数理解析研究所講究録
570巻 1985年 72-90

半単純Lie群上の定係数不変固有超函数と
Virtual character modules

京大.理　西山　享　(Kyo NISHIYAMA)

§0. Introduction　Gを連結な半単純Lie群で中心有限なものとする。Gの quasi-simple な既約表現を分類する際に重要な役割を果すものの一つに指標があげられる。指標は有限次元表現に対してはその表現行列の Trace をとることによって得られるG上の実解析的な関数となるが，無限次元表現に対してはG上の超函数として Harish-Chandraによって定義された。この指標がGの表現の分類に如何に役立つかは次の事実からわかるであろう。

事実1　Gは compact Lie群とする。この時Gの既約表現は全て有限次元であって，π_1, π_2 をGの2つの有限次元表現とするとき，$\pi_1 \simeq \pi_2$（同値）$\Longleftrightarrow \Theta(\pi_1) = \Theta(\pi_2)$ が成立する。但し $\Theta(\pi)$ はπの指標を表す。従って既約表現の（同値を除く）分類は全て既約指標の計算によって行なわれ得る。更に π の指標 $\Theta(\pi)$ を知れば表現を具体的に再構成でき

る。例えば [Wl], [Wr] 等を参照されたい。

事実2. Gは連結な半単純Lie群で中心有限, KをGの極大compact群とする。今(π, H)をGのHilbert空間H上のquasi-simpleな既約表現と仮定する。この時

$$H_K = \{ v \in H \mid \dim_{\mathbb{C}} \langle \pi(K) v \rangle < \infty \}$$

と置きH_Kの元をK-finite vectorと呼ぶ。するとH_Kの元は全て微分可能であって, $\mathfrak{g}$をGのLie環とすると, $\mathfrak{g}$のH_K上の表現が得られる。明らかにKもH_Kを不変にしているので, H_Kは$(\mathfrak{g}, K)$-加群となる。こうして(π, H)から得られた$(\mathfrak{g}, K)$-加群$(d\pi, H_K)$を(π, H)のHarish-Chandra加群と呼ぶことにする。すると次のことが成立する。

(ア) (π_1, H_1), (π_2, H_2)をGのquasi-simpleな既約表現とし, その"指標"を$\Theta(\pi_1)$, $\Theta(\pi_2)$とする。この時

$$(d\pi_1, (H_1)_K) \simeq (d\pi_2, (H_2)_K) \iff \Theta(\pi_1) = \Theta(\pi_2)$$

が成立する。ここで表現の同値性は純代数的なものである。

(イ) 更にπ_1, π_2がunitary表現の時には,

$$(\pi_1, H_1) \simeq (\pi_2, H_2) \ (\text{unitary同値}) \iff \Theta(\pi_1) = \Theta(\pi_2)$$

が成立する。以上はHarish-Chandraによるものであるが, 例えば [Vo2], [Va] を参照されたい。

実半単純群の指標の性質は1950年代から1960年代にわたって Harish-Chandra ([HC1], [HC2] etc.) によって詳しく調べられたが，その主な性質は"指標が G 上の不変固有超函数である"ということから従う。ところが，実際に指標と不変固有超函数がどれ程違うかという問題は1970年代になって表面化し，まず Hirai [H2] によって，「不変固有超函数で，指標の一次結合に書けないものが存在する」ことが示された。そのあと，Fomin-Shapovalov [FS] によって「指標の和は定係数不変固有超函数である（後で説明する）」ことが示された。ここでは次の定理を報告する。

<u>定理 [N2]</u>　G を連結な半単純 Lie 群で中心有限，acceptable とする。このとき，G 上の既約指標の一次結合全体のなす空間は，定係数不変固有超函数のなす空間と一致する。

§1. <u>指標と不変固有超函数の定義</u>　以下 G を連結な半単純 Lie 群で中心有限，acceptable とする。G が acceptable とは，G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ その複素化を $\mathfrak{g}_c$，$\mathfrak{g}_c$ の Cartan 部分環を $\mathfrak{h}_c$ としたとき，次の二つの条件を満たすような複素半単純 Lie 群 G_c が存在する時に言う。

(1) $G_{\mathbb{C}}$ の Lie 環は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ であって，Lie 群の準同型 $j: G \longrightarrow G_{\mathbb{C}}$ で $dj: \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (canonical injection) となるものが存在する。

(2) $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ に対応する $G_{\mathbb{C}}$ の解析的な部分群を $H_{\mathbb{C}}$ としたとき，$\exp \rho$ （ρ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ の正 root の和の半分）が $H_{\mathbb{C}}$ 上定義されている。

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の展開環を $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$，その中心を $\mathfrak{z}$ と書く。$\mathfrak{z}$ は $\mathbb{C}$ 上の可換代数であって，実は多項式環であることが示される。

(π, E) を G の既約な quasi-simple 表現で Hilbert 空間 E 上実現されているものとする。K を G の極大 compact 部分群，$(d\pi, E_K)$ を §0 で定義した Harish-Chandra 加群とするとき，π が quasi-simple とは次の(ア)(イ)を満たすことである。

(ア) 全ての $z \in \mathfrak{z}$ に対して $d\pi(z)$ は E_K 上 scalar 作用素になる。

(イ) δ を K の任意の既約表現とするとき，δ の E_K における重複度は有限である。

注意 既約 unitary 表現は quasi-simple であることが知られている。又，(イ)は「ある K の既約表現 δ があって，δ の E_K における重複度が（0 ではなくて）有限である」に置き換えてもよい [Sh]。

この時(π, E)の（既約）指標$\Theta(\pi)$を次のように定義する。$\Theta(\pi)$はG上の超函数であって，fをG上のcompactな台をもつ無限階微分可能な函数としたとき，

$$\Theta(\pi)(f) = \mathrm{Trace} \int_G \pi(g) f(g)\, dg$$

となるものである。ここに上式の右辺の積分は意味を持ち，実際E上のtrace classの作用素になることが証明できる。$\Theta(\pi)$は次のような重要な性質を持つ。

<u>補題 1.1</u>　(1)　$\Theta(\pi)$はGの内部自己同型によって不変である。つまり，$g \in G$, $f \in C_0^\infty(G)$に対して，$f^g \in C_0^\infty(G)$を$f^g(x) = f(gxg^{-1})$で定義するとき，$\Theta(\pi)(f^g) = \Theta(\pi)(f)$。

(2)　$\Theta(\pi)$は$\mathfrak{Z}$の同時固有超函数である。つまり$\Theta(\pi)$は次の（超函数の意味での）微分方程式を満たす。

$$z\,\Theta(\pi) = \chi(z)\,\Theta(\pi) \qquad (z \in \mathfrak{Z},\ \chi(z) \in \mathbb{C})$$

<u>定義 1.2</u>　補題1.1の(1)(2)を満たす超函数Θを不変固有超函数（invariant eigendistribution）と呼び，ここではIEDと書く。又，(2)のχをΘの固有値（infinitesimal character）と呼ぶ。χは$\mathfrak{Z}$から$\mathbb{C}$への環準同型である。

上のことから指標はIEDである。IEDの性質はHarish-Chandraによって詳しく調べられ，Hirai [H3,4]によって完全に決定された。その最も重要な性質の一つは次の補題である。

補題1.3　IED Θ は G 上局所可積分な函数と同一視できる。更に G' を G の正則元全体からなる稠密な開集合とすると，Θ は G' 上実解析的である。

§2. 定係数不変固有超函数　G のCartan部分群の共役類全体を $Car(G)$ と書き，$[H]\in Car(G)$ をCartan部分群 H の共役類とする。上の補題から，IED Θ は G' 上での値を決めれば決まるが，$G'\subset\bigcup_{[H]\in Car(G)}\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$ なので Θ の不変性を考えれば，Θ は全ての $[H]\in Car(G)$ 上での値がわかれば決定できる。一般に $\#Car(G)$ は有限であって $Car(G)$ の構造は"良く"わかっている（[Su]参照）。

以下Cartan部分群 H をしばらくの間固定して考える。$\mathfrak{h}$ を H のLie環，$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ をその複素化とし，Δ で $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ のroot系を表わす。$W=W(\Delta)$ を Δ のWeyl群とし，Δ には適当な順序を入れ，正の元全体を Δ^+ と書く。

補題2.1　$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の中心 $\mathfrak{Z}$ と $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W$（$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の展開環の元で

W- 不変なもの全体）は $\mathbb{C}$ 上の代数として同型である。特に $\mathfrak{z}$ は $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ 個の不定元から生成される多項式環である。

上の同型をもう少し詳しく与えよう。$\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{n}^+$ と $\mathfrak{n}^-$ を

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \quad , \quad \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$ （$\mathfrak{g}_\alpha$ は α の root 空間）

で定義する。$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}^-$（直和）である。すると，Poincaré-Birkhoff-Witt の定理により，

$$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \oplus (\mathfrak{n}^+ U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) + U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{n}^-)$$ （直和）

がわかる。$p : U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ を上の分解による射影とする。更に $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \simeq S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$（$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の対称線型環）であるから，$U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ の元を $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$（$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の双対空間）上の多項式関数と思う。この時 $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ に対して $\Gamma_\lambda : U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ を

$$(\Gamma_\lambda f)(\mu) = f(\mu - \lambda) \quad (f \in U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \simeq S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}))$$

で定めることにする。すると，

$$\Gamma_\rho \circ (p|_{\mathfrak{z}}) : \mathfrak{z} \xrightarrow{\sim} U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W \quad \left(\text{但し } \rho = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \frac{\alpha}{2}\right)$$

が $\mathfrak{z}$ と $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W$ の同型を与える。$\Gamma_\rho \circ (p|_{\mathfrak{z}})$ を Harish-Chandra map と呼ぶことがある（例えば [Hum] を参照）。$U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W$ が多項式環になることは [B] を参照されたい。

IED Ⓗの H 上での形がどうなるかを見てみよう。Ⓗの固有値を χ とすると，$\chi \in Hom_{alg}(\mathfrak{z}, \mathbb{C})$ である。一方補題 2.1 から，

$$Hom_{alg}(\mathfrak{z}, \mathbb{C}) \simeq Hom_{alg}(U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*/W$$

であるから，χ に対して $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ の元 λ が（Weyl 群の作用を除いて）決まる。そこでこのことを $\chi = \chi_\lambda$ と書いて表わすことにする。さて，Ⓗは次の微分方程式の解であった。

$$z\,Ⓗ = \chi_\lambda(z)\,Ⓗ \qquad (z \in \mathfrak{z})$$

上の方程式は $\mathfrak{z}$ が多項式環であることから実質上 rank $\mathfrak{g}$ = $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ 個だけしかないことに注意しておく。この方程式を H 上で考えるとどうなるであろうか？これは Harish-Chandra によって与えられている。H 上の関数 D を，

$$D(h) = \exp\rho(h) \cdot \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - \exp(-\alpha)(h))$$

で定義してこれを Weyl の分母（Weyl denominator）と呼ぶ。D は Δ^+ の選び方に任意性があるため一意には確定しないが，実は符号を除いて Δ^+ によらないことが示される。

<u>補題 2.2</u>　$D \cdot Ⓗ|_H$ は $U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W$ の固有値 λ の同時固有函数である。つまり次の微分方程式を満たす。

$$x(D\cdot\Theta|_H) = \lambda(x)(D\cdot\Theta|_H) \quad (x\in U(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W)$$

Hの連結成分はtorusと実直線のいくつかの直積であることに注意すると，補題2.2の方程式はかなり容易になり，その解は次のように書けることがわかる。

(*) $$D\cdot\Theta|_H(h\exp x) = \sum_{s\in W} a_s(h;x)\exp s\lambda(x)$$

$$(h\in H' = G'\cap H \ ,\ x\in\mathfrak{h}\ \text{；十分小})$$

ここに$a_s(h;x)$はxの多項式関数である。DはH'上でゼロにならないことを考えると上の式はΘのH'上での形を与えている。

[注意] xの多項式$a_s(h;x)$の次数は次のように評価される。$W_\lambda=\{w\in W \mid w\lambda=\lambda\}$を$\lambda$の固定部分群としたとき，

$$\text{degree}\ a_s(h;x) \leqq \#W_\lambda - 1 \quad 。$$

特に$W_\lambda=\{e\}$の時，つまりλがregularの時には$a_s(h;x)$はxによらない定数である。

<u>定義2.3</u>　IED Θが定係数(of constant coefficients)であるとは，任意のCartan部分群上でΘを(*)式のように書いたときに全ての$a_s(h;x)$がxによらない定数になることを言う。

§3. 指標とIEDの既知の関係　固有値 $\chi \in Hom_{alg}(\mathfrak{Z}, \mathbb{C})$ を一つ固定して，

$\mathfrak{A}(\chi)=$（固有値 χ の IED 全体）

$\mathfrak{A}'(\chi)=$（固有値 χ の定係数IED全体）

$V(\chi)=$（固有値 χ の virtual character 全体）

とおく。ここで virtual character とは既約指標の $\mathbb{C}$ 上の一次結合を指すものとする。§1で述べたことから $\mathfrak{A}'(\chi)\subset\mathfrak{A}(\chi)$, $V(\chi)\subset\mathfrak{A}(\chi)$ であって，$\chi=\chi_\lambda$ とするとき，λ が regular なら $\mathfrak{A}(\chi_\lambda)=\mathfrak{A}'(\chi_\lambda)$ であることがわかっている。

命題 3.1 [H2].　λ が singular のとき一般には $V(\chi_\lambda)\subsetneq\mathfrak{A}(\chi_\lambda)$ である。一層強く，$\mathfrak{A}(\chi_\lambda)$ の tempered なえで $V(\chi_\lambda)$ に含まれないものが存在する。

この命題により，λ が regular の時はどうなのか，一般に $\mathfrak{A}'(\chi)$ と $V(\chi)$ の関係はどうなのかという問題が起ってくる。Fomin-Shapovalov は次の結果を与えている。

命題 3.2 [FS].　一般に $V(\chi)\subset\mathfrak{A}'(\chi)$ である。つまり，virtual character は定係数IEDである。

Hirai [H4]は更に一歩押し進めて"$V(\chi)=\mathfrak{A}'(\chi)$"であろうという予想を提出している。

§4 <u>主定理</u>　Hiraiの予想は実は肯定的に解決される。これがこの報告の主結果である。

<u>定理4.1</u>　Gが連結な半単純Lie群で中心有限，acceptableとする。その時固有値χのvirtual character全体の空間と固有値χの定係数IEDの空間は等しい。つまり$\mathfrak{A}'(\chi)=V(\chi)$が成り立つ。

これを示すにはFomin-Shapovalovの結果を考慮して，全ての定係数IEDが指標の一次結合になることを示せば十分である。それについて触れる前に少し準備をする。

PをGの放物的部分群とする。Pが放物的部分群(parabolic subgroup)であるとは，PのLie環の複素化$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$が$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$のBorel部分環を含み，かつPが$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$の正規化群に一致する時を言う。NをPの巾単根基(unipotent radical)とし，$P=LN$をLevi分解とする。Lから実数$\mathbb{R}$への連続な準同型全体を$X(L)$と書くとき，M，Aを次のように定義する。

$$M=\bigcap_{\mu\in X(L)}\mathrm{Ker}\,|\mu|\ ,\quad A=\begin{pmatrix}\text{Lの中心に含まれる極大split}\\ \text{可換部分群}\end{pmatrix}$$

すると $L=MA$ は群の直積であって，$P=MAN$ を P の Langlands 分解と呼ぶ（[Wr]参照）。

放物的部分群 P が cuspidal であるとは，M が compact な Cartan 部分群を持つ時に言う。今 P を cuspidal であるとする。すると M_0（M の単位元の連結成分）はやはり compact な Cartan部分群を持つ reductive な Lie 群であるから，Harish-Chandra [HC3] により離散系列の表現をもつ。この M_0 の離散系列表現を M に誘導してそれを分解することにより，M の離散系列表現が得られる（詳しくは [Li] 又は [KZ] を参照）。そこで σ を M の離散系列表現又はその極限とし，$\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$（$A$ の Lie 環 $\mathfrak{a}$ の複素双対）とする。

<u>定義4.2</u>　一般化された主系列（generalized principal series）の表現とは，

$$\pi(\sigma,\nu) = \mathrm{Ind}_P^G(\sigma\otimes e^\nu\otimes 1_N)$$

のことである。特に P が極小放物的部分群の時に単に主系列表現と呼ぶ。

ここでは一般化された主系列のことを g-主系列と書くことにする。さて主題に戻ろう。次の命題が成立する。

<u>命題4.3</u>　定係数IEDは$\mathfrak{g}$-主系列表現の指標の一次結合に書ける。

これにより定理は明らかである。更に上の命題を証明する過程で次のこともわかる。

<u>命題4.4</u>　Gが複素Lie群のとき，定係数IEDは主系列表現の指標の一次結合に書ける。

この命題4.4は良く知られている（[FS]参照）．

§5　<u>証明の方針</u>　この§では命題4.3の証明について述べる。まず少し準備をする。

$Car(G)$に次のようにして順序を入れる。まず$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$を$\mathfrak{g}$のCartan部分環とした時，$\mathfrak{a}$の実root αによるCayley変換ν_αに対して$\nu_\alpha(\mathfrak{a})=\mathfrak{b}$となっている時に$\mathfrak{a}\longrightarrow\mathfrak{b}$と書く。この時$\mathfrak{a}$のtoroidalな部分の次元は$\mathfrak{b}$のそれより小さくなっている。さて，$[H_1]$，$[H_2]\in Car(G)$に対して$[H_1]<[H_2]$とは，適当な代表元$H_1\in[H_1]$，$H_2\in[H_2]$がとれて，そのLie環を夫々$\mathfrak{h}_1$，$\mathfrak{h}_2$とすると，$\mathfrak{g}$のCartan部分環$\mathfrak{b}_0,\mathfrak{b}_1,\cdots,\mathfrak{b}_m$があって，$\mathfrak{b}_0=\mathfrak{h}_1$，$\mathfrak{b}_m=\mathfrak{h}_2$かつ$\mathfrak{b}_0\rightarrow\mathfrak{b}_1\rightarrow\cdots\rightarrow\mathfrak{b}_m$となってい

る時に言う（詳しくは[H3]，[Su]を参照）。

例　Sp(3, ℝ) の Cartan 部分群達の順序　$G=Sp(3,\mathbb{R})$ の時には $\#Car(G)=6$ であって，それ等の代表元は次のように書けている。

$$H^{k,l}=\left\{\left(\begin{array}{ccc|ccc} e(\varphi) & & & 0 & & \\ & ech(\theta,\tau) & & & esh(\theta,\tau) & \\ & & \varepsilon ch(\varepsilon,t) & & & \varepsilon sh(\varepsilon,t) \\ \hline 0 & & & e(-\varphi) & & \\ & esh(-\theta,\tau) & & & ech(-\theta,\tau) & \\ & & \varepsilon sh(\varepsilon,t) & & & \varepsilon ch(\varepsilon,t) \end{array}\right)\right\}$$

但し，$k+2l\leqq 3$ であって，$e(\varphi)$：$k\times k$ 行列，$ech(\theta,\tau)$，$esh(\theta,\tau)$：$2l\times 2l$ 行列，$\varepsilon ch(\varepsilon,t)$，$\varepsilon sh(\varepsilon,t)$：$m\times m$ 行列（$m=3-k-2l$）は次の如く与えられるものである。

$$\begin{cases} e(\varphi)=diag(e^{i\varphi_1},\ \cdots,\ e^{i\varphi_k}) \\ ech(\theta,\tau)=diag\left(\begin{pmatrix} e^{i\theta_1}ch\tau_1 & \\ & e^{-i\theta_1}ch\tau_1\end{pmatrix},\ \cdots\ ,\begin{pmatrix} e^{i\theta_l}ch\tau_l & \\ & e^{-i\theta_l}ch\tau_l\end{pmatrix}\right) \\ esh(\theta,\tau)=diag\left(\begin{pmatrix} & e^{i\theta_1}sh\tau_1 \\ e^{-i\theta_1}sh\tau_1 & \end{pmatrix},\ \cdots\ ,\begin{pmatrix} & e^{i\theta_l}sh\tau_l \\ e^{-i\theta_l}sh\tau_l & \end{pmatrix}\right) \\ \varepsilon ch(\varepsilon,t)=diag(\varepsilon_1 ch t_1,\ \cdots,\ \varepsilon_m ch t_m) \\ \varepsilon sh(\varepsilon,t)=diag(\varepsilon_1 sh t_1,\ \cdots,\ \varepsilon_m sh t_m) \\ \qquad (\varphi,\theta,\tau,t：\text{実数},\ \varepsilon=\pm 1) \end{cases}$$

この時 $Car(G)$ の順序を図示すると次のようになる([H5])。

$$\begin{tikzcd}
 & H^{1,0} \arrow[r] \arrow[dr] & H^{2,0} \arrow[dr] & \\
H^{0,0} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & H^{3,0} \\
 & H^{0,1} \arrow[r] \arrow[uur] & H^{1,1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

小 $\Longleftarrow$ $\Longrightarrow$ 大

$H^{3,0}$: compact Cartan 部分群
$H^{0,0}$: split Cartan 部分群
($\longrightarrow$ は Cayley 変換を表す)

<u>定義5.1</u> Θ を G 上の IED とするとき Θ の台(support)を次のように定義する。

$$Supp(\Theta) = \{ [H] \in Car(G) \mid \Theta|_H \neq 0 \}$$

$Supp(\Theta)$ の極大元を Θ の高さ(height)と呼び, Θ が唯一つの高さを持つとき Θ を extremal と呼ぶ。

<u>補題5.2</u> 全ての IED は extremal な IED 達の一次結合で書ける。

上の補題5.2を考慮に入れれば, 命題4.3の証明において定係数 IED Θ は extremal としてよい。そこで $[H]$ を Θ の高さとするとき次の補題が成立する。

<u>補題5.3</u> Θ を高さ $[H]$ の extremal な定係数 IED とする。この時, Cartan 部分群 H から標準的に cuspidal な放物的部分

群Pが作れて，$P=MAN$をそのLanglands分解とすると，$\{\sigma_i\}$：Mの離散系列の表現達（又はその極限），$\{\nu_i\}$；$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$の元達と適当な定数$\{c_i\}$が存在してH上で次の等式を満たす。

$$\Big[\Theta-\sum_i c_i\,\Theta(\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_i\otimes e^{\nu_i}\otimes 1_N))\Big]\Big|_H=0$$

<u>証明の概略</u>　まず[H1]或いは[Li]によって，$\pi(\sigma_i,\nu_i)=\mathrm{Ind}_P^G(\sigma_i\otimes e^{\nu_i}\otimes 1_N)$の指標がH上では良くわかっていることに注意する。一方定係数IEDは[H3,4]によって完全に決定されているのでそのH上での値が具体的にわかる。あとは如何にしてc_i達を選ぶかに尽きるが，それには有限群の指標についての論議がうまく使えることがわかる。

上の補題5.3と主系列の指標$\Theta(\pi(\sigma_i,\nu_i))$がextremalな定係数IEDで，そのheightが[H]であることを使うと，命題4.3が帰納的に証明できることはほぼ明らかであろう。

§6　<u>表現の分類について</u>　Lie群の表現論の主な目的は既約表現の分類と，それをもとにした群上の調和解析ということになると思う。半単純Lie群の表現論においてはこのうち表現の分類の方が近年非常な進歩を見せ，単に分類するというだけであればほとんどその理論は完成したようにさえ見

える。例えばLanglandsの方法による分類[La]或いはprimitive idealのJantzen, Joseph, Dixmier等による分類[Ja, Jo, D]等がそれである。しかし一方でそれ等の分類はまだその上の調和解析を行う程には整備されていない，或いはそれに適していないようにも思えるし，又unitary表現を完全に決定するまでには至っていない。

一方で表現を完全に決定してしまわずに，大きくいくつかのグループに分けて考えようという試みもある。例えば，Voganの提唱するところのBlock equivalence [Vo 3]，King達の言うところのcharacter polynomial [Ki]による分類等がそれに当ると思う。Gelfand-Kirillov次元なども大きな役割を持ちそうに思われる[Vo 1]。

筆者も上のような広い意味での分類をWeyl群の表現を使ってできないかと思い，[N1]ではvirtual character達の上へのWeyl群の作用を定義し，実際にその表現を分解して見せた。ここに報告した結果はその研究の過程で自然に起ってきた問題である。

References

[D] J.Dixmier, Enveloping algebras, North-Holland Publ. Comp., 1977.

[FS] A.I.Fomin and N.N.Shapovalov, A property of the characters of real semisimple Lie groups, Funct. Anal. and Appl., 8 (1974), 270-271.

[HC1] Harish-Chandra, The characters of semisimple Lie groups, Trans. AMS, 83(1956), 98-163.

[HC2] Harish-Chandra, Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, Trans.AMS, 119(1965), 457-508.

[HC3] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups II, Acta Math., 116(1966), 1-111.

[H1] T.Hirai, The characters of some induced representations of semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ., 8(1968), 313-363.

[H2] T.Hirai, Some remarks on invariant eigendistributions on semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ., 12(1972), 393-411.

[H3] T.Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, II. General theory for semisimple Lie groups, Japan. J. Math., 2(1976), 27-89.

[H4] T.Hirai, ————, III. Methods for construction for semisimple Lie groups, ibid., 2(1976), 269-341.

[H5] T.Hirai, ————, IV. Explicit forms of characters of discrete series representations for $Sp(n,\mathbb{R})$, Japan. J. Math., 3(1977), 1-48.

[Hum] J.E.Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972.

[Ja] C.Jantzen, Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Jo] A.Joseph, Goldie rank in the enveloping algebra of a semisimple Lie algebra I, II, J. Algebra, 65(1980), 269-283,284-306.

[Ki] D.R.King, The character polynomial of the annihilator of an irreducible Harish Chandra module, Amer. J. Math., 103 (1981), 1195-1240.

[KZ] A.W.Knapp and G.Zuckerman, Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups I,II., Ann. Math., 116(1982), 389-455,456-501.

[La] R.Langlands, On the classification of irreducible representations of real algebraic groups, mimeographed notes, Institute for Advanced Study, 1973.

[Li] R.L.Lipsman, On the characters and equivalence of continuous series representations, J. Math. Soc. Japan, 23(1971), 452-480.

[N1] K.Nishiyama, Virtual character module of semisimple Lie groups and representations of Weyl groups, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[N2] K.Nishiyama, Virtual characters and constant coefficient invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, preprint, 1985.

[Sh] H.Shin'ya, Spherical functions on locally compact groups, J. Math. Kyoto Univ., 12-1(1972), 55-85.

[Su] M.Sugiura, Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, 11(1959), 374-434.

[Va] V.S.Varadarajan, Infinitesimal theory of representations of semisimple Lie groups, in Harmonic analysis and representations of semisimple Lie groups, edited by Wolf et al., Reidel, 1980.

[Vo1] D.A.Vogan, Gelfand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules, Inv. Math., 48(1978), 75-98.

[Vo2] D.A.Vogan, Representations of real reductive Lie groups, Birkhäuser, 1981.

[Vo3] D.A.Vogan, Irreducible characters of semisimple Lie groups IV, Character multiplicity duality, Duke Math. J., 49(1982), 943-1073.

[Wl] N.Wallach, Harmonic analysis on homogeneous spaces, Marcel Dekker, 1973.

[Wr] G.Warner, Harmonic analysis on semisimple Lie groups I,II, Springer-Verlag, 1972.