数理解析研究所講究録
570巻 1985年 34-56

或る種の対称対に於ける巾零軌道の閉包について

東北大理　太田琢也 (Takuya Ohta)

§0 序

Kraft, Procesi は古典型Lie環の巾零軌道の閉包の特異点に於ける smoothly equivalence class をより次元の低いLie環の言葉で記述する方法を考案し、これを用いて閉包の極小退化に於ける特異点が或るアフィン代数多様体の孤立特異点に smoothly equivalent になることを指摘した。[3][4] また彼らはA型Lie環の巾零軌道の閉包が正規であることを証明し、[2] B, C, D型Lie環の巾零軌道の閉包が正規になるための十分条件を与えた。[4] この理論を対称対 $(\mathfrak{gl}(n.\mathbb{C}), \mathfrak{o}(n.\mathbb{C}))$, $(\mathfrak{gl}(2l,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(l.\mathbb{C}))$ に用いて類似の結果を得たので本稿ではこれについて解説する。尚、対称対 (symmetric pair) という言葉は関口[7]ではLie環が単純である場合にのみ用いられているが、本稿ではLie環が reductive である場合まで許すことにする。本稿の $(\mathfrak{gl}(n.\mathbb{C}), \mathfrak{o}(n.\mathbb{C}))$ $(\mathfrak{gl}(2l.\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(l.\mathbb{C}))$ についての結果はそのまま対称対 $(\mathfrak{sl}(n.\mathbb{C}), \mathfrak{o}(n.\mathbb{C}))$

$(\mathfrak{sl}(2\ell,\mathbb{C}),\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C}))$についても成立することに注意しておく。

§1. 巾零軌道の分類とその closure relation

定義　Vを$\mathbb{C}$上の有限次元ベクトル空間とする。Vには非退化なε形式$(\ ,\ )$が与えられているとする。$(\varepsilon=\pm1)$ このときVを$(\ ,\ )$と対にして，ε型quadratic spaceと呼ぶ。ここにε形式とは$(u,v)=\varepsilon(v,u)$ $({}^\forall u,v\in V)$を満す双線形形式のことである。▨

U,Vをε型quadratic spaceとし，$L(V,U):=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,U)$と書く。$X\in L(V,U)$に対して，$X^*\in L(U,V)$を

$$(Xv,u)_U=(v,X^*u)_V \quad ({}^\forall v\in V,\ {}^\forall u\in U)$$

により定める。$U=V$のときには$X\longmapsto -X^*$はLie環$\mathfrak{gl}(V)$のinvolutionとなる。

$$\mathfrak{g}(V):=\{X\in\mathfrak{gl}(V)\mid -X^*=X\},\quad \mathfrak{p}(V):=\{X\in\mathfrak{gl}(V)\mid X^*=X\},$$

$$G(V):=\{g\in GL(V)\mid g^*=g^{-1}\}$$

とする。$n:=\dim V$ $(\varepsilon=-1$のとき$n=2\ell)$とすると

$$(\mathfrak{gl}(V),\mathfrak{g}(V))\cong(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{o}(n,\mathbb{C}))\quad(\varepsilon=1)$$

$$(\mathfrak{gl}(V),\mathfrak{g}(V))\cong(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C}))\quad(\varepsilon=-1)$$

また関口[7]に於けるK_θは$Ad(G(V))$に一致する。よって以

後，対称対$(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{o}(n,\mathbb{C}))$，$(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}),\mathfrak{sp}(l,\mathbb{C}))$を考える換りに対称対$(\mathfrak{gl}(V),\mathfrak{g}(V))$（とその巾零$G(V)$軌道）を考えることにする。

nの分割の全体を$P(n)$で表す。この元をヤング図形と同一視する。$\eta\in P(n)$に対応する巾零$GL(V)$軌道をC_ηで表し，

$$C_{\varepsilon,\eta}:=\mathfrak{s}(V)\cap C_\eta$$

とする。

<u>定義</u> $P_\varepsilon(n):=\begin{cases}P(n) & (\varepsilon=1)\\ P(l)^2=\{(a_1,a_1,a_2,a_2,\cdots)\in P(n)\} & (\varepsilon=-1)\end{cases}$

として，$P_\varepsilon(n)$の元をε図形と呼ぶことにする。

<u>命題.1</u> $\eta\in P(n)$に対して

$$C_{\varepsilon,\eta}\neq\phi \iff \eta\in P_\varepsilon(n)$$

が成り立つ。また$C_{\varepsilon,\eta}$は1つの$G(V)$軌道を成す。従って$\mathfrak{s}(V)$の巾零$G(V)$軌道は$P_\varepsilon(n)$で分類される。（関口.[7]） ■

$P(n)$に次の様な半順序を入れる。

<u>定義</u> $\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots)\in P(n)$について

$$\eta\geq\sigma \overset{\text{定義}}{\iff} \sum_{i=1}^{j}\eta_i \geqslant \sum_{i=1}^{j}\sigma_i \quad ({}^\forall j\geqslant 1)$$

<u>注意.1</u> $\eta\in P(n)$の第i列の長さを$\hat{\eta}_i$と書くとき

$$\eta\geq\sigma \iff \sum_{i\geq j}\hat{\eta}_i \geqslant \sum_{i\geq j}\hat{\sigma}_i \quad ({}^\forall j\geqslant 1) \quad [3]$$ ■

<u>命題.2</u> $\eta, \sigma \in P_\varepsilon(n)$ に対して

$$\overline{C_{\varepsilon,\eta}} \supset C_{\varepsilon,\sigma} \Longleftrightarrow \eta \geqq \sigma$$

が成り立つ。ここに位相はZariski位相である。($\varepsilon=-1$, 関口[7]) $\boxtimes$

この証明は略す。

§2. $\mathfrak{g}(V)$の巾零$G(V)$軌道の閉包に於けるsmoothly equivalence class.

<u>2.1</u> Smoothly equivalence class

代数多様体Xとその点xを対にした(X, x)を点付き多様体と呼ぶ。点付き多様体の全体に次の様な関係を定める。

<u>定義</u> (X, x), (Y, y)を点付き多様体とする。(X, x)が(Y, y)にsmoothly equivalentであるとは、点付き多様体(Z, z)とzでsmoothな射

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle \psi}\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

で $\varphi(z)=x$, $\psi(z)=y$ となるものが存在することをいう。$\boxtimes$

<u>注意2</u> (i) 上の定義は点付き多様体の全体に同値関係を定める。(X, x)の同値類を $\mathrm{Sing}(X, x)$で表す。Xに代数群Gが作用しているとき、G軌道$\mathcal{O}$の2つの元x, x'について $\mathrm{Sing}(X, x) = \mathrm{Sing}(X, x')$であるから、この同値類を $\mathrm{Sing}(X, \mathcal{O})$で表す。

(ii) (X, x), (Y, y) を $\mathbb{C}$ 上の点付き多様体とする。このとき "$\mathrm{Sing}(X, x) = \mathrm{Sing}(Y, y)$ かつ $\dim_x X = \dim_y Y + r$ であることは次のことと同値である。"解析空間 X の x に於ける或る近傍と解析空間 $Y \times \mathbb{C}^r$ に於ける $(y, 0)$ の或る近傍は biholomorphic になる。" ここに $\dim_x X$ は X の x での次元，r は非負整数とする。[4]

(iii) $\mathrm{Sing}(X, x) = \mathrm{Sing}(Y, y)$ のとき，次の X の x に於ける性質は同じ性質を $y \in Y$ に引き起こす。: smoothness，正規性 Cohen-Maculay の性質. [4]. ▨

次の定理がこの節の主定理である。

<u>定理</u>　ε 退化 $\sigma \leqq \eta$ (σ, η は ε 図形) は ε 退化 $\sigma' \leqq \eta'$ に左上から同じ行と列を加えることにより得られるものとする。このとき

$$\mathrm{Sing}(\overline{C_{\varepsilon,\eta}}, C_{\varepsilon,\sigma}) = \mathrm{Sing}(\overline{C_{\varepsilon,\eta'}}, C_{\varepsilon,\sigma'})$$

である。 ▨

以下この定理の証明の概要を解説する。

<u>2.2</u>　列の除去

U, V を ε 型 quadratic space とする。U と V の ε 形式を区別するために，$(\ ,\ )_U$，$(\ ,\ )_V$ と記す。$X \in L(V, U)$ に対して $XX^* \in \mathfrak{F}(U)$，$X^*X \in \mathfrak{F}(V)$ が容易に判る。よって2つの射

$$
\begin{tikzcd}
L(V,U) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathfrak{P}(U) \\
\mathfrak{P}(V) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
\pi(X) &= XX^* \\
\rho(X) &= X^*X \quad (X \in L(V,U))
\end{aligned}
$$

が定義できる。$X \in L(V,U)$, $(g,h) \in G(U)\times G(V)$ に対し

$$(g,h).X := gXh^{-1}$$

とすることにより $G(U)\times G(V)$ は $L(V,U)$ に作用する。また $G(U)\times G(V)$ は一方の群の作用を自明にすることにより $\mathfrak{P}(V)$ $\mathfrak{P}(U)$ に作用する。π, ρ が $G(U)\times G(V)$ 同変写像であることが容易に判る。

<u>定義</u>　G を reductive な代数群, X, Y をアフィン代数多様体とし X には G が作用しているとする。射 $\varphi : X \to Y$ が G による商写像であるとは

$$\varphi^* : \mathbb{C}[Y] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$$

が成り立つことをいう。ここに $\mathbb{C}[X]^G$ は G で不変な $\mathbb{C}[X]$ の元の全体を表す。 □

<u>注意3</u> (i). $X_1 \subset X$ が G 不変な閉集合ならば, $\varphi(X_1)$ は Y の閉集合である。また $\varphi|_{X_1} : X_1 \to \varphi(X_1)$ は G による商写像である。
[6]

(ii) X が正規多様体ならば Y もそうである。

定理.1　$m=\dim U$, $n=\dim V$, $m\leqq n$ とする。このとき π は全射で，さらに $G(V)$ による商写像である。また

$$\rho(L(V.U))=\{X\in \mathfrak{Z}(V) \mid \operatorname{rank} X\leqq m\}$$

であり　$\rho: L(V.U)\to\rho(L(V.U))$ は $G(U)$ による商写像である。

証明）$\pi.\rho$ の像についての主張は行列の計算により確められる。また $\pi.\rho$ が商写像であることは[1] Theorem 5.6(i) 及び Theorem 6.6 より判る。　q.e.d

以下 $D\in C_{\varepsilon.\eta}(\subset \mathfrak{Z}(V)$, η は ε 図形) を1つとって固定する。$U:=\operatorname{Im}D$ とする。U 上の双線形形式 $(\ ,\ )_U$ を

$$(Du, Dv)_U:=(u.Dv)_V \quad (u.v\in V)$$

により定義することができて，$(\ ,\ )_U$ は非退化な ε 形式となる。よって U は ε 型 quadratic space である。

$$X^0:=D: V\to U\in L(V.U)$$

とし，

$$I: U\hookrightarrow V\in L(U.V)$$

を包含写像とする。$v.u\in V$ に対して

$$(v,(X^0)^*(Du))_V=(X^0v, Du)_U=(Dv.Du)_U=(u.Dv)_V$$
$$=(v.I(Du))_V$$

であるから　$(X^0)^*=I$　である。従って

$D = IX^\circ = (X^\circ)^* X^\circ$, $D' := D|U = X^\circ I = X^\circ (X^\circ)^* \in \mathfrak{g}(U)$

D'のヤング図形η'はηから第1列を除くことにより得られるε図形だから $D' = X^\circ (X^\circ)^* \in C_{\varepsilon, \eta'}$ である。

この状況のもとに前の2つの写像π, ρ を考える。

$L'(V, U) := \{X \in L(V, U) \mid X$は全射$\}$, $\dim V = n$, $\dim U = m$ とする。

<u>補題1</u> $Y \in L'(V, U)$ とする。Yの$G(U)$に於ける固定化群$G(U)_Y$は自明である。また $\rho^{-1}(\rho(Y))$ は1つの$G(U)$軌道を成す。

証明) 前半は明らか。$Z \in \rho^{-1}(\rho(Y))$とする。Yは全射よりY^*は単射である。故に

$$\mathrm{rank}\, Z^* Z = \mathrm{rank}\, Y^* Y = \mathrm{rank}\, Y = m$$

よって $\mathrm{rank}\, Z = \mathrm{rank}\, Z^* = m$, Zは全射, Z^*は単射である。

$$\mathrm{Ker}\, Z = \mathrm{Ker}(Z^* Z) = \mathrm{Ker}(Y^* Y) = \mathrm{Ker}\, Y$$

より $GL(U)$の元gで, $gZ = Y$となるものが存在する。

$$Z^* Z = Y^* Y = Z^* g^* g Z$$

Zが全射, Z^*が単射より $g^* g = 1$. よって $g \in G(U)$ q.e.d

<u>補題2</u> σを$\sigma \leqq \eta$かつ$\hat{\sigma}_1 = \hat{\eta}_1$なる$\varepsilon$図形とし, $\sigma' \eta'$ をそれぞれσ, ηから第1列を除くことにより得られるε図形とする。

$N_{\varepsilon.\eta} := \pi^{-1}(\overline{C_{\varepsilon.\eta'}})$

とするとき次のことが成り立つ。 $\left(\begin{array}{ccc} L(V.U) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{g}(U) \supset C_{\varepsilon.\eta'} \\ \downarrow & & \\ \mathfrak{g}(V) \supset C_{\varepsilon.\eta} & & \end{array}\right)$

(i) $\rho(N_{\varepsilon.\eta}) = \overline{C_{\varepsilon.\eta}}$

(ii) $\rho^{-1}(C_{\varepsilon.\sigma})$ は $N_{\varepsilon.\eta} \cap L'(V.U)$ に含まれる1つの $G(U)\times G(V)$ 軌道を成す。

(iii) $\pi(\rho^{-1}(C_{\varepsilon.\sigma})) = C_{\varepsilon.\sigma'}$

証明). (i) $\rho(X^0) = (X^0)^* X^0 = D \in C_{\varepsilon.\eta}$ $\pi(X^0) = X^0(X^0)^* \in C_{\varepsilon.\eta'}$ であったから $\rho(N_{\varepsilon.\eta}) \supset C_{\varepsilon.\eta}$ 。$N_{\varepsilon.\eta}$ は $G(U)$ 不変かつ閉, ρ は $G(U)$ による商写像より $\rho(N_{\varepsilon.\eta})$ は閉である。(注意3(i))

従って $\rho(N_{\varepsilon.\eta}) \supset \overline{C_{\varepsilon.\eta}}$.

逆に $Y \in N_{\varepsilon.\eta}$ に対して $\pi(Y) = YY^* \in \overline{C_{\varepsilon.\eta'}}$ より

$$\mathrm{rank}(YY^*)^{h-1} \leq \sum_{i>h} \hat{\eta}'_i = \sum_{i>h} \hat{\eta}_i \quad (注.\ \hat{\eta}'_i = \hat{\eta}_{i+1})$$

$\rho(Y) = Y^*Y$ の ε 図形を ν とするとき

$$\sum_{i>h} \hat{\nu}_i = \mathrm{rank}(Y^*Y)^h = \mathrm{rank}\, Y^*(YY^*)^{h-1}Y \leq \mathrm{rank}(YY^*)^{h-1} \leq \sum_{i>h} \hat{\eta}_i$$

故に $\nu \leqq \eta$. $\rho(Y) \in \overline{C_{\varepsilon.\eta}}$

(ii),(iii). $Y \in \rho^{-1}(C_{\varepsilon.\sigma})$ をとる。$Y \in L'(V.U)$ が判る。補題1より

$$\rho^{-1}(C_{\varepsilon.\sigma}) = \rho^{-1}(\mathrm{Ad}(G(V)).\rho(Y)) = \rho^{-1}(\rho(Y)).G(V) = G(U).Y.G(V)$$

よって $\rho^{-1}(C_{\varepsilon.\sigma}) \subset L'(V.U)$ は1つの $G(U)\times G(V)$ 軌道を成す。

$\pi(Y) = YY^*$ の ε 図形を ν とする。Y は全射, Y^* は単射である

ことに注意すると

$$\sum_{i\geq h}\hat{\sigma}_i' = \sum_{i\geq h}\hat{\sigma}_i = \mathrm{rank}\,(Y^*Y)^h = \mathrm{rank}\,Y^*(YY^*)^{h-1}Y = \mathrm{rank}\,(YY^*)^{h-1}$$

$$= \sum_{i\geq h}\hat{\nu}_i \quad ({}^\forall h \geq 1)$$

故に $\sigma' = \nu$, $\pi(\rho^{-1}(C_{\varepsilon.\sigma})) = C_{\varepsilon.\sigma'}$ である。特に $\sigma' \leqq \eta'$ より

$\pi(\rho^{-1}(C_{\varepsilon.\sigma})) \subset \overline{C_{\varepsilon.\eta'}}$ である。 q.e.d

<u>定理.2</u> ε 退化 $\sigma \leqq \eta$ は ε 退化 $\sigma' \leqq \eta'$ に左からいくつかの同じ列を加えることにより得られるものとする。このとき

$$\mathrm{Sing}(\overline{C_{\varepsilon.\eta}}, C_{\varepsilon.\sigma}) = \mathrm{Sing}(\overline{C_{\varepsilon.\eta'}}, C_{\varepsilon.\sigma'})$$

証明) 帰納法により $\sigma \leqq \eta$ は $\sigma' \leqq \eta'$ に1列を加えることにより得られると仮定してよい。$D \in C_{\varepsilon.\eta} \subset \mathfrak{F}(V)$, $U := D(V)$ として前の写像

$$\begin{array}{ccc} L(V,U) & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{F}(U) \\ {\scriptstyle \rho}\downarrow & & \\ \mathfrak{F}(V) & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\overline{C_{\varepsilon.\eta'}}) & \twoheadrightarrow & \overline{C_{\varepsilon.\eta'}} \\ \downarrow & & \\ \overline{C_{\varepsilon.\eta}} & & \end{array}$$

を考える。$\hat{\sigma}_1 = \hat{\eta}_1$ より

$$\rho^{-1}(C_{\varepsilon.\sigma}) \subset N_{\varepsilon.\eta} \cap L'(V.U).\quad \pi(\rho^{-1}(C_{\varepsilon.\sigma})) = C_{\varepsilon,\sigma'} \quad (\text{補題}2)$$

$X \in \rho^{-1}(C_{\varepsilon.\sigma})$ とすると, $\pi(X) \in C_{\varepsilon.\sigma'}$, $\rho(X) \in C_{\varepsilon.\sigma}$ より

$$\begin{array}{ccc} N_{\varepsilon.\eta} & \xrightarrow{\pi} & \overline{C_{\varepsilon.\eta'}} \\ {\scriptstyle \rho}\downarrow & & \\ \overline{C_{\varepsilon.\eta}} & & \end{array}$$

が X で smooth であることを示せばよい。

(1) $\pi : N_{\varepsilon.m} \to \overline{C}_{\varepsilon.m'}$ が X で smooth であること.

X が全射であることより $\pi : L(V.U) \to \mathfrak{g}(U)$ の微分 $(d\pi)_X$ が全射であることが判る。故に $\pi : L(V.U) \to \mathfrak{g}(U)$ は X で smooth である。

$$\begin{array}{ccc} N_{\varepsilon.m} = \pi^{-1}(\overline{C}_{\varepsilon.m'}) & \twoheadrightarrow & \overline{C}_{\varepsilon.m'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L(V.U) & \longrightarrow & \mathfrak{g}(U) \end{array}$$

がファイバー積より $\pi : N_{\varepsilon.m} \to \overline{C}_{\varepsilon.m'}$ も X で smooth である。

(2) $\rho : N_{\varepsilon.m} \to \overline{C}_{\varepsilon.m}$ が X で smooth であること。

定理1より容易に $\rho(L') = \{E \in \mathfrak{g}(V) \mid \mathrm{rank}\, E = m\}$ が判る。($L' := L'(V.U)$) また $\dim V \geqq \dim U$ より L' は1つの $GL(V)$ 軌道を成す。作用は $(g.X) \mapsto Xg^{-1}$, $X \in L(V.U)$. $g \in GL(V)$) $GL(V)$ の $\mathfrak{g}(V)$ への作用を $(g.A) \mapsto (g^*)^{-1} A g^{-1}$ ($g \in GL(V)$. $A \in \mathfrak{g}(V)$) により定めると ρ は $GL(V)$ 同変で, $\rho|_{L'} : L' \to \rho(L')$ は次の形である。

$$GL(V)/H \to GL(V)/H'$$

ここに H, H' は $GL(V)$ の閉部分群で, $H \subset H'$ である。よって $\rho|_{L'} : L' \to \rho(L')$ は複素多様体の位相で局所自明かつファイバーは一斉に $G(U)$ に同型である。(補題1) $L' \cap N_{\varepsilon.m}$ は $G(U)$ 不変な L' の閉集合より $\rho : L' \cap N_{\varepsilon.m} \to \rho(L' \cap N_{\varepsilon.m}) = \rho(L') \cap \overline{C}_{\varepsilon.m}$ は smooth である。よって $\rho : N_{\varepsilon.m} \to \overline{C}_{\varepsilon.m}$ も X で smooth である。

q.e.d

2.3 行の除去

この小節では行の除去の証明の概略を述べる。そのために cross section を定義する。

定義 代数多様体 X に代数群 G が作用しているとする。X の $x\in X$ に於ける cross section とは局所閉部分多様体 $S\subset X$ であって、$x\in S$ かつ $G\times S\to X$, $(g,s)\mapsto gs$ が (e,x) で smooth になるものをいう。 ▨

注意4 (i) このとき $\mathrm{Sing}(S.x)=\mathrm{Sing}(X.x)$ である。

(ii) X がベクトル空間 W に含まれていて、G の X への作用が G の W への線形作用から定まっているとする。$\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,G$ として $W=\mathfrak{g}.x\oplus N$ なるように余空間 N をとり

$$S:=(N+x)\cap X$$

とすると S は X の x に於ける cross section である。

またXが既約、または equi-dimensional ならば

$$\dim_x S=\mathrm{codim}_X\, G.x$$

である。([4], 12.4) ▨

定理3 ε 退化 $\sigma\trianglelefteq\eta$ は ε 退化 $\sigma'\trianglelefteq\eta'$ に上からいくつかの行を加えることにより得られるものとする。このとき

$$\mathrm{Sing}(\overline{C_{\varepsilon.\eta}},C_{\varepsilon.\sigma})=\mathrm{Sing}(\overline{C_{\varepsilon.\eta'}},C_{\varepsilon.\sigma'})$$

である。

証明の概略） 加えられた行の成すε図形をνとする。

$\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_s,\sigma_{s+1},\cdots,\sigma_r)$ ，$\nu=(\sigma_1,\cdots,\sigma_s)$ $\sigma'=(\sigma_{s+1},\cdots,\sigma_r)$

とすると，$\eta=(\nu,\eta')$ である。 $E\in C_{\varepsilon,\sigma}(\subset \mathfrak{g}(V))$ に対して

E不変なVの部分空間W，V′で次を満すものが存在する。

① $V=W\perp V'$ （$(\ ,\ )_V$ に関する直交直和）

② W，V′は $(\ ,\ )_V$ の制限によりε型 quadratic space となるが，$E=(F,E')\in \mathfrak{gl}(W)\oplus\mathfrak{gl}(V')$ と分解するとき

$$F\in C_{\varepsilon,\nu}\subset \mathfrak{g}(W),\quad E'\in C_{\varepsilon,\sigma'}\subset \mathfrak{g}(V')$$

$D'\in C_{\varepsilon,\eta'}\subset \mathfrak{g}(V')$ ，$D:=(F,D')\in \mathfrak{g}(W)\oplus\mathfrak{g}(V')$

とすると $D\in C_{\varepsilon,\eta}$ である。

また $\mathfrak{gl}(V)$ の4つの部分空間 N,N',N_0,N_0' を次の様にとることができる。

③ $\mathfrak{gl}(V)=[\mathfrak{gl}(V),E]\oplus N$ ，$\mathfrak{gl}(W)\oplus\mathfrak{gl}(V')=[\mathfrak{gl}(W)\oplus\mathfrak{gl}(V'),E]\oplus N'$

$\mathfrak{g}(V)=[\mathfrak{g}(V),E]\oplus N_0$ ，$\mathfrak{g}(W)\oplus\mathfrak{g}(V')=[\mathfrak{g}(W)\oplus\mathfrak{g}(V'),E]\oplus N_0'$

④ $N\supset N'$，$N\supset N_0$．$N'\supset N_0'$，$N_0\supset N_0'$．

⑤ $\mathfrak{g}(V)\cap N'=N_0'$

$$S:=(N+E)\cap\overline{GL(V).D}\qquad S':=(N'+E)\cap\overline{(GL(W)\times GL(V')).D}$$

$$S_0:=(N_0+E)\cap\overline{G(V).D}\qquad S_0':=(N_0'+E)\cap\overline{(G(W)\times G(V')).D}$$

とすると，これらはいずれもDの軌道の閉包のEに於ける cross section である。注意4(ii)より

$$\dim_E S=\operatorname{codim}_{\overline{GL(V).D}}GL(V).E$$

$$\dim_E \mathcal{S}' = \operatorname{codim}_{\overline{(GL(W)\times GL(V')).D},\,(GL(W)\times GL(V')).E}$$

[3] Proposition 3.1 よりこの2本の式の右辺は一致することが判る。故に $\dim_E \mathcal{S} = \dim_E \mathcal{S}'$ である。A型 Lie 環の巾零軌道の正規性より $\overline{GL(V).D}$ はEで正規である。ところが $Sing(\mathcal{S}.E) = Sing(\overline{GL(V).D}, E)$ より $\mathcal{S}$ もEで正規である(注意 2(iii))よって $\mathcal{S}'$ と $\mathcal{S}$ はEの或る近傍で一致する。

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'\cap \mathfrak{g}(V) &= \{\mathfrak{g}(V)\cap(N'+E)\}\cap\{\mathfrak{g}(V)\cap\overline{(GL(W)\times GL(V')).D}\}\\ &= \{(\mathfrak{g}(V)\cap N')+E\}\cap\{\mathfrak{g}(W)\oplus\mathfrak{g}(V')\cap\overline{(GL(W)\times GL(V')).D}\}\\ &= (N_0'+E)\cap\overline{(G(W)\times G(V')).D} = \mathcal{S}_0'\end{aligned}$$

$$\mathcal{S}\cap\mathfrak{g}(V) \supset \mathcal{S}_0 \supset \mathcal{S}_0' = \mathcal{S}'\cap\mathfrak{g}(V)$$

故に $\mathcal{S}_0$ と $\mathcal{S}_0'$ もEの或る近傍で一致する。従って

$$\begin{aligned}Sing(\overline{G(V).D}, E) &= Sing(\mathcal{S}_0, E) = Sing(\mathcal{S}_0', E)\\ &= Sing(\overline{G(W)\times G(V').D}, E)\end{aligned}$$

即ち $Sing(\overline{C_{\varepsilon.\eta}}, E) = Sing(\overline{C_{\varepsilon.\nu}}\times\overline{C_{\varepsilon.\eta'}}, (F, E'))$ である。

$F\in C_{\varepsilon.\nu}$ よりFは $\overline{C_{\varepsilon.\nu}}$ の smooth な点である。よって

$$Sing(\overline{C_{\varepsilon.\eta}}, E) = Sing(\overline{C_{\varepsilon.\nu}}\times\overline{C_{\varepsilon.\eta'}}, (F, E')) = Sing(\overline{C_{\varepsilon.\eta'}}, E')$$

即ち $Sing(\overline{C_{\varepsilon.\eta}}, C_{\varepsilon.\sigma}) = Sing(\overline{C_{\varepsilon.\eta'}}, C_{\varepsilon.\sigma})$ を得る

q.e.d

2.4 極小退化に於けるsmoothly equivalence class

ε退化 $\sigma\leqq\eta$ が隣り合っている(即ち $\sigma\lneqq\nu\lneqq\eta$ なるε図形が存在しない)とき $\sigma\leqq\eta$ は極小であるという。いま $\eta\geqq\sigma$ を極

小ε退化とする。これから左上の等しい行と列を除くことにより次の様なε退化 $\eta' \geqq \sigma'$ を得る：

	(1)	(2)	(3)	(4)
ε	1	1	−1	−1
η'	(n)	$(2, 1^{n-2})$	(n, n)	$(2^2, 1^{2n-4})$
σ'	$(n-1, 1)$	1^n	$(n-1, n-1, 1, 1)$	1^{2n}
$\mathrm{codim}_{\overline{C_{\varepsilon,\eta'}}} C_{\varepsilon,\sigma'}$	1	$n-1$	4	$4(n-1)$

以下それぞれの場合について解説する。

(1) $X:=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid x^n+y^2=0\}$ として

$$\mathrm{Sing}(\overline{C_{\varepsilon,\eta}}, C_{\varepsilon,\sigma}) = \mathrm{Sing}(X, 0)$$

(3) $Y:=\{(x,y_1,y_2,y_3,y_4)\in\mathbb{C}^5 \mid x^n+y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2=0\}$ として

$$\mathrm{Sing}(\overline{C_{\varepsilon,\eta}}, C_{\varepsilon,\sigma}) = \mathrm{Sing}(Y, 0)$$

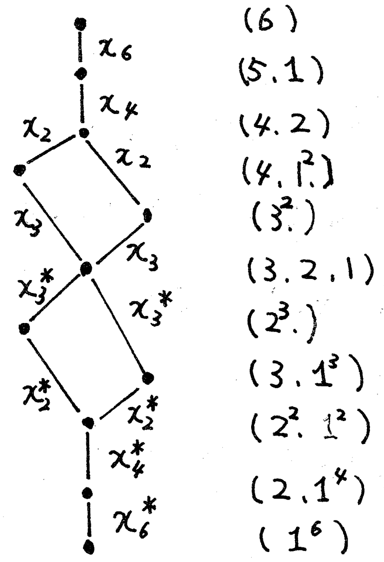
(2) $\mathfrak{s}$ を対称対 $(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{o}(n,\mathbb{C}))$ に対応するベクトル空間として, $X^*:=\{A\in\mathfrak{s} \mid A$ は巾零かつ A の2次小行列式は$0\}$ とするとき $\mathrm{Sing}(\overline{C_{\varepsilon,\eta}}, C_{\varepsilon,\sigma}) = \mathrm{Sing}(X^*, 0)$

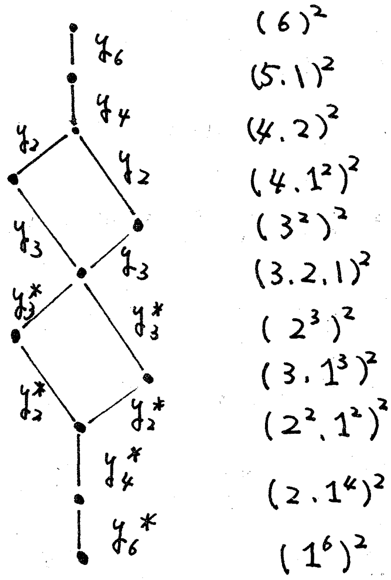
(4) $\mathfrak{s}$ を対称対 $(\mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}))$ に対応するベクトル空間として, $Y^*:=\{A\in\mathfrak{s} \mid A$ は巾零かつ A の3次小行列式は$0\}$ とするとき $\mathrm{Sing}(\overline{C_{\varepsilon,\eta}}, C_{\varepsilon,\sigma}) = \mathrm{Sing}(Y^*, 0)$.

(1)〜(4) の smoothly equivalence class を順に x_n, x_n^*, y_n, y_n^* と書くことにする。例えば $(\mathfrak{gl}(6,\mathbb{C}), \mathfrak{o}(6,\mathbb{C}))$, $(\mathfrak{gl}(12,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(6,\mathbb{C}))$ に於ける巾零軌道の closure relation 及び極小ε退化に於け

る smoothly equivalence class は次の様になる。

$(\mathfrak{gl}(6,\mathbb{C}), \mathfrak{o}(6,\mathbb{C}))$　　　　　$(\mathfrak{gl}(12,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(6,\mathbb{C}))$





(注. $x_2^* = x_2$, $y_2^* = y_2$)

§3　対称対 $(\mathfrak{gl}(2\ell,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(\ell,\mathbb{C}))$ の巾零軌道の閉包の正規性

この節では ε はいつも -1 であるとしておく。

V を -1 型 quadratic space とする。$D \in \mathfrak{g}(V)$ は巾零元で、その $G(V)$ 軌道は $C_D = C_{-1,\eta}$ (η は -1 図形) であるとする。以下これを1つ固定しておく。$V_1 := D(V)$ 上に非退化な -1 形式 $(\ ,\ )_{V_1}$ を定めることにより V_1 は -1 型 quadratic space となるのであった。(2.2) また $X^0 := D : V \to V_1 \in L(V, V_1)$ とすると

$$(X^0)^* = I : V_1 \hookrightarrow V \in L(V_1, V) \quad (\text{包含写像})$$

$$D = I X^0 = (X^0)^* X^0 \quad \in \mathfrak{g}(V)$$

$$D' := D|_{V_1} = X I = X^0 (X^0)^* \in C_{-1\eta'} \subset \mathfrak{g}(V_1)$$

となるのであった。ここに η' は η から第1列を除いて得られる -1 図形である。これをくり返すことにより -1 型 quadratic space の列

$V_0 = V,\ V_1 := D(V) \cdots\cdots V_t = D^t(V) \neq 0,\ V_{t+1} = D^{t+1}(V) = 0$

ができる。η^i を η から始めの i 列を除くことにより得られる -1 図形とすると $D|_{V_i} \in C_{-1,\eta^i} \subset \mathfrak{g}(V_i)$ である。

$$M := L(V_0, V_1) \times L(V_1, V_2) \times \cdots \times L(V_{t-1}, V_t)$$

として、次の(*)により定義される代数多様体 Z を考える。

$$Z = \{(X_1, \cdots, X_t) \in M \mid (*) \text{を満す}\}$$

$$(*)\left\{\begin{array}{l} X_1 X_1^* = X_2^* X_2 \\ X_2 X_2^* = X_3^* X_3 \\ \quad\vdots \\ X_{t-1} X_{t-1}^* = X_t^* X_t \\ X_t X_t^* = 0 \end{array}\right.$$

$G(V_0) \times \cdots \times G(V_t)$ は

$$(g_0, \cdots, g_t)(X_1, \cdots, X_t) := (g_1 X_1 g_0^{-1}, g_2 X_2 g_1^{-1}, \cdots, g_t X_t g_{t-1}^{-1})$$

とすることにより M に作用する。明らかに Z は $G(V_0) \times \cdots \times G(V_t)$ で不変である。

<u>補題3</u> (i) $(X_1, \ldots, X_t) \in Z$ について

$$X_1^* X_1 \in \overline{C_D} = \overline{C_{-1,\eta}}$$

である。従って写像

$$\theta : Z \to \overline{C_D},\quad \theta(X_1, \cdots, X_t) = X_1^* X_1$$

が定義できる。Θ は $G(V_0)$ 同変写像である。

(ii) $X_i^\circ := D|_{V_{i-1}} : V_{i-1} \longrightarrow V_i \in L(V_{i-1}, V_i)$

とすると $(X_1^\circ, \cdots, X_t^\circ) \in Z$ である。$(X_1^\circ)^* X_1^\circ = D$ であったから

$\Theta(Z) \supset C_D$ である。

証明) (i) $\mathrm{rank}\,(X_1^* X_1)^h = \mathrm{rank}\, X_1^* (X_1 X_1^*)^{h-1} X_1 \leqslant \mathrm{rank}\,(X_1 X^*)^{h-1}$

$= \mathrm{rank}\,(X_2 X_2^*)^{h-1}$

これをくり返すことにより

$$\mathrm{rank}\,(X_1^* X_1)^h \leqslant \mathrm{rank}\,(X_h^* X_h) \leqslant \mathrm{rank}\, X_h \leqslant \dim V_h = \mathrm{rank}\, D^h$$

よって $X_1^* X_1 \in \overline{C_D}$。後半は容易に示される。

(ii) $X_i^\circ (X_i^\circ)^* = (D|_{V_{i-1}}) \circ (I : V_i \hookrightarrow V_{i-1}) = D|_{V_i}$

$(X_{i+1}^\circ)^* X_{i+1}^\circ = (I : V_{i+1} \hookrightarrow V_i) \circ (D|_{V_i}) = D|_{V_i}$ q.e.d

<u>補題4</u> (i) 代数多様体 Z は或る添数集合 Λ によって有限和

$$Z = \coprod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \ (\text{disjoint union})$$

と分解される。ここに Z_λ らは以下の性質をもつ。

(a) Z_λ は $G(V_0) \times \cdots \times G(V_t)$ 不変, smooth, かつ 既約な部分多様体である。また $\Theta(Z_\lambda)$ は1つの $G(V_0)$ 軌道を成す。

(b) 或る $\lambda^\circ \in \Lambda$ があって

$$\Theta^{-1}(C_D) = Z_{\lambda^\circ}$$

となる。また $M' = \{(X_1, \cdots, X_t) \in M \mid$ 各 X_i は全射$\}$ とすると

$$Z_{\lambda^\circ} \subset M'$$

(ii) $\mathrm{codim}_Z\, \Theta^{-1}(C_{-1,\sigma}) \geqslant \frac{1}{2}\, \mathrm{codim}_{\overline{C_D}}\, C_{-1,\sigma} \ (\sigma \leqq \eta)$ ▨

補題4の証明は長くなるので略す。

定理4 (i) (*)で定義されるスキーム Z は既約，被約(従って代数多様体)かつ M で完全交叉である。

(ii) 写像 $\theta: Z \to \overline{C_D}$, $\theta(X_1, \cdots, X_t) = X_1^* X_1$ は全射でさらに $G(V_1) \times \cdots \times G(V_t)$ による商写像である。

証明) 写像 $\zeta: M = \prod_{i=1}^{t} L(V_{i-1}, V_i) \to \prod_{i=1}^{t} \mathfrak{g}(V_i) =: N$ を次の様に定める。

$$\zeta(X_1, \ldots, X_t) = (X_1 X_1^* - X_2^* X_2, \ldots, X_{t-1} X_{t-1}^* - X_t^* X_t, X_t X_t^*)$$

するとスキーム Z は ζ のスキーム論的ファイバー $\zeta^{-1}(0)$ に等しい。$\alpha = (X_1, X_2, \ldots, X_t) \in M'$ とするとき，ζ の α に於ける微分 $(d\zeta)_\alpha$ が全射であることが行列の計算により確められる。従って ζ は M' 上 smooth である。

$X_i^0 = D|_{V_{i-1}}: V_{i-1} \to V_i$ は全射より

$$(X_1^0, \ldots, X_t^0) \in Z \cap M' =: Z'$$

よって $Z' \neq \phi$, $\mathrm{codim}_M Z' = \dim N$ である。

$\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda^0$ とするとき $Z_\lambda \subset \theta^{-1}(C_{\varepsilon, \sigma})$ $({}^\exists \sigma \neq \eta)$ となるが，補題4(ii)より $\dim Z > \dim Z_\lambda$ である。$Z = \coprod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$ は有限和より $\dim Z = \dim Z_{\lambda^0}$ である。$Z_{\lambda^0} \subset Z'$ より $\dim Z = \dim Z'$ 従って $\mathrm{codim}_M Z = \dim N$ である。故に Z は M で完全交叉である。($\Rightarrow S_n$ ${}^\forall n$)

Z_λ $(\lambda \in \Lambda)$ は既約より $Z = \zeta^{-1}(0)$ の既約成分は $\overline{Z_\lambda}$ の形であるが

$\lambda \neq \lambda^0$ なら $\dim \overline{Z}_\lambda < \dim Z = \dim M - \dim N$ である。一方

(ファイバー $\zeta^{-1}(0) = Z$ の既約成分の次元) $\geqq \dim M - \dim N$

より $\overline{Z}_\lambda$ は既約成分ではあり得ない。よって Z の既約成分は

$\overline{Z}_{\lambda^0}$ に限る。即ち Z は既約である。

$M' \xrightarrow{\zeta} N$ は smooth であったから base change により

$$\zeta^{-1}(0) \cap M' = Z' \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{C}$$

も smooth である。故に Z は smooth な点をもつ。($\Rightarrow R_0$)

(S_1) と (R_0) より Z は被約である。(S_n, R_n については[5]参照)

(ii). $L(V_{t-1}, V_t) \to \mathfrak{S}(V_{t-1})$, $X_t \mapsto X_t^* X_t$ は $G(V_t)$ による商写像

であった。(§2, 定理1). よって

$$\varphi_t : M \longrightarrow [\prod_{i=1}^{t-1} L(V_{i-1}, V_i)] \times \mathfrak{S}(V_t), \ (X_1, \ldots, X_t) \mapsto (X_1, \ldots, X_{t-1}, X_t^* X_t)$$

も $G(V_t)$ による商写像である。Z は M の $G(V_t)$ 不変な閉集合より $\varphi_t(Z)$ は閉集合, $\varphi_t|Z : Z \to \varphi_t(Z)$ は $G(V_t)$ による商写像である。(§2, 注意3(i)) ところが $(X_1, \ldots, X_t) \in Z$ については

$X_{t-1} X_{t-1}^* = X_t^* X_t$ より $\varphi_t|Z$ は射影 $P_t : Z \to \prod_{i=1}^{t-1} L(V_{i-1}, V_i)$ と同一視できる。この議論をくり返すことにより $\theta(Z)$ は $\overline{C}_D$ の閉集合, $\theta : Z \to \theta(Z)$ は $G(V_1) \times \cdots \times G(V_t)$ による商写像であることが判る。

$(X_1^0, \ldots, X_t^0) \in Z$, $\theta(X_1^0, \ldots, X_t^0) = D$ であったから

$\theta(Z) \supset C_D$ であるが, $\theta(Z)$ は閉集合より $\theta(Z) \supset \overline{C}_D$ よっ

て $\Theta: Z \to \overline{C_D}$ は全射である。 q.e.d

<u>定理</u> 対称対 $(gl(2\ell, \mathbb{C}), sp(\ell, \mathbb{C}))$ に対応するベクトル空間 $\mathfrak{p}$ に於ける巾零 $Sp(\ell, \mathbb{C})$ 軌道の閉包は正規多様体である。

証明) $Z = Z_{\lambda^0} \amalg \left(\coprod_{\sigma \neq \eta} \Theta^{-1}(C_{-1,\sigma}) \right)$, $Z_{\lambda^0} = \Theta^{-1}(C_{-1,\eta})$

$S(Z)$ を Z の singular locus とする。Z_{λ^0} は smooth であったから

$$S(Z) \subset \coprod_{\sigma \neq \eta} \Theta^{-1}(C_{-1,\sigma})$$

$\sigma \neq \eta$ なる -1 図形 σ の中で, $\dim \Theta^{-1}(C_{-1,\sigma})$ が最大になるものを σ_0 とすると $\dim S(Z) \leq \dim \Theta^{-1}(C_{-1,\sigma_0})$ よって

$$\operatorname{codim}_Z S(Z) \geq \operatorname{codim}_Z \Theta^{-1}(C_{-1,\sigma_0}) \geq \frac{1}{2} \operatorname{codim}_{\overline{C_{-1,\eta}}} C_{-1,\sigma_0}$$

$C_{-1,\sigma}$ (σ は -1 図形) の次元を与える公式より

$$\operatorname{codim}_{\overline{C_{-1,\eta}}} C_{-1,\sigma_0} \geq 4$$

が確められる。これより

$$\operatorname{codim}_Z S(Z) \geq 2.$$

故に Z は余次元 1 の特異点をもたない。($\Rightarrow R_1$) さらに Z は完全交叉 ($\Rightarrow S_n \ \forall n \geq 1$) であったから, 性質 (R_1) と (S_2) より Z は正規多様体である。$\Theta: Z \twoheadrightarrow \overline{C_{-1,\eta}} = \overline{C_D}$ は $G(V_1) \times \cdots \times G(V_t)$ による商写像であったから $\overline{C_{-1,\eta}}$ も正規多様体である。 q.e.d.

文献

[1] De Concini, C and Procesi, C： A characteristic free approach to invarant theory. Adv, Math, 21 (1976). 330-354

[2] Kraft, H and Procesi, C： Closure of Conjugacy classes of matrices are normal, Invent, Math 53 227-247 (1979)

[3] 同上 ： Minimal singularities in GL_m. Invent. Math 62 (1981) 503-515

[4] 同上： On the geometry of conjugacy class in classical groups. Comment Math Helv. 57 (1982) 539-602

[5] Matsumura, H： Commutative algebra (second edition), The Benjamin, commings Publishing company

[6] Mumford, D： Geometric Invariant Theory

Erg der Math 34. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag 1970

[7]. Sekiguch, J: The nilpotent subvariety of the vector spaces associated to a Symmetric pair Publ, R.I.M.S. Kyoto Univ 20 (1984) 155-212