

DEDEKIND 和と保型形式

神大・理 平松豊一 (Toyokazu Hiramatsu)

神大・理 味村良雄 (Yoshio Mimura)

神大・自然科学 高田一郎 (Ichiro Takada)

§1. いろいろな Dedekind 和

1.1 古典的 Dedekind 和

楕円モジュラー関数に関連して、関数

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}), \quad \text{Im } \tau > 0$$

が $SL(2, \mathbb{Z})$ による一次変換によって、どういう影響を受けるかという問題は Jacobi 等によってすでに考察されていた。

Riemann はこの極限状態を考えて、この変換に関連したいくつかの重要な公式を残した。これを参ねられた Dedekind は、本質的には彼等の仕事を用いて $\log \eta(\tau)$ の変換公式を証明し、その中に現われる項：Dedekind 和の表示やその完全な決定を考察し、その相互法則を初めて証明した ([9])。この和は分数の有限和として書けることより、その初等的研究が期待されるが、そうした方法による考察は Rademacher によって

完成され、相互法則のいくつかの証明やその数論的性質が得られた ([24])。そこで、古典的な Dedekind 和のいくつかの結果をまとめると次のようになる。

(1) 変換公式. $SL(2, \mathbb{Z})$ の任意の元 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し、

$$\log \eta \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) = \log \eta(\tau) + \frac{1}{2} \log \frac{c\tau + d}{i} + \frac{\pi i}{12} \Phi \left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right)$$

$$\text{ここで, } \Phi \left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right) = \begin{cases} \frac{b}{d} & (c=0 \text{ のとき}) \\ \frac{a+d}{c} - 12s(d, c) & (c \neq 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

この $s(d, c)$ が Dedekind 和と呼ばれるものである。

(2) 表示. (イ) $(h, k) = 1, k \geq 1$ に対し、

$$s(h, k) = \sum_{m=1}^{k-1} \left(\left(\frac{m}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{hm}{k} \right) \right),$$

$$\text{ここで, } \left(\left(x \right) \right) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & (x \notin \mathbb{Z} \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in \mathbb{Z} \text{ のとき}). \end{cases}$$

(ロ) $(h, k) = 1, k \neq 0$ に対し、

$$s(h, k) = \frac{1}{4k} \sum_{m=1}^{k-1} \cot \frac{\pi m}{k} \cot \frac{\pi hm}{k}.$$

(3) 相互法則. $(h, k) = 1, h \geq 1, k \geq 1$ に対し、

$$s(h, k) + s(k, h) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{k} + \frac{1}{hk} + \frac{k}{h} \right).$$

(4) 三項関係. $A_i = \begin{pmatrix} * & * \\ c_i & * \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), i=1, 2, 3$, で、

$A_1 A_2 A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対し、

$$\sum_{i=1}^3 \Phi(A_i) = -3 \operatorname{sign}(c_1, c_2, c_3).$$

(5) 値. (イ) $2k \cdot (3, k) \cdot s(h, k) \in \mathbb{Z}$;

(ロ) $s(h, k) = 0 \Leftrightarrow s(h, k) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow h^2 + 1 \equiv 0 \pmod{k}$;

(11) $6k \cdot s(h, k) \equiv 0, \pm 1, \pm 3 \pmod{9}$ (ここから missing value の問題が生じる。

(12) 任意の $\frac{h}{k}$ に対して, $s(h, k)$ は上, 下に有界でない。

(13) $s(h, k)$ は実軸上 dense。

(14) Jacobi 記号との関係。

$$\left(\frac{h}{k}\right) = \exp\{2\pi i k (s(1, k) - s(h, k))\}.$$

(15) 格子点. $(a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$ で

$$N_3(a, b, c) = \#\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid \begin{array}{l} 0 \leq x < a, 0 \leq y < b, 0 \leq z < c, \\ 0 < \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} < 1 \end{array} \right\}$$

とするとき,

$$\begin{aligned} N_3(a, b, c) = & -s(bc, a) - s(ca, b) - s(ab, c) + \frac{1}{6}abc + \frac{1}{12abc} \\ & + \frac{1}{4}(ab+bc+ca) + \frac{1}{4}(a+b+c) + \frac{1}{12}\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) - 2. \end{aligned}$$

(16) ある種の 2 次形式の類不変量や 2 次体上のアーベル拡大の類数との関連。

古典的 Dedekind 和の拡張を考える際に, 上の性質に注目する必要がある。特に, (1) と (3) が重要である。

1.2 その後のいろいろな拡張

(i) Apostol ([1], [2]), Carlitz ([5], [6], [7]), Meyer ([17]).

n 次の Bernoulli 多項式を $B_n(x)$ とし, $\bar{B}_n(x) = B_n(x - [x])$ で n 次の Bernoulli 関数を定義する。($[x] = B_1(x)$) であることを考慮して, $p (> 1)$: 奇数, $0 \leq r \leq p+1$ に対し,

$$S_{p,r}(h,k) = \sum_{m=1}^{k-1} \bar{B}_{p+1-r}\left(\frac{m}{k}\right) \bar{B}_r\left(\frac{hm}{k}\right)$$

とおく。この和に対して、相互法則が示される。また Lambert 級数

$$G_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \frac{x^n}{1-x^n}$$

で表される関数の変換公式に $S_{p,p}$ が現れる。さらに, Hurwitz の zeta 関数とも関連する。

(ii) Carlitz ([8]).

$$f\left(\frac{j}{k}\right) = \left(\left(\frac{j}{k}\right)\right) + \frac{1}{2k} \text{ として,}$$

$$S_n(h_1, \dots, h_n; k) = \sum_{j_1, \dots, j_n \pmod k} f\left(\frac{j_1}{k}\right) \cdots f\left(\frac{j_n}{k}\right) f\left(\frac{j_1 h_1 + \dots + j_n h_n}{k}\right)$$

を考える。 S_n の相互法則が示される。 $n=1$ のときが古典的な Dedekind 和である。

(iii) Meyer ([18], [19]), Dieter ([10]), Schoeneberg ([29]).

$$S_{a,b}(h,k) = \sum_{m=1}^{k-1} \left(\left(\frac{m}{k} + \frac{a}{fk}\right)\right) \left(\left(\frac{hm}{k} + \frac{ah+bk}{fk}\right)\right)$$

なる和を考え、これに対応する重の一般化が得られる。この和は、Klein の関数 $\sigma_{a,b}(\omega_1, \omega_2)$ の変換公式に現れる。また $S_{a,b}$ に対応する cot 表示も得られている。Dieter は更に、 $\log \sigma_{a,b}(\omega_1, \omega_2)$ の変換公式を与え、それより $\sigma_{a,b}$ の相互法則を解析的方法と数論的方法の両方で示した。Schoeneberg も $\log \sigma_{a,b}$ を用いる種積分とみて、その変換公式を与えた。

(iv) Mikolás ([20], [21]).

$$m, n \geq 0, (a, c) = (b, c) = 1, \{u\} = u - [u], x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \text{ に}$$

対し、次の3つの和

$$s\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = \sum_{j=0}^{c-1} \bar{B}_m\left(\frac{ja}{c}\right) \bar{B}_n\left(\frac{jb}{c}\right),$$

$$S_c^{a,b}(x, y) = \sum_{j \pmod{c}} \exp\left\{2\pi i \left(\left\{\frac{ja}{c}\right\}x + \left\{\frac{jb}{c}\right\}y\right)\right\},$$

$$g_c^{a,b}(x, y) = (e^{2\pi i x} - 1)^{-1} (e^{2\pi i y} - 1)^{-1} S_c^{a,b}(x, y)$$

を考え、これらの関数を含む次の等式を与えた。和 $g_c^{a,b}(x, y)$ は、

$$\tilde{Q}(\tau, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+w} + \frac{1}{n-w} \right) \frac{e^{2\pi i n \tau}}{1 - e^{2\pi i n \tau}}$$

の変換公式に現れる。更に、

$$D_c^{a,b}(w, z) = \sum_{j=1}^{c-1} \zeta(w, \left\{\frac{ja}{c}\right\}) \zeta(z, \left\{\frac{jb}{c}\right\})$$

が極めて一般化された Dedekind 和であることを示している。

(V) Rieger ([28]).

代数体への拡張を行った。古典的 Dedekind 和 $s(h, k) = \sum_{m \pmod{k}} \bar{B}_1\left(\frac{m}{k}\right) \bar{B}_1\left(\frac{hm}{k}\right)$ を有理数 $\frac{h}{k}$ の関数とみて、Eisenstein の公式

$$\bar{B}_1(x) = \bar{B}_1\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{i}{2m} \sum_{j=1}^{m-1} e^{2\pi i j x / m} \cot \frac{\pi j}{m}$$

を、 x が代数的数のときに拡張して、この $\bar{B}_1(x)$ を用いて Dedekind 和を拡張した。

(Vi) Berndt ([4]).

一般 Eisenstein 級数

$$G(z, s; r, h) = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (mh_1 + nh_2)}}{((m+r_1)z + h+r_2)^s}$$

を考え、Dedekind 和

$$S_{\beta, \alpha}(d, c) = \sum_{\nu \pmod{cd}} \exp \left\{ 2\pi i \left(\frac{\nu \alpha}{c} + \frac{\nu \beta}{d} \right) \right\} \left(\frac{\nu}{d|c} \right) \left(\frac{\nu d^{-1}}{c} \right)$$

に対し, 相互法則を示した。

(vii) Hirzebruch-Zagier ([15], [16], [34]).

位相幾何学との関連で, Dedekind 和の (パラメータに関する) 高次元化を扱った。(広岡栄子さんの報告を参照)

(viii) L. Goldstein et al. ([11] ~ [14]). (§2 参照)

(ix) Sczech ([30], [31]).

楕円関数との関連で, Dedekind 和の拡張を行った。(伊藤博さんの報告を参照)

N.B.

1) Barner ([3]) は, Dedekind 和を用いて, 実 2 次体の ring class に対する ζ -関数や L -関数の特殊値を explicit に表わす公式を与えた。また Meyer も Dedekind 和を使って, 実 2 次体の ring class の L -関数に対しての Kronecker 極限公式を求め (そこに Dedekind 和が現われる), これを用いて, 2 次体上のアーベル拡大の類数を決定した。

2) Wohlfahrt ([33]) は, Dedekind 和がある保型形式の multiplier に現れるということを利用して, モジュラー群の部分群の構成を行った。

3) Rédei ([27]) は, 多項式 $P_k(x) = (x^k - 1)/(x - 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, を考へ, $(m, n) = 1$ に対し,

$$P_m(x)F(x) + P_n(x)G(x) = 1, \quad \deg F < n, \quad \deg G < m$$

をみたす多項式 F, G をとったとき, $x = 1+t$ を代入して, 両辺の t^r の係数を比較して, 恒等式の系列を得た。ここで, $r = 2$ とすると, Dedekind 知の相互法則が得られる。

4) §1.1, (7) の格子点の結果は, Mordell ([22], [23]) による。

§2. L. Goldstein らの仕事

2.1. Hecke 積分

$\eta(z)$ ($z \in \mathfrak{H}^+$) を Dedekind の eta 関数とする。 $\eta(z) \neq 0$ だから, $f(z) = \log \eta(z)$ (主枝をとる) とおく。 $f(z)$ は \mathfrak{H}^+ で正則で, 次の性質 (1)–(4) をもつ:

$$(1) \quad f(z+1) = f(z) + \frac{\pi i}{12};$$

$$(2) \quad f\left(-\frac{1}{z}\right) = f(z) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{z}{i}\right);$$

$$(3) \quad f(z) = \frac{\pi i z}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}, \quad a_n = -\sum_{d|n, d>0} \frac{1}{d};$$

$$(4) \quad \exists \alpha > 0, \quad f(z) = O(y^{-\alpha}) \quad \text{as } y \rightarrow 0, \quad \text{uniformly for } x \text{ in any finite interval.}$$

従って, (1)+(2) より, 前記の

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{cz+d}{i}\right) + \frac{\pi i}{12} \Phi\left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

を得る。性質 (2) が本質的であり, Weil ([32]) は,

$$f(z) \xrightarrow{\text{Mellin 変換}} \zeta(s)\zeta(s+1) : \text{appropriate zeta 関数}$$

をみて, 右辺の関数等式より, (2) を証明した。

さて、上の $f(z)$ をモデルとして、次の Hecke 積分を得る。

定義: $\lambda > 0, A, B, C, \gamma \in \mathbb{C}$ とする。 \mathfrak{H}^+ 上の関数 $f(z)$ が $\text{sign}\{\lambda, A, B, C, \gamma\}$ の Hecke 積分とは、

$$(I) \quad f(z + \lambda) = f(z) + \frac{2\pi i A}{\lambda};$$

$$(II) \quad f(-\frac{z}{\lambda}) = \gamma f(z) + B \log\left(\frac{z}{\lambda}\right) + C;$$

(III) (I)より、 $f(z) - \frac{2\pi i A z}{\lambda}$ は周期 λ をもつ。そこで、

$$f(z) = \frac{2\pi i A z}{\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}};$$

とくに $f(z)$ は \mathfrak{H}^+ で正則である。

(IV) $\exists \alpha > 0, f(x+iy) = O(y^{-\alpha})$ as $y \rightarrow 0$, uniformly for x in a finite interval.

($\gamma = \pm 1$ とできる)。

例. $\log \eta(z) \in \{1, \frac{1}{24}, \frac{1}{2}, 0, 1\};$

$$\log \theta(z) \in \{2, 0, \frac{1}{2}, 0, 1\}$$

さて、次のようにおく:

$$\phi_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

$$\Phi_f(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) \phi_f(s).$$

次の [I] ~ [III] が成立する。

[I] $\Phi_f(s)$ は全 s 平面に有理型関数として解析接続でき、

$$\Phi_f(s) - \frac{B}{s^2} - \frac{C}{s} + \frac{2\pi A \gamma}{\lambda} \frac{1}{s-1} - \frac{2\pi A}{\lambda} \frac{1}{s+1}$$

は finite genus の整関数である。

$$[II] \quad \Phi_f(-s) = \gamma \Phi_f(s).$$

[III] $f(z) \xleftrightarrow{|\lambda|} \Phi_f(s)$.

例. $f(z) = \log \eta(z) \leftrightarrow \phi_f(s) = -\zeta(s)\zeta(s+1)$ (Weil);

$f(z) = \log \theta(z) \leftrightarrow \phi_f(s) = -2^{-s} \{-s+2(2^s+2^{-s})\} \zeta(s)\zeta(s+1)$
(Ogg).

2.2 Hecke積分 $f_\chi(z)$

χ を, primitive Dirichlet character mod f ($f > 1$) とし,

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1;$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \chi(-1) = 1 \text{ のとき} \\ 1 & \chi(-1) = -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$R(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{f}\right)^{-\frac{s+\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right) L(s, \chi)$$

とするとき,

$$R(1-s, \bar{\chi}) = \frac{i^\varepsilon f^{1/2}}{\tau(\chi)} R(s, \chi).$$

ここで, $\tau(\chi)$ は Gauss 和を表わす。そこで,

$$\phi(s) = L(s, \chi) L(s+1, \bar{\chi}),$$

$$\phi(s) \xrightarrow{\text{Mellin}} f_\chi(z)$$

とする。そのとき,

定理 1 $f_\chi(z)$ は Hecke 積分で,

$$f_\chi(z) \in \begin{cases} \{f, 0, 0, 0, 1\} & \chi(-1) = 1 \text{ のとき,} \\ \{f, 0, 0, iL(1, \bar{\chi})^2 f / \pi \tau(\chi), -1\} & \chi(-1) = -1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

系 $G(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ とおく。

(1) $\chi(-1) = 1$ ならば

$$f_\chi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f_\chi(z) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(f);$$

(2) $\chi(-1) = -1$ なら,

$$f_x\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \pm f_x(z) + \Phi_x\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(f)$$

ここで, χ は real, odd character とする。定理1より,

$$f_x\left(-\frac{1}{z}\right) = -f_x(z) + \frac{if}{\pi\tau(\chi)} L(1, \chi)^2$$

$z=i$ とおいて,

$$f_x(i) = \frac{if}{2\pi\tau(\chi)} L(1, \chi)^2$$

一方, K_f を, χ に対応する 2 次体とすると, χ は 導手 f の odd 指標ゆえ, $K_f = \mathbb{Q}(\sqrt{-f})$ となる。 $|f| > 4$ とすると, K_f の類数 h_f は

$$h_f = \frac{f^{1/2}}{\pi} L(1, \chi)$$

だから, 次を得る:

$$f_x(i) = \frac{i\pi}{2\tau(\chi)} h_f^2$$

$f_x(i) > c$ となる effectively determined constant c があるか?

(Goldfeld - Gross - Zagier と対比・参照)

2.3 Dirichlet の類数公式の一般化

以下で, $f_x(z)$ に関する一般的な変換公式より, $\Phi_x\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ を決定し, それが Dirichlet の類数公式の一般化を与えることを示そう。次を考える:

$$\Gamma(f)^* = \langle \Gamma(f), S \rangle = \Gamma(f) \cup \Gamma(f)S, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

定理 2. $\Gamma(f)^* \ni \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $c > 0$ に対し,

$$f_x(\sigma(z)) = \begin{cases} f_x(z) & \sigma \in \Gamma(f) \\ -f_x(z) + \pi i S_x \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \sigma \in \Gamma(f)S. \end{cases}$$

ここで, S_x は Dedekind 知の一種の拡張で, 次式で与えられる:

$$S_x \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau(x)} \sum_{p \bmod cf} \sum_{\ell \bmod f} \chi(p) \chi(\ell) \left(\left(\frac{p}{cf} \right) \right) \left(\left(\frac{c\ell + pa}{cf} \right) \right).$$

証明には, 下記のような合同 zeta 関数の関数等式が使われる:

$x \in \mathbb{R}^x$, $\varepsilon = 0, 1$ とし,

$$z_\varepsilon(x) = \left(\frac{x}{|x|} \right)^\varepsilon$$

とおく. $h, k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ に対して,

$$\zeta_\varepsilon(s; h, k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z_\varepsilon(n)}{|n|^\varepsilon} \mathbf{1}_{n \equiv h \pmod{k}}, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

とする. $h=k=1$, $\varepsilon=0$ のとき, $2\zeta(s)$ と一致する. また,

$$\zeta_1(0; p, cf) = -2 \left(\left(\frac{p}{cf} \right) \right)$$

が成立する.

$$F_{p,q,\varepsilon,k}(s) = \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{-s} \Gamma(s) \zeta_\varepsilon(s; p, k) \zeta_\varepsilon(s+1; q, k)$$

とおくとき, 次の関数等式

$$F_{p,q,\varepsilon,k}(s) = \frac{1}{|k|} \sum_{\alpha, \beta \bmod k} e^{2\pi i(\alpha p + \beta q)/|k|} F_{\beta, \alpha, \varepsilon, k}(-s)$$

が成立する.

さて, 定理 1 より, $G(f) \cap \Gamma(f)S \ni \sigma$ (odd k の場合) に対して,

$$f_x(\sigma(z)) = -f_x(z) + \frac{if}{\pi \tau(\bar{x})} L(1, \bar{x})^2.$$

これに定理 2 を結びつけて,

$$L(1, \bar{x})^2 = \frac{\pi^2}{f} \sum_{p \bmod cf} \sum_{\ell \bmod f} \bar{x}(p) \bar{x}(\ell) \left(\left(\frac{p}{cf} \right) \right) \left(\left(\frac{c\ell + pa}{cf} \right) \right).$$

ここで

$$\chi(n) = \left(\frac{-f}{n}\right) \quad (\text{Kronecker 記号})$$

とする. χ は odd, primitive, real Dirichlet character mod f で,

$$L(1, \chi) = \frac{2\pi h_f}{w_f \sqrt{f}} \quad (\text{Dirichlet}).$$

以上より, 次の定理を得る.

定理 3. $\Gamma(f) \ni \sigma$: odd に対し,

$$h_f^2 = \frac{w_f^2}{4} \sum_{p \bmod cf} \sum_{\ell \bmod f} \left(\frac{-f}{p}\right) \left(\frac{-f}{\ell}\right) \left(\frac{p}{cf}\right) \left(\frac{c\ell + pa}{cf}\right)$$

を得る. ここで, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

特に, $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると

$$h_f^2 = \left\{ -\frac{w_f}{2f} \sum_{p=1}^{f-1} p \left(\frac{-f}{p}\right) \right\}^2.$$

これは, Dirichlet の類数公式'に他ならない. 従って定理はその一般化に相当する.

§ 3. $\Gamma(N)$ に関する Dedekind 和

3.1 一般的な第一種 Fuchs 群に関する Dedekind 和

Kronecker の第一極限公式'

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left\{ y^s \sum'_{m, n=-\infty}^{\infty} |m + n\tau|^{-2s} - \frac{\pi}{s-1} \right\} = 2\pi (c - \log 2 - \log(\sqrt{y} |\eta(\tau)|^2))$$

を一般的な第一種 Fuchs 群の場合に拡張して, Dedekind 和の一般化を得る (c は Euler の定数). 則ち,

Γ : 第一種 Fuchs 群, κ : Γ の cusp

とするとき,

(Γ, κ) に対する極限公式 $\rightarrow \eta(z)$ に類似な関数

\rightarrow 一般化された Dedekind 和.

(A) cusp における Eisenstein 級数

$\kappa_1, \dots, \kappa_h$: Γ の非同値な cusp たち.

$\sigma_i(\infty) = \kappa_i$, $\sigma_i \in SL(2, \mathbb{R})$, ($i=1, 2, \dots, h$),

$\sigma_i^{-1}\Gamma_i\sigma_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\}$, $z = x + iy \in \mathfrak{h}_i^+$, $y(z) = y$

とする。cusp κ_i に関する Eisenstein 級数は,

$$E_i(z, s) = \sum_{\sigma \in \Gamma_i \backslash \Gamma} y(\sigma_i^{-1}\sigma z)^s, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

で定義される。

定理 A. $E_i(z, s)$ は全 s -平面に有理型関数として解析接続でき、 $[0, 1]$ に simple poles をもつ。 $s=1$ には常に pole をもつ。

$E_i(z, s)$ の基本性質:

1) $E_i(\sigma(z), s) = E_i(z, s) \quad \forall \sigma \in \Gamma$;

2) $\Delta E_i(z, s) = s(s-1) E_i(z, s)$, 但し, $\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$;

3) $E_i(\sigma_j(z), s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ij,m}(y, s) e^{2\pi i m x}$;

ここで,

$$a_{ij,m}(y, s) = \begin{cases} \delta_{ij} y^s + \phi_{ij}(s) y^{1-s}, & m=0, \\ 2\pi^s |m|^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)^{-1} y^{\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi |m| y) \phi_{ij,m}(s), & m \neq 0, \end{cases}$$

$$\phi_{ij,m}(s) = \sum_c \frac{1}{|c|^{2s}} \left(\sum_d e^{2\pi i \frac{md}{c}} \right), \quad \left(\begin{matrix} c > 0 \\ d \pmod{c} \end{matrix} \right), \quad \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \sigma_i^{-1} \Gamma \sigma_j$$

$$\phi_{ij}(s) = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \phi_{ij,0}(s)$$

$$K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi u) = \frac{1}{2} \pi^{-s} |u|^{\frac{1}{2}-s} \Gamma(s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i u t}}{(1+t^2)^s} dt \quad (u > 0)$$

ここで, $E_i(z, s)$ に関する極限公式を作るために, $a_{ij,m}(y, 1)$ を求める ($m \neq 0$).

$$\begin{aligned} K_{\frac{1}{2}}(2\pi |m| y) &= (2\pi)^{-1} (|m| y)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i |m| t y}}{(t^2+1)} dt \\ &= \frac{1}{2} (|m| y)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi |m| y} \end{aligned}$$

$$\phi_{ij,m}(1) = \lim_{s \rightarrow 1} \sum_c \frac{1}{|c|^s} \sum_d e^{2\pi i \frac{m d}{c}}$$

従って,

$$\begin{aligned} a_{ij,m}(y, 1) &= 2\pi |m|^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} K_{\frac{1}{2}}(2\pi |m| y) \phi_{ij,m}(1) \\ &= \pi e^{-2\pi |m| y} \phi_{ij,m}(1) \quad (m \neq 0). \end{aligned}$$

(B) (Γ, κ_i) に関する極限公式

$a_{ij,0}(s, y)$ は $s=1$ で simple pole をもち, $a_{ij,m}(s, y)$ ($m \neq 0$) は $s=1$ で連続ゆえ,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \{ E_i(\sigma_j z, s) - a_{ij,0}(y, s) \} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ij,m}(y, 1) e^{2\pi i m x} \\ &= \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(-2\pi |m| x + 2\pi i m x)} \phi_{ij,m}(1) \\ &= \pi \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{ij,m}(1) q^m + \pi \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{ij,-m}(1) q'^m, \quad q = e^{2\pi i z}, \quad q' = e^{-2\pi i \bar{z}}, \\ &= \pi \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{ij,m}(1) q^m + \pi \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\phi_{ij,m}(1)} q'^m. \end{aligned}$$

次に, $a_{ij,0}(y, s)$ を explicit に表わそう:

$$\phi_{ij,0}(s) = \frac{\alpha_{ij}}{s-1} + \beta_{ij} + (\text{higher order terms});$$

$$y^{1-s} = 1 + (\log y^{-1})(s-1) + (\text{higher order terms});$$

$$\Gamma(s - \frac{1}{2}) / \Gamma(s) = \sqrt{\pi} (1 - (2 \log 2)(s-1) + \dots).$$

$$a_{ij,0}(y,s) = \frac{c_{ij}}{s-1} + d_{ij} + (\text{higher order terms})$$

とすると

$$a_{ij,0}(y,s) = \sqrt{\pi} (1 + (\log y^{-1})(s-1) + \dots) \cdot \sqrt{\pi} (1 - (2 \log 2)(s-1) + \dots) \\ \times \left(\frac{\alpha_{ij}}{s-1} + \beta_{ij} + \dots \right) + (\delta_{ij} y + \dots)$$

$$c_{ij} = \pi \alpha_{ij}, \quad d_{ij} = \pi (\beta_{ij} + \alpha_{ij} \log y^{-1} - 2 \alpha_{ij} \log 2) + \delta_{ij} y.$$

よって,

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} E_i(\sigma_j z, s) - \frac{\alpha_{ij}}{2(s-1)} \right\} \\ = \frac{1}{2} \beta_{ij} - \alpha_{ij} \log 2 + \alpha_{ij} \left\{ \frac{1}{2} \log y^{-1} + \frac{y}{2\pi \alpha_{ij}} \delta_{ij} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\alpha_{ij}} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{ij,m}(1) q^m + \frac{1}{2\alpha_{ij}} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\phi_{ij,m}(1)} q'^m \right\}.$$

ここで, $\alpha_{ii} = \alpha_i$, $\beta_{ii} = \beta_i$ とおいて,

$$\log \eta_{\Gamma, i}(z) = -\frac{z}{4\pi i \alpha_i} - \frac{1}{2\alpha_i} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{ii,m}(1) q^m$$

で, (Γ, κ_i) に関する eta 関数 $\eta_{\Gamma, i}$ を定義する。そのとき,

定理 B₁

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} E_i(\sigma_i(z), s) - \frac{\alpha_i}{2(s-1)} \right\} = \frac{1}{2} \beta_i - \alpha_i \log 2 - \alpha_i \log |y^{\frac{1}{2}} \eta_{\Gamma, i}(z)|.$$

定理 B₂ $\sigma_i^{-1} \Gamma \sigma_i \ni \sigma$ に対し,

$$\log \eta_{\Gamma, i}(\sigma(z)) = \log \eta_{\Gamma, i}(z) + \frac{1}{2} \log(cz+d) + \pi i S_{\Gamma, i}(\sigma).$$

ここで, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $S_{\Gamma, i}(\sigma)$ は実数で, s に依存しない。これを (Γ, κ_i) に attach した Dedekind 和という。

N.B. 1) $\phi_{ij}(s) = \frac{\alpha_{ij}}{s-1} + \beta_{ij} + \dots$ とするとき, Maass-Selberg relation より, $\alpha_{ij} = 1/\pi v(h_j^+/\Gamma)$.

2) $S_{\Gamma, i} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は有理数。一般に, arithmetic subgroup

Γ に対し, $S_{\Gamma,i}(\sigma)$ ($\sigma \in \Gamma$) は代数的か?

3) いかなる体の appropriate zeta 関数が $\log \eta_{\Gamma,i}(z)$ に対応するか?

定理 B₃ $\sigma \in \Gamma \ni \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して,

$$\eta_{\Gamma,i}(\sigma(z)) = v(\sigma) \sqrt{cz+d} \eta_{\Gamma,i}(z)$$

$$v(\sigma) = e^{\pi i S_{\Gamma,i}(\sigma)}$$

3.2 $\Gamma(N)$ に関する Dedekind 和とその相互法則

(A) 極限公式と $\log \eta_N$ について

まず次の Eisenstein 級数を導入する。 $g, h \in \mathbb{Z}$, $(g, h, N) = 1$

$$\text{のとき, } E_{g,h}(z, s; N) = \frac{\delta(N)}{2} \sum_{\substack{c, d \in \mathbb{Z} \\ \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \pmod{N} \\ (c, d) = 1}} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}},$$

$$E_{g,h}^*(z, s; N) = \frac{\delta(N)}{2} \sum_{\substack{c, d \in \mathbb{Z} \\ \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \pmod{N}}} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}, \quad \delta(N) = \begin{cases} 1 & (N \leq 2) \\ 2 & (N > 2) \end{cases}$$

簡単な計算により, $\Gamma = \Gamma(N)$ の cusp $k_j = \alpha/\beta$, $(\alpha, \beta) = 1$, に関する Eisenstein 級数 $E_j(z, s)$ は $E_{-\beta, \alpha}(z, s; N)$ であることが分る。

よって $E_{g,h}(z, s; N)$ を Fourier 展開する。 $\mu(n)$ を Möbius 関数として,

$$E_{g,h}(z, s; N) = \sum_{\substack{a \in \Gamma \\ (a, N) = 1}}^N \sum_{\substack{n=1 \\ ah \equiv 1 \pmod{N}}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}} E_{ag, ah}^*(z, s; N).$$

を得る。一方,

$$E_{g,h}^*(z, s; N) = \frac{\delta(N) y^s}{2} \left[\theta_N(g) \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z} \\ d \equiv h \pmod{N}}} |d|^{-2s} + \sum_{\substack{c \in \mathbb{Z} \\ c \equiv g \pmod{N}}} \sum_{\substack{d \in \mathbb{Z} \\ d \equiv h \pmod{N}}} |cz+d|^{-2s} \right],$$

ここで $\theta_N(g)$ は $g \equiv 0 \pmod{N}$ のとき 1, 他では 0 とする。

[] 内第二項の内側に Poisson 和公式を適用して,

$$\frac{y^{1-2s}}{N} \sum'_{\substack{c \in \mathbb{Z} \\ c \equiv g(N)}} |c|^{1-2s} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i m(cx+h)/N} I(s, -\frac{2\pi m|c|y}{N}), \quad I(s, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iuv}}{(u^2+1)^s} du$$

よして,

$$E_{g,h}^*(z, s; N) = \frac{\delta(N)}{2} \left[y^s \theta_N(g) \sum'_{\substack{d \in \mathbb{Z} \\ d \equiv h(N)}} |d|^{-2s} + \frac{y^{1-s}}{N} I(s, 0) \sum'_{\substack{c \in \mathbb{Z} \\ c \equiv g(N)}} |c|^{1-2s} \right] \\ + \frac{y^{1-s} \delta(N)}{2N} \sum'_{m \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i mx/N} I(s, -\frac{2\pi my}{N}) \sum'_{\substack{c \in \mathbb{Z} \\ c \equiv g(N)}} |c|^{1-2s} e^{2\pi i mh/cN}$$

となる。従って,

$$E_{g,h}(z, s; N) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{m,g,h}(y, s; N) e^{2\pi i mx/N}$$

とするとき,

$$a_{0,g,h}(y, s; N) = \frac{\delta(N)}{2} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^N \sum_{\substack{n=1 \\ an \equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{h(n)}{n^{2s}} \left[y^s \theta_N(ag) \sum'_{\substack{d \in \mathbb{Z} \\ d \equiv ah(N)}} |d|^{-2s} + \frac{y^{1-s}}{N} I(s, 0) \right] \\ \times \sum'_{\substack{c \in \mathbb{Z} \\ c \equiv ag(N)}} |c|^{1-2s} \\ a_{m,g,h}(y, s; N) = \frac{y^{1-s} \delta(N)}{2N} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^N \sum_{\substack{n=1 \\ an \equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{h(n)}{n^{2s}} I(s, -\frac{2\pi my}{N}) \sum'_{\substack{c \in \mathbb{Z} \\ c \equiv ag(N)}} |c|^{1-2s} e^{2\pi i ahm/cN}$$

ここで, $E_i(z, s)$ の定義と, $\Gamma(N) \triangleleft SL_2(\mathbb{Z})$ であることより, $\kappa_i = \infty = 1/0$ とすると, $E_i(\sigma_i z, s) = E_i(Nz, s) = E_{0,1}(Nz, s; N)$ となる。よして $\Gamma(N)$ に関する η -関数は cusp によらずに唯一つだけ存在する。それを簡単に η_N と記し, 定理 B₁ における $\alpha_i, \beta_i, \phi_{i,m}$ も夫々 $\alpha_N, \beta_N, \phi_{N,m}$ と記すことにすると

$$a_{m,0,1}(Ny, s; N) = \begin{cases} y^s + \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \phi_{N,0}(s) y^{1-s} & (m=0) \\ 2\pi^s |m|^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)^{-1} \sqrt{y} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y) \phi_{N,m}(s) & (m \neq 0) \end{cases}$$

となる。 $I(s, 0) = \sqrt{\pi} \Gamma(s-\frac{1}{2}) \Gamma(s)^{-1}$ に注意して,

$$\phi_{N,0}(s) = \delta(N) N^{1-3s} \frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \prod_{p|N} (1-p^{-2s})^{-1}$$

となる。従って,

$$\alpha_N = \frac{3\delta(N)}{\pi^2 N^2} \prod_{p|N} (1-p^{-2})^{-1},$$

$$\beta_N = \frac{6\delta(N)}{\pi^2 N^2} \prod_{p|N} (1-p^{-2})^{-1} \left(C - \log N - \prod_{p|N} \frac{\log p}{p^2-1} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right)$$

を得る (Cは Euler の定数)。m ≠ 0 の場合も同様にして、

$$\phi_{N,m}(s) = \frac{\delta(N)}{2N^s} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^N \sum_{\substack{h=1 \\ ah \equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{\mu(h)}{h^{2s}} \sum_{\substack{c|hm \\ c \equiv 0(N)}} |c|^{-2s} e^{2\pi i am/cN}$$

を得る。今、

$$C_{N,r} = \frac{\pi^2}{6} \prod_{p|N} (1-p^{-2}) \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^N \sum_{\substack{h=1 \\ ah \equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{\mu(h)}{h^2} \cos \frac{2\pi ar}{N}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \log \eta_N(z) + \frac{z}{4\pi i \alpha_N} &= -\frac{1}{2\alpha_N} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{N,m}(1) e^{2\pi i m z} \\ &= -\frac{N}{2} \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi i m z} \sum_{\substack{c|hm \\ c \equiv 0(N)}} |c|^{-1} \cdot \frac{\pi^2}{6} \prod_{p|N} (1-p^{-2}) \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^N \sum_{\substack{h=1 \\ na \equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{\mu(h)}{h^2} e^{2\pi i am/cN} \\ &= -N \sum_{m=1}^{\infty} e^{2\pi i m z} \sum_{\substack{0 < c|hm \\ c \equiv 0(N)}} \frac{1}{c} C_{N,m/c} = \sum_{d=1}^{\infty} C_{N,d} \log(1 - e^{2\pi i d N z}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{N-1} C_{N, Nk-r} \log(1 - e^{2\pi i (Nk-r) N z}) = \sum_{r=0}^{N-1} C_{N,r} \log \prod_{\substack{m=1 \\ m \equiv -r(N)}}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m N z}) \end{aligned}$$

定理 $\Gamma(N)$ の cusp k_i に関する Eisenstein 級数を $E_i(z, s)$ とす

るとき $\lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2\pi} E_i(\sigma_i z, s) - \frac{\alpha_N}{2(s-1)} \right) = \frac{1}{2} \beta_N - \alpha_N \log 2 - \alpha_N \log |\sqrt{y} \eta_N(z)|^2$

である。ここで、 $\alpha_N, \beta_N, C_{N,r}$ は上のものとして、

$$\log \eta_N(z) = -\frac{z}{4\pi i \alpha_N} + \sum_{r=0}^{N-1} C_{N,r} \log \prod_{\substack{m=1 \\ m \equiv -r(N)}}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m N z})$$

(B) $\Gamma(N)$ に関する Dedekind 和について

$$\begin{aligned} \log \eta_N(z) + \frac{z}{4\pi i \alpha_N} &= -\sum_{d=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} C_{N,d} \frac{e^{2\pi i dr N z}}{r} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta(2) \prod_{p|N} (1-p^{-2}) \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^N \sum_{\substack{h=1 \\ ah \equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{\mu(h)}{h^2} \left(\sum_{d=1}^{\infty} \zeta_N^{Ad} Q^{rd} + \sum_{d=1}^{\infty} \zeta_N^{-Ad} Q^{rd} \right) \end{aligned}$$

である。 ($\zeta_N = e^{2\pi i/N}$, $Q = e^{2\pi i N z}$)。これと、 $\zeta = \zeta_N, \zeta_N^{-1}$ に対する

$$\operatorname{Im} \sum_{d=1}^{\infty} \zeta_N^{Ad} Q^{rd} = \operatorname{Im} \frac{\zeta_N^{A Q^r}}{1 - \zeta_N^{A Q^r}} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - \zeta_N^{A Q^r}} - \frac{1}{1 - \zeta_N^{-A Q^r}} \right)$$

より次の補助式を得る：

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \log \eta_N(z) &= \frac{z+\bar{z}}{8\pi\alpha_N} - \frac{1}{4i} \zeta(2) \prod_{p|N} (1-p^{-2}) \\ &\quad \times \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \sum_{\substack{A=1 \\ (A,N)=1}}^N \sum_{\substack{n=1 \\ An=1(N)}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \left(\frac{1}{1-\zeta_n^A Q^r} - \frac{1}{1-\zeta_n^{-A} Q^r} + \frac{1}{1-\zeta_n^A Q^r} - \frac{1}{1-\zeta_n^{-A} Q^r} \right). \end{aligned}$$

定理 B₂ において定義された $\eta_N(z)$ の変換公式の中に現われる Dedekind 和を $S_N(\sigma)$ と記し、以下で $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ に対して、 $S_N(\sigma)$ を具体的に表わす。

case I ($c \neq 0$ の場合)

$z = -\frac{d}{c} + \frac{i}{c^2 u}$ とおくと、 $S_N(\sigma)$ が z に無関係であるので、

$$S_N(\sigma) = \frac{1}{\pi} \lim_{u \rightarrow +0} \operatorname{Im} \left[\log \eta_N\left(\frac{a}{c} + iu\right) - \log \eta_N\left(-\frac{d}{c} + \frac{i}{c^2 u}\right) - \frac{1}{2} \log \frac{i}{cu} \right]$$

となる。以下、右辺の各項の値を、上の補助式を用いて具体的に決定していく。まず $u > 0$ より

$$\operatorname{Im} \log \frac{i}{cu} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} c.$$

次に $z = -\frac{d}{c} + \frac{i}{c^2 u}$ のとき、 $Q = e^{-\frac{2\pi N}{c^2} \frac{1}{u}} e^{-\frac{2\pi N d}{c} i} \rightarrow 0$ ($u \rightarrow 0$)

だから、上の補助式より、次を得る：

$$\lim_{u \rightarrow +0} \operatorname{Im} \log \eta_N\left(-\frac{d}{c} + \frac{i}{c^2 u}\right) = -\frac{d}{4\pi\alpha_N c}.$$

最後に $z = \frac{a}{c} + iu$ の場合を考察する。 $W = e^{2\pi i N a/c}$ とおくと、

$Q = W e^{-2\pi u N} \rightarrow W$ ($u \rightarrow 0$ のとき) とわかることと、一般に、 $\eta^k = 1$,

$\eta \neq 1$ ならば

$$\frac{1}{1-\eta} = -\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} j \eta^j$$

であり、 $(\zeta^A W^r)^{|c|N} = 1$ に注意すると、 $\zeta^A W^r \neq 1$ のとき、

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-\zeta^A Q^r} - \frac{1}{1-\zeta^{-A} Q^r} \right] = -\frac{1}{|c|N} \sum_{j=0}^{|c|N-1} j (\zeta^{Aj} W^{rj} - \zeta^{-Aj} W^{-rj})$$

を得るが、 $\zeta^A W^r = 1$ のときも上式は共に 0 となって成り立つ。

結局、補助式'右辺の最後のカッコの中は

$$\begin{aligned} & -\frac{2i}{|c|N} \sum_{j=0}^{|c|N-1} j \left(\sin\left(\frac{2\pi N a j}{c} r + \frac{2\pi j A}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi N a j}{c} r - \frac{2\pi j A}{N}\right) \right) \\ & = \frac{-4i}{|c|N} \sum_{j=0}^{|c|N-1} j \cos \frac{2\pi j A}{N} \sin \frac{2\pi N a j r}{c} \end{aligned}$$

に等しくなり、

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow +0} \operatorname{Im} \log \eta_N\left(-\frac{a}{c} + iu\right) \\ & = \frac{a}{4\pi\alpha_N c} + \frac{1}{|c|N} \sum_{j=0}^{|c|N-1} j \zeta(2) \prod_{p|N} (1-p^{-2}) \sum_{\substack{A=1 \\ (A,N)=1}}^N \sum_{\substack{n=1 \\ An \equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{h(n)}{n^2} \cos \frac{2\pi j A}{N} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi N a j r}{c}}{r} \\ & = \frac{a}{4\pi\alpha_N c} - \frac{\pi}{|c|N} \sum_{j=0}^{|c|N-1} j C_{N,j} \left(\left(\frac{N a j}{c}\right)\right) \end{aligned}$$

を得る。以上まとめて、

$$S_N(\sigma) = \frac{a+d}{4\pi^2\alpha_N c} - \frac{1}{4} \frac{c}{|c|} - \frac{1}{|c|N} \sum_{j=0}^{|c|N-1} j C_{N,j} \left(\left(\frac{N a j}{c}\right)\right).$$

case II ($c=0$ の場合)

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるので、

$$\log \eta_N(\sigma z) + \frac{z+b}{4\pi i \alpha_N} = - \sum_{d,r=1}^{\infty} C_{N,d} \frac{e^{2\pi i d r N(z+b)}}{r}$$

$$\log \eta_N(z) + \frac{z}{4\pi i \alpha_N} = - \sum_{d,r=1}^{\infty} C_{N,d} \frac{e^{2\pi i d r N z}}{r}$$

と、 $\log \eta_N$ の変換公式より

$$S_N(\sigma) = \frac{b}{4\pi^2\alpha_N}$$

を得る。case I, II をまとめて、

定理 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ に対し Dedekind 和 $S_N(\sigma)$ は次で与えられる。

$$S_N(\sigma) = \begin{cases} \frac{b}{4\pi^2\alpha_N} & (c=0) \\ \frac{a+d}{4\pi^2\alpha_N c} - \frac{1}{4} \frac{c}{|c|} - \frac{1}{|c|N} \sum_{j=0}^{|c|N-1} j C_{N,j} \left(\left(\frac{N a j}{c}\right)\right) & (c \neq 0) \end{cases}$$

ただし, $\alpha_N = \frac{3\delta(N)}{\pi^2 N^2} \prod_{p|N} (1-p^{-2})^{-1}$

$$C_{N,j} = \frac{\pi^2}{6} \prod_{p|N} (1-p^{-2}) \sum_{\substack{A=1 \\ (A,N)=1}}^N \sum_{\substack{n=1 \\ An \equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{h(n)}{n^2} \cos \frac{2\pi A j}{N}$$

今, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ に対し, $\Phi_N(\sigma) = 12(S_N(\sigma) + \frac{1}{4} \text{sign } c)$ とおく。 $\sigma_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ ($i=0,1,2$) を $\sigma_0 = \sigma_1 \sigma_2$ となるようにとると, 変換公式より

$$\frac{1}{2} \left\{ (\text{sign } c_0)^2 \log \frac{|c_0 z + d_0 \text{sign } c_0|}{i} - (\text{sign } c_1)^2 \log \frac{|c_1 z + d_1 \text{sign } c_1|}{i} - (\text{sign } c_2)^2 \log \frac{|c_2 z + d_2 \text{sign } c_2|}{i} \right\} = \frac{\pi i}{12} (\Phi_N(\sigma_1) + \Phi_N(\sigma_2) - \Phi_N(\sigma_0))$$

を得る。[26]の(71.61)より左辺 $\{ \}$ の中は

$$\frac{\pi i}{2} \text{sign}(c_0 c_1 c_2)$$

に等しくなる。結局, 次が成り立つ:

定理 (三項関係)

$\sigma_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in \Gamma(N)$ ($i=0,1,2$) で $\sigma_0 = \sigma_1 \sigma_2$ のとき,

$$\Phi_N(\sigma_1) + \Phi_N(\sigma_2) - \Phi_N(\sigma_0) = 3 \text{sign}(c_0 c_1 c_2).$$

(C) $C_{N,j}$ の値と 11 つかの η_N の具体的な形について

$N \leq 2$ の場合, $C_{1,j} = 1$, $C_{2,j} = (-1)^j$ である。

$$\xi_1 = \zeta(2) \prod_{p|N} (1-p^{-2}), \quad a\bar{a} \equiv 1 \pmod{N}, \quad S_a = \xi_1 \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv \pm a(N)}}^{\infty} \frac{h(n)}{n^2}$$

とおく。以下, $N > 2$ とする。

$$C_{N,j} = \xi_1 \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^N \sum_{\substack{n=1 \\ an \equiv 1(N)}}^{\infty} \frac{h(n)}{n^2} \cos \frac{2\pi a j}{N} = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^{\lfloor N/2 \rfloor} S_a \cos \frac{2\pi a j}{N}$$

となる。

χ_ℓ ($\ell=1, \dots, \frac{1}{2}\varphi(N)$) を mod N の指標で、 $\chi_\ell(-1)=1$ となっているものとし、 χ_1 は主指標とする。

$$\xi_\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\ell(n)}{n^2}$$

とおくと、 ξ_1 は上で定めたものと一致する。 $\chi(a)=-\chi(a)$ より、

$$\xi_\ell = \sum_{a=1}^{[N/2]} \chi_\ell(a) \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv \pm a(N)}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{a=1}^{[N/2]} \chi_\ell(a) \sum_{n \equiv a(N)} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{N^2} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,N)=1}}^{[N/2]} \frac{\chi_\ell(a)}{\sin^2 \frac{a\pi}{N}}$$

となり、 $\xi_\ell \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i/N}, e^{2\pi i/\varphi(N)})$ となることが分る。一方、

$$\xi_1/\xi_\ell = \xi_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\ell(n)\mu(n)}{n^2} = \xi_1 \sum_{a=1}^{[N/2]} \chi_\ell(a) \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv \pm a(N)}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \sum_{a=1}^{[N/2]} \chi_\ell(a) S_a$$

すなわち、($\ell=1, \dots, \frac{1}{2}\varphi(N)$; $a=1, \dots, [N/2], (a,N)=1$ と動かす)

これを S_a について解いて、 $C_{N,j}$ の値が計算できる。とくに S_a が、従って $C_{N,j}$ が、従って Dedekind 和 $S_N(\sigma)$ が四分体の数であることが分る。もう少し詳しい計算をすることにより、 $C_{N,j}$ が有理数であることが示される。

$$\text{例. } C_{3,j} = \cos \frac{2\pi j}{3}, \quad C_{4,j} = \cos \frac{\pi j}{2}$$

$$C_{5,j} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cos \frac{2\pi j}{5} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cos \frac{4\pi j}{5}, \quad C_{6,j} = \cos \frac{\pi j}{3}$$

$$\text{例} \quad \eta_1(z) = \eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)$$

$$\eta_2(z) = q^{-1/8} \frac{\eta(4z)^2}{\eta(2z)} = \frac{1}{2} q^{-1/8} \vartheta_2(2z)$$

$$\eta_3(z)^2 = q^{-2/3} \frac{\eta(9z)^2}{\eta(3z)}$$

$$\eta_4(z) = q^{-1/12} \frac{\eta(32z)^2}{\eta(16z)} = \frac{1}{2} q^{-1/12} \vartheta_2(16z)$$

References

- [1] T. M. Apostol, Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series, *Duke Math. J.*, 17 (1950), 147-157.
- [2] T. M. Apostol, Theorems on generalized Dedekind sums, *Pacific J. Math.*, 2 (1952), 1-9.
- [3] K. Barner, Über die Werte der Ringklassen-L-Funktionen reelle-quadratischer Zahlkörper an natürlichen Argumentstellen, *J. Number Theory*, 1 (1969), 28-64.
- [4] B. C. Berndt, Generalized Eisenstein series and modified Dedekind sums, *J. Reine Angew. Math.*, 272 (1975), 182-193.
- [5] L. Carlitz, Some theorems on generalized Dedekind sums, *Pacific J. Math.*, 3 (1953), 513-522.
- [6] L. Carlitz, The reciprocity theorem for Dedekind sums, *Ibid.*, 523-527.
- [7] L. Carlitz, Dedekind sums and Lambert series, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (1954), 580-584.
- [8] L. Carlitz, A note on generalized Dedekind sums, *Duke Math. J.*, 21 (1954), 399-404.
- [9] R. Dedekind, Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann, *Dedekind's Gesammelte Math. Werke*, 1930, vol. 1, 159-173.
- [10] U. Dieter, Das Verhalten der Kleinschen Funktionen $\log \sigma_{g,h}(\omega_1, \omega_2)$ gegenüber Modultransformationen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen, *J. Reine Angew. Math.*, 201 (1959), 37-70.
- [11] L. J. Goldstein, Dedekind sums for a Fuchsian group I, *Nagoya Math. J.*, 50 (1973), 21-47.
- [12] L. J. Goldstein and P. de la Torre, On the transformation of $\log \eta(\tau)$, *Duke Math. J.*, 41 (1974), 291-297.

- [13] L. J. Goldstein and M. Razer, A generalization of Dirichlet's class number formula, *Ibid.*, 43 (1976), 349-358.
- [14] L. J. Goldstein and M. Razer, The theory of Hecke integrals, *Nagoya Math. J.*, 63 (1976), 93-121.
- [15] F. Hirzebruch, The signature theorem : reminiscences and recreation, in *Prosprcts in Math.*, Ann. of Math. Studies No.70, Princeton Univ. Press (1971), 3-31.
- [16] F. Hirzebruch and D. Zagier, The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory, Math. Lecture Series 3, Publish or Perish, Inc., Boston, 1974.
- [17] C. Meyer, Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen, *J. Reine Angew. Math.*, 198 (1957), 143-203.
- [18] C. Meyer, Die Berechnung der Klassenzahl Abelscher Körper über quadr. Zahlkörpern, Akademie-Verlag, Berlin, 1957.
- [19] C. Meyer, Bemerkungen zu den allgemeinen Dedekindschen Summen, *J. Reine Angew. Math.*, 205 (1960), 186-196.
- [20] M. Mikolás, On certain sums generating the Dedekind sums and their reciprocity laws, *Pacific J. Math.*, 7 (1957), 1167-1178.
- [21] M. Mikolás, Über gewisse Lambertsche Reihen, I : Verallgemeinerung der Modulfunktion $\eta(\zeta)$ und ihrer Dedekindschen Transformationsformel, *Math. Z.*, 68 (1957), 100-110.
- [22] L. J. Mordell, On the reciprocity formula for Dedekind sums, *Amer. J. Math.*, 73 (1951), 593-598.
- [23] L. J. Mordell, Lattice points in a tetrahedron and generalized Dedekind sums, *J. Indian Math. Soc.*, 15 (1951), 41-46.
- [24] H. Rademacher and A. Whiteman, Theorems on Dedekind sums, *Amer. J. Math.*, 63 (1941), 377-407.
- [25] H. Rademacher and E. Grosswald, *Dedekind Sums*, The Math. Association of America, 1972.

- [26] H. Rademacher, *Topics in Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973.
- [27] L. Rédei, Elementarer Beweis und Verallgemeinerung einer Reziprozitätsformel von Dedekind, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 12(B) (1950), 236-239.
- [28] G. J. Rieger, Dedekindsche Summen in algebr. Zahlkörpern, *Math. Ann.*, 141 (1960), 377-383.
- [29] B. Schoeneberg, Verhalten von speziellen Integralen 3. Gattung bei Modultransformationen und verallgemeinerte Dedekindsche Summen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 30 (1967), 1-10.
- [30] R. Sczech, Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen, *Invent. Math.*, 76 (1984), 523-551.
- [31] R. Sczech, Dedekind sums and power residue symbols, *Univ. of Maryland*, TR85-4, January 1985, 32p.
- [32] A. Weil, Sur une formule classique, *J. Math. Soc. Japan*, 20 (1968), 400-402.
- [33] K. Wohlfahrt, Über Dedekindsche Summen und Untergruppen der Modulgruppe, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 23 (1959), 5-10.
- [34] D. Zagier, Higher-dimensional Dedekind sums, *Math. Ann.*, 202 (1973), 149-172.