \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。①と②より $c: w \mapsto c_w$ は $w \mapsto \nu_1, \dots, \nu_n$ と

いう関数の一次結合で表わされることばかり、c) が導かれる。

a) \Rightarrow b) n に関する帰納法による。 $T^* (= T^{0,0})$ 上

$\Theta' \equiv 0$ である、 $T^{0,k} (k=0, \dots, [\frac{n}{2}])$ 上も Θ' は恒等的に 0 になる

ことを示せる。残りの Cartan 部分群 $T^{k,0} (k \geq 1)$ は $Sp(n-1, \mathbb{R})$ の

Cartan 部分群と 1対1 に対応する。すなわち、

$$\hat{G} = \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & & & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & & * & & \vdots & & * & \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & & & & 0 & & & \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{R}) \right\} (\cong Sp(n-1, \mathbb{R}))$$

る。 $\sigma_{M_1} \in M_1$ の離散系列表現, $\chi_A \in A$ の unitary character,

$$\pi = \text{Ind}_{P \uparrow G} \sigma_{M_1} \otimes \chi_A \otimes 1_N$$

と置き, その指標を Θ_π とすると, Θ は同じ infinitesimal character をもつ Θ_π 達の - 次結合として表わされることを

誘導指標の explicit 形式と, Θ の regularity により示し, そして M_1 の離散系列の議論 (従って Step 1 の結果) に帰着させてしよう。

2) も $\text{Sp}(n-k, \mathbb{R})$ 及びその split Cartan 部分群に対する 1) の結果を用いることにより, 証明できる。

文 献

- [1] T. Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real semisimple Lie groups, IV, Explicit forms of the characters of discrete series representations for $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$, Japan.J.Math., New Ser. 3(1977), 1-48.
- [2] R.P.Langlands, Stable conjugacy: definitions and lemmas, Canad. J.Math., 31(1979), 726-785
- [3] D.Shelstad, Characters and inner forms of a quasi-split group over \mathbb{R} , Compositio Math., 39(1979), 11-45.
- [4] D.Shelstad, Orbital integrals and a family of groups attached to a real reductive group, Ann.Sci.Ecole Norm.Sup., 12(1979), 1-31.

- [5] D.Shelstad, L-indistinguishability for real groups, Math.Ann. 259(1982), 385-430.
- [6] S.Mikami, On character identities for $Sp(n, \mathbb{R})$ and the lifting of stable tempered invariant eigendistributions, preprint.