

Haken 多様体の Heegaard 分解と torus 分解

阪大理 小 林 毅 (Tsuyoshi Kobayashi)

1. 筆者は、研究集会下の講演下 Haken 多様体の Heegaard 分解 (H.S.) と torus 分解に関するいくつかの結果を報告したが、本稿下は、以下のうち次の命題の証明を紹介する。詳しくは、preprints $[K_1, K_2]$ に参照された。

命題: $(V_1, V_2: F)$ を Haken 多様体 M の genus g H.S., また \mathcal{T} を M の torus 分解を与える torus の system とする。 \mathcal{T} は $3g-4$ 個以上の成分を含むとする。この時 \mathcal{T} の成分下 Heegaard surface F と a circle が交わるような位置にも、 \mathcal{T} の成分の存在する。

2. Incompressible surfaces and isotopies of type A

S を (必ずしも連結とは限らない) 2-manifold, a を S に proper に埋め込まれた arc とする。 ∂S 上の arc h が $a \cup h$ が S 上の a disk の境界になつて居るものがあるとき a は, inessential と呼ばれる。 a は, inessential ではないとき essential と呼ばれる。 S の partial hierarchy とは, 2-mf. と

その中の essential arc の pair の列:

$$(S^{(0)}, a_0), \dots, (S^{(m)}, a_m)$$

で $S^{(0)} = S$, かつ $S^{(i+1)}$ は $S^{(i)}$ を a_i で切り開いて得られた様なものとする。A partial hierarchy $(S^{(0)}, a_0), \dots, (S^{(m)}, a_m)$ が hierarchy とは, $S^{(m+1)}$ の各成分が disk である事とする。

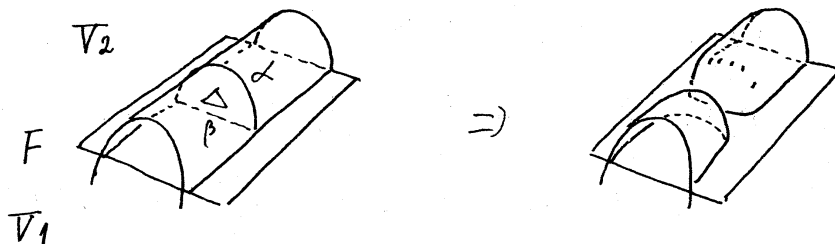
M を closed 3-mfld. とし $(V_1, V_2; F)$ を M の H.S. とする。

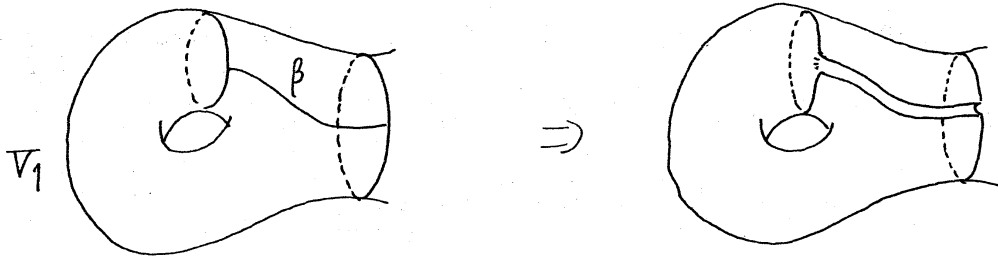
また S を M 内の incompressible surface とする。いま F と S は, transverse に交り, M 内の disk Δ 以下の様なものがとれたとする。

(i) $\Delta \cap S = \alpha$ は, $\partial\Delta$ 内の an arc,

(ii) $\Delta \cap F = \beta$ は, $\partial\Delta$ 内の an arc で $\partial\alpha = \partial\beta$, $\alpha \cup \beta = \partial\Delta$ をみたす。

この時, α 下の Δ に沿っての isotopy of type A とは, α を Δ に沿って滑らせて β を通り越させる様な M の ambient isotopy とする。いま $\Delta \subset V_2$ とし S' を上の isotopy による S の image とする。この時, $S' \cap V_2$ は $S \cap V_2$ を α に沿って切り開いた 2-mfld. になり, $S' \cap V_1$ は, $S \cap V_1$ に β に沿って band をつけた 2-mfld. になる。





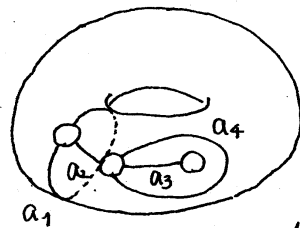
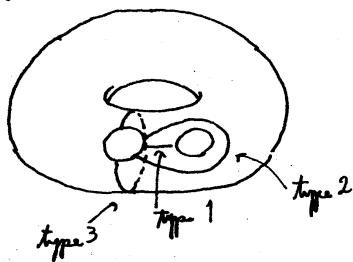
いま V_2 を十分'細く'とる事により $S \cap V_2$ の各成分は, disk と仮定出来る。また M は, irreducible とすると S を isotopy 下動かして $S_1 = S \cap V_1$ は, V_2 下 incompressible と出来る。この時:

" S_1 の hierarchy と γ の "実現" する様な M の isotopy of type A の列が存在する。 "

① まず次の事に注意する。 " E を V_2 に (proper に) 埋め込まれた incompressible, ∂ -incompressible surface とする。この時 E は disk " (証明略) いま S_1 は V_1 下 incompressible だが, 上の注意より S_1 は a union of disks, or S_1 は ∂ -compressible。 S_1 が ∂ -compressible の時, Δ を $S_1 (\subset V_1)$ の ∂ -compression disk とすると $(S_1, S_1 \cap \Delta)$ は, 求める hierarchy の第一段階となり Δ が γ の実現する isotopy of type A を定める。以下 V_1 との交わりが全て disks になる迄同様の議論を繰り返せばよい。

$(S_1^{(0)}, a_0), \dots, (S_1^{(m)}, a_m)$ を上の様にして得られる S_1 の hierarchy とする。この時, isotopy of type A を実現する disks を適当に取り換える事により $a_i \cap a_j = \emptyset (i \neq j)$ としよ。従

γ , a_1, \dots, a_m は, S_1 に *proper* に埋め込まれた arcs の system と考えられる。 an arc a_i を含む S_1 の成分を \bar{S} とする。
 a_i は, $\partial\bar{S}$ の相異なる成分を結ぶ時 type 1, $\partial\bar{S}$ の一つの成分を結び \bar{S} を separate する時 type 2, $\partial\bar{S}$ の一つの成分を結び \bar{S} を separate しない時 type 3 と呼ばれる。 A を a_1, \dots, a_m の subsystem, とし $a_i \in A$ とする。 この時, a_i が d-arc related なる A とは, $\cdot a_i$ は type 1, かつ $\cdot \partial\bar{S}$ の成分 C 下 a_i が C を結ぶ A の唯一の成分となる様なものが存在する 事とする。



a_3 : d-arc related to
 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$A_p = \{a_0, \dots, a_p\}$ ($0 \leq p \leq m$) とおく。 この時:

Lemma 2.1. ある a_i 下 A_p ($i \leq p$) の d-arc になつてゐる様なものがあつたとする。 この時 S を isotopy 下次の様な S' にまで動かせる:

- $S' \cap V_2$ の各成分は, disk,
- $\#(S' \cap V_2) < \#(S \cap V_2)$

証明. これは, [0] の議論により証明出来る。

3. Torus decompositions of Haken manifolds.

この節下は, M は, Haken 多様体とし $T_1, \dots, T_e \in M$ に埋め込まれた disjoint tori, $J = T_1 \cup \dots \cup T_e$ とする。前節の議論より $J_1 = J \cap V_1$ の各成分は, disk, $J_2 = J \cap V_2$ の各成分は,

V_2 \uparrow incompressible とし \uparrow よい。また J_2 の hierarchy $(J_2^{(0)}, a_0), \dots, (J_2^{(m)}, a_m)$ と \uparrow \uparrow \uparrow を実現する isotopy of type A の列が存在する。この時, a_i \uparrow isotopy of type A を行なう事により V_1 側に band が生じるが この band を b_i と書く事にする。また a_i が type 1, 2, 3 に従, \uparrow b_i を type 1, 2, 3 と呼ぶ事にする。さらに $a_i \cap a_j = \emptyset$ ($i \neq j$) とし a_0, \dots, a_m を J_2 上の arcs と考えて $A_p = \{a_0, \dots, a_p\}$ ($0 \leq p \leq m$) とおく。

Lemma 3.1. (1) A_m の中に type 2 arc が存在したとする。

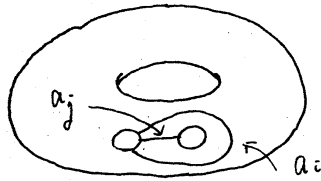
この時 J を ambient isotopy 下動かして次のような J' を持つ。

\uparrow ける:

- $J' \cap V_1$ の各成分は, disk,
- $\#(J' \cap V_1) < \#(J_1)$

Proof. a_i を type 2 arc とし T を a_i を含む J_2 の成分とする。この時 a_i は T を punctured torus と planar surface P に分ける。この時 ∂P の成分の個数に関する帰納法に

より P に含まれる arc a_j は d -arc related to A_m になり、7) のものが存在する。従って Lemma 2.1 より Lemma 3.1 は証明される。



Lemma 3.2. $C \in \mathcal{M}_2$ の一つの成分とし、 $a_i \in C$ に会う最初の arc とする。(RP 3, $a_i \cap C \neq \emptyset$, $a_j \cap C = \emptyset$ ($\forall j < i$)). もし a_i が type 3 arc となれば \mathcal{M} は, Lemma 3.1 の様な \mathcal{M}' に ambient isotopic.

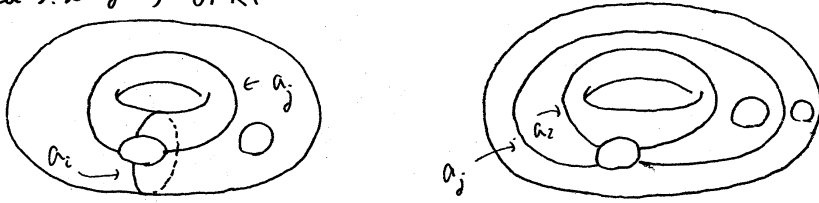
Proof. もし a_i が type 2 なら Lemma 3.1 より O.K. もし a_i が type 1 なら a_i は d -arc related to A_i となるから Lemma 2.1 より O.K.

Lemma 3.3 T を \mathcal{M} の一つの成分とし $T_2 = T \cap \mathcal{V}_2$ とおく。特に ∂T_2 は, 二つ以上の成分を持つとする。いま ∂T_2 の成分 C 下二つの type 3 arcs a_i, a_j が出ている様なものが存在したとする。この時, \mathcal{M} は, Lemma 3.1 の様な \mathcal{M}' に ambient isotopic

Proof. $D \in T \cap \mathcal{V}_1$ の成分 T $\partial D = C$ とするものとし, $T' =$

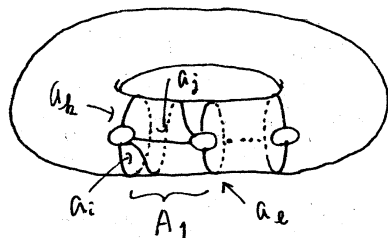
$\mathcal{L}(T-D)$ とする。この時 $a_i \cup a_j$ は, T' を "a disk" 又は "a disk と an annulus" に切り開く。ところが, (1) ずれの場合も disk に含まれる ∂T_2 の成分は, type 3 arc と交わり得る):

Lemma 3.2 より O.K.



Lemma 3.4. \mathcal{J}_2 の成分 \mathcal{C} 下三つの type 1 arcs a_i, a_j, a_k が \mathcal{J} と交わる様なものが存在したとする。この時 \mathcal{J} は, Lemma 3.1 の様な \mathcal{J}' に ambient isotopic.

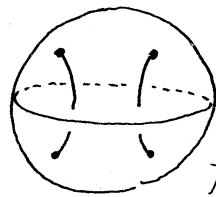
Proof. T を a_i, a_j, a_k を含む \mathcal{J} の成分とし $T_2 = T \cap \mathcal{V}_2$ とする。Lemma 3.2, 3.3 より ∂T_2 の各成分に対し \mathcal{J} と交わる type 3 arc が唯一存在するとしてよい。 \mathcal{C} を \mathcal{J} の type 3 arcs の union とする。この時, \mathcal{C} は, T_2 を annuli A_1, \dots, A_r に切り開く。この時 $a_i, a_j \subset A_1$ ($i < j$) としてよい。



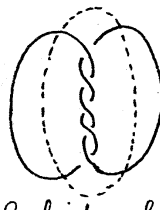
この時, 上の図のように type 3 arcs a_k, a_l を定める。今, $i < k$ 或 $i < l$ とすると a_i は d -arc related to A_i となり Lemma 3.2 より O.K. $i > k, l$ とすると a_j は, $\mathcal{J}_2^{(1)}$ の中の inessential

arc とちり矛盾.

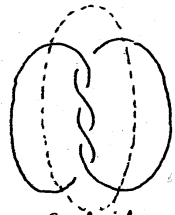
次の Lemma は, 2-bridge knot (or link) は, 二つの 2 trivial strings をもつ trivial tangles の和で書ける事より容易に証明出来る。



trivial tangle



2-bridge knot



2-bridge link

Lemma 3.5 V を orientable genus two handlebody, $A_1, A_2 \in \partial V$ 上に埋め込まれた互いに交わりな $い$ annulus 下 V に proper に embed された disks D_1, D_2 下次の様なものが存在するとする:

- $D_1 \cup D_2$ は, V を a 3-cell に切り開く.
- $D_i \cap A_i$ ($i=1, 2$) は, A_i 内の essential arc.
- $D_i \cap A_j = \emptyset$ ($i, j=1, 2, i \neq j$).

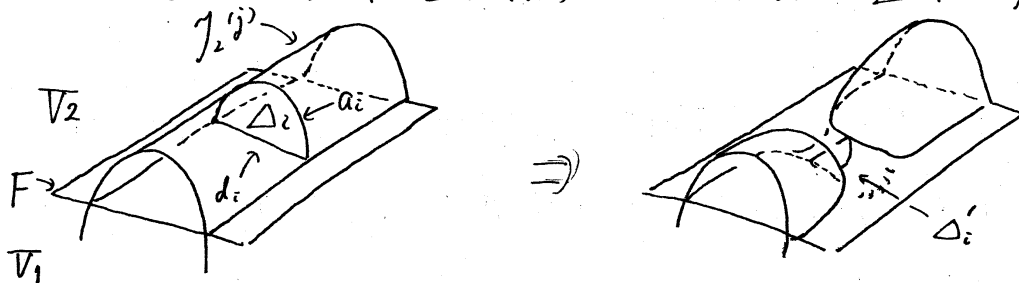
また ℓ を $\mathcal{L}(\partial V - (A_1 \cup A_2))$ 上の simple loop 下 $\mathcal{L}(\partial V - (A_1 \cup A_2))$ を二つの disk with two holes に切り開くものとする。この時 V に ℓ に沿って 2-handle を attach して得られる 3-mfd. N はある 2-bridge link (or knot) の exterior に同相である。特に A_i の core は, その link (or knot) の meridian に対応している。

命題 3.6. 以上の状況の下, 特に \mathcal{J} は, M の torus 分解を与えているとし $\mathcal{J}_1 (= \mathcal{J} \cap V_1)$ の成分の個数は minimal である。

とする。また \mathcal{M}_1 の四つの成分 D_1, D_2, D_3, D_4 は, V_1 の中互いに parallel とする。この時, \mathcal{M} の成分 $T \subset T \cap V_1 = D_i$ ($i=1, 2, 3, \text{ or } 4$) とするものが存在する。

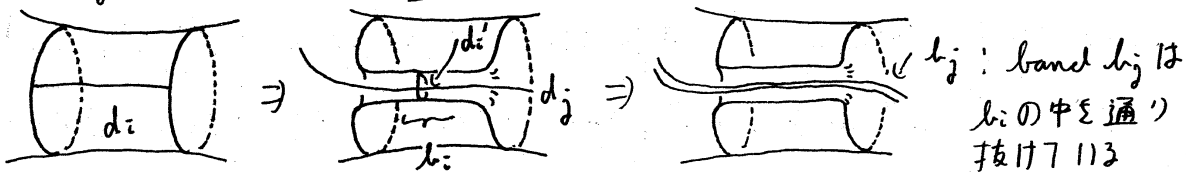
証明略.

$\mathcal{M}^{(0)} = \mathcal{M}$ とし $\mathcal{M}^{(j)}$ を $\mathcal{M}^{(j-1)}$ の a_{j-1} 上 isotopy of type A を行った後の image とする。この時 isotopy of type A の定め方より $\mathcal{M}^{(j)} \cap V_2 = \mathcal{M}^{(j-1)}$ とする。 Δ_i を a_i 上 isotopy of type A を定める disk とする。(i.e. $\mathcal{M}^{(j)} \cap \Delta_i = a_i, \Delta_i \cap F = d_i$: an arc s.t. $\partial a_i = \partial d_i, a_i \cup d_i = \partial \Delta_i$) Δ_i' を Δ_i の dual disk (下図参照) とする。(i.e. $\Delta_i' \cap (\mathcal{M}^{(j+1)} \cap V_1)$



$= a_i'$: an arc, $\Delta_i' \cap F = d_i'$: an arc s.t. $\partial a_i' = \partial d_i', a_i' \cup d_i' = \partial \Delta_i', \Delta_i' \cap \Delta_j' = \emptyset$)

この時 $d_i \cap d_i' = \text{a point}$, また $d_0, \dots, d_m, d_0', \dots, d_m'$ は, 互いに general position にあるとする。また $j > i$, $d_i \cap d_j \neq \emptyset$ とする時 band b_{ij} は b_i の中を通り抜けるという事にする。



(1) ま hierarchy $(\mathcal{J}_2^{(0)}, a_0), \dots, (\mathcal{J}_2^{(m)}, a_m)$ を実現する互いに disjoint な disks $\Delta_0, \dots, \Delta_m$ の complexity $C(\Delta_0, \dots, \Delta_m)$ を次で定める。

$$C(\Delta_0, \dots, \Delta_m) = \sum_{i=0}^{m-1} \# \{d_i' \cap (\bigcup_{j=i+1}^m d_j)\}$$

即ち $C(\Delta_0, \dots, \Delta_m)$ は, bands $b_0 \cup \dots \cup b_{m-1}$ が bands $b_2 \cup \dots \cup b_m$ の中を通り抜ける回数を表わす。この時

Lemma 3.7 D を \mathcal{J}_1 の成分とし b_{j_m} 下 D に m 番目に attach される band を表わす。 (1) ま b_{j_k} ($k \geq 1$) は type 1 とし, 各 k ($k < k$) に対して b_{j_k} は b_{j_k} の中を通り抜けるものとする。この時 \mathcal{J} は Lemma 3.1 の様な \mathcal{J}' に ambient isotopic.

証明略

Lemma 3.8. $F \cap \mathcal{J}^{(1)} = \partial(\mathcal{J}^{(1)} \cap \mathcal{V}_1) = \partial(\mathcal{J}^{(1)} \cap \mathcal{V}_2)$ を考える。 (1) ま F 上の rectangle R 下次の様なものが存在したとする:

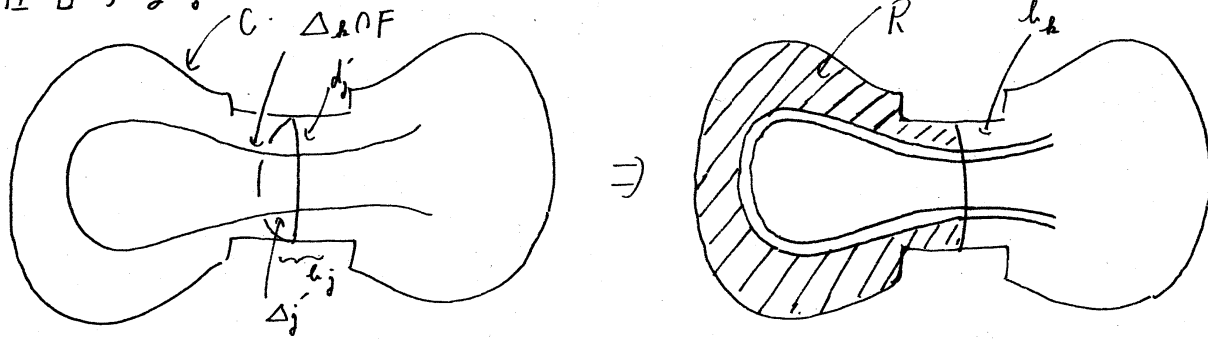
- $\text{Int } R \cap \mathcal{J}^{(1)} = \emptyset,$
- R の相対する二つ辺下 d_j' ($j < i$) に含まれるものがある,
- R の一つの辺は band b_k ($i < k < i$) の boundary に含まれる,
- R の残りの辺は $\mathcal{J}^{(1)} \cap \mathcal{V}_2$ の disk component D の boundary C に含まれる。

この時 M 内の互いに disjoint な disk の system $\{\bar{\Delta}_0, \dots, \bar{\Delta}_m\}$ 下 hierarchy $(\mathcal{J}_2^{(0)}, a_0), \dots, (\mathcal{J}_2^{(m)}, a_m)$ を実現しかつ $C(\bar{\Delta}_0, \dots, \bar{\Delta}_m) <$

$C(\Delta_0, \dots, \Delta_m)$ とした様なものが存在する。

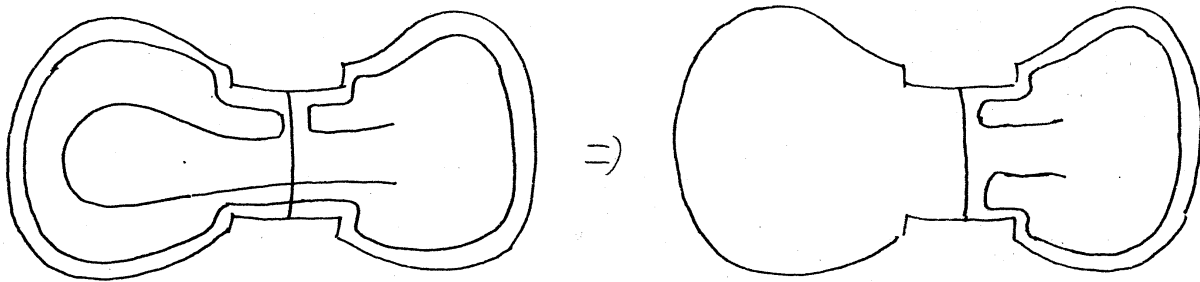
証明の idea R 上の isotopy of type A を実現させる disk Δ_k に

注目する。



この時 Δ_k を R に対応する band が下図の通りに取り換える

換える



また Δ_k にあわせて $\Delta_{k+1}, \dots, \Delta_m$ も適当に取り換える。

4. Find an incompressible torus which intersects the Heegaard surface in a circle.

この節では、一節下述べた命題の証明を与える。 $\gamma, \gamma_i, (\gamma_i^{(0)}, a_0), \dots, (\gamma_i^{(m)}, a_m), \Delta_i, \Delta_i'$ をこの節の通りとする。 1) ま $\gamma' = \gamma^{(m+1)}$ とし $\gamma_i' = \gamma' \cap V_i (i=1, 2)$ とすると $\Delta_m', \dots, \Delta_0'$ は γ_i'

の hierarchy と \mathcal{F} を実現する isotopy of type A の列を定める。この時:

Lemma 4.1. $C(\Delta_0, \dots, \Delta_m) = C(\Delta'_0, \dots, \Delta'_m)$

証明略

Lemma 4.2 (i) \mathcal{J}_1 の成分の個数は最少とする。この時 $\partial\mathcal{J}_1 (= \partial\mathcal{J}_2)$ の成分の parallel class は高々 $3g-5$ 個。

(Remark: F は $3g-3$ 個の互いに non-parallel な simple loops を含み得る。)

証明略

Lemma 4.3 (i) \mathcal{J}_1 の成分の個数は、最少とする。また \mathcal{J}_1 の3つの成分 D_1, D_2, D_3 上 V_1 上互いに parallel なものがあつたとする。(D_1, D_2, D_3 は、この順に V_1 の中に入り、かつ D_1 の置かぬ方向を '左', D_3 の置かぬ方向を '右' と呼ぶ事にする) (ii) \mathcal{J} の各成分は、 V_1 と a disk 上は、交わらないとし、 b_{j_m} を $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ に m 番目に attach される band とする。この時 (適当に添字を付け換える事により) 次の成立する:

(i) b_{j_i} ($i=1, 2, 3$) は D_i に attach される結果として annulus

A_i が生じる,

(ii) A_1 と A_2 は, V_1 の中で *parallel*,

(iii) h_{j_1} (h_{j_2} resp.) は D_1 (D_2 resp.) の左側に attach され h_{j_3} は, D_3 の右側に attach される, $(D_1 \text{ と } D_2 \text{ resp.})$

(iv) M_1 $\left[\begin{array}{l} \text{は } M_1 \\ \text{resp.} \end{array} \right]$ の成分 D_2 と D_3 の間の *product region* を含むものの *closure* とする。この時 M_1 はある *2-bridge knot* の *exterior* に同相で特に A_i ($i=2,3$) の *core* は, *meridian loop* に対応している。また M_2 は, A_j ($j=1,2$) が *fiber* の union である様な *Seifert fibration* を許容する。

証明略

命題の証明

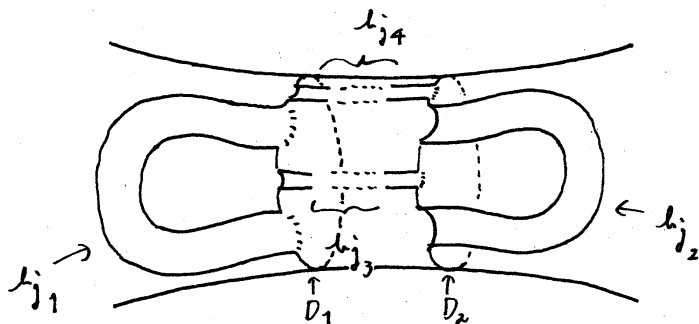
今, 命題の結論が成立しないとする。この時, \mathcal{J}_i ($i=1,2$) $(\mathcal{J}_2^{(0)}, a_0), \dots, (\mathcal{J}_2^{(m)}, a_m)$ $\left[\begin{array}{l} \text{は } 3 \text{ 節の通りとする。} \\ \text{resp.} \end{array} \right]$ また (\mathcal{J}_1) 下 \mathcal{J}_1 の成分 (= *disk*) の個数を表わす事にする。この時, pair $(\mathcal{J}_1, (\Delta_0, \dots, \Delta_m))$ の *complexity* を $(\mathcal{J}_1), (\Delta_0, \dots, \Delta_m)$ に辞書式順序を入れたものとして定める。そして $(\mathcal{J}_1, (\Delta_0, \dots, \Delta_m))$ は, この *complexity* に関して *minimal* とする。

ここで \mathcal{J}_1 の各成分は, V_1 と二個以上の成分で交わる事から $(\mathcal{J}_1) \geq 6j-8$ になる。また命題 3.6 より \mathcal{J}_1 の四つの成分が V_1 下互いに *parallel* になる事はない。今, 特に, \mathcal{J}_1

の三つの成分が V_1 の中下互いに *parallel* になる事は、ないとする。すると Lemma 4.2 より $c_1(\gamma) \leq 6g - 10$ となり上の不等式に矛盾。従って、 γ 以下下互いに *parallel* な三個の γ_1 の成分を調べる事にする。

少し、用語を準備する。 D_1, D_2 を互いに *parallel* な γ_1 の成分とする。 D_1 の置かれている方向を '左', D_2 の置かれている方向を '右' と呼び、 h_{j_m} が $D_1 \cup D_2$ に m 番目に *attach* される *band* を表わす。この時、Lemma 3.2 より h_{j_1} は、*type 3 band* が D_1 の左側に *attach* される結果として *incompressible annulus* A_1 が生じるとしてよい。この時、 h_{j_2} も *type 3 band* が D_2 に *attach* される。特に h_{j_2} が D_2 の右側に *attach* される時 "pair $\{D_1, D_2\}$ は、 $\{(\gamma_2^{(n)}, a_i), \Delta_i\}$ の中下 type * がある" という事にする。さて次の事実に注意する。

Claim $\{D_1, D_2\}$ は $\{(\gamma_2^{(n)}, a_i), \Delta_i\}$ の中下 type * とする。この時、 h_{j_3}, h_{j_4} は、 D_1 の右側と D_2 の左側に *attach* される。



Proof of Claim : Lemma 3.7 より h_{j_3} は、Claim の様に *attach* される。

(証明略)

ける事がわかる。従って、いま h_{j_4} は、 D_1 の左側と D_2 の右側の間に attach されたとする。(注意: この時 h_{j_4} の中を通る band は、存在しない) Lemma 3.7 より h_{j_4} は h_{j_3} の中を通り抜ける事がわかる。他方 D_1 の右側と D_2 の左側の間に attach される band h_{j_3} と parallel となる様なもの (即ち前頁の図の h_{j_4} の様な band) を h_{j_4}' と書く事にする。この時 h_{j_4}' が h_{j_4+1}, \dots, h_m を通り抜ける回数は、 h_{j_4} が h_{j_4+1}, \dots, h_m を通り抜ける回数より直に少なくなる。そこで $\gamma^{(m+1)} = \gamma'$ を isotopy で変形する事により、 $\gamma'' \cap V_1$ は γ_1 に bands $h_0, h_1, \dots, h_{j_4-1}, h_{j_4}', h_{j_4+1}, \dots, h_m$ を attach したものに成っている様な γ'' に動かせる。しかしこれは $(\Delta_0, \dots, \Delta_m)$ の最少性に矛盾。

1) 以上の様な $D_1 \cup D_2$ に bands $h_{j_1}, h_{j_2}, h_{j_3}, h_{j_4}$ を attach する事により twice punctured torus が得られるが今や \mathcal{N} を \mathcal{Q} と書く事にする。この時 Claim より $\partial \mathcal{Q}$ は、 F 上下互いに parallel な loops. また $\partial \mathcal{Q}$ は、 $\gamma_2' = \gamma_2^{(m+1)}$ の成分 D_1', D_2' を bound する。いま Δ_i', a_i' を三節のようにとる。この時 $\Delta_m', \dots, \Delta_0'$ は γ_1' の hierarchy と \mathcal{N} を実現する isotopy of type A の列を定めるが Claim より次かわかる。

(*) pair D_1', D_2' は $\{ \gamma_1^{(m+1-i)}, a_{m-i}' \}_{i=0}^m$ の中で type * $\{E_1, \dots, E_r\}$ ($\{E_1', \dots, E_r'\}$ resp.) を V_1 (V_2 resp.) の中での

\mathcal{M}_1 (\mathcal{M}'_2 resp.) の parallel classes とする。また, この時, $\{E_1, \dots, E_q\}$ ($\{E'_1, \dots, E'_q\}$ resp.) は $type * pair$ ^{diads} を含む parallel classes かつ n なる subset とする。すると (*) より自然な対応 $\mathcal{P}: \{E_1, \dots, E_q\} \rightarrow \{E'_1, \dots, E'_q\}$ が存在する事がわかる。 \mathcal{M}'_2 の四つの成分が互いに parallel である事か \mathcal{P} は 1-1 となる事がわかる。また (*) を二回 apply する事により \mathcal{P} は onto かわかる。従って $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$ となる。この時特に $\mathcal{P}(E_i) = E'_i$ ($1 \leq i \leq q$) としてよい。また Lemma 4.3 より三個 parallel な成分を含む class は, $\{E_1, \dots, E_q\}$ (or $\{E'_1, \dots, E'_q\}$) に属する事がわかる。以上より各 i ($1 \leq i \leq q$) に対し $\{E_i, E'_i\}$ は次の四つのいずれかの $type$ である。

$type 1.$ E_i, E'_i とともに丁度二個の成分を含む。

$type 2.$ E_i, E'_i とともに丁度三個の成分を含む。

$type 3.$ E_i は丁度二つ, E'_i は丁度三個の成分を含む。

$type 4.$ E_i は丁度三個, E'_i は丁度二個の成分を含む。

いま Lemma 4.1 より次を仮定してよい。

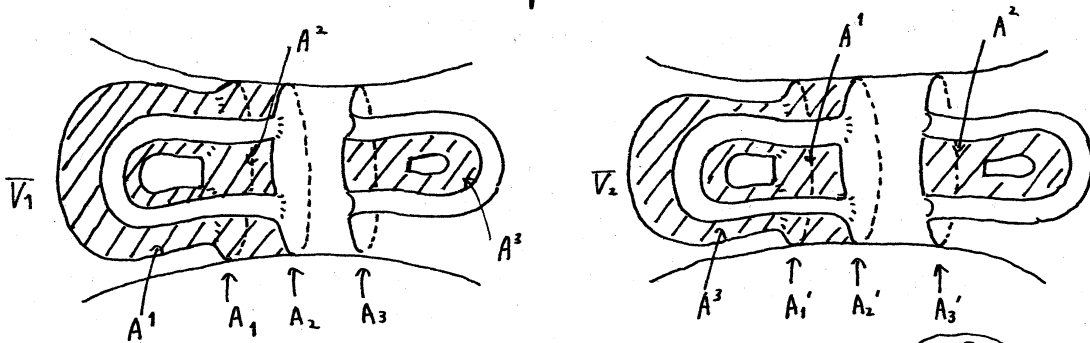
(**) $\#\{E_i \mid E_i \text{ は } type 3\} \geq \#\{E_i \mid E'_i \text{ は } type 4\}$

以下命題の証明の為上の $type 2, 3$ を詳しく調べる事にする。

$type 2$ $\{E_i, E'_i\}$ は $type 2$ として \mathcal{M}_1 の成分 D_1, D_2, D_3 は, E_i また \mathcal{M}'_2 の成分 D'_1, D'_2, D'_3 は, E'_i に属するとする。また $\{D_2, D_3\}$ ($\{D'_2, D'_3\}$ resp.) は, $type * pair$ とする。いま Lemma 4.3 のように $band b_{j_i}$ が $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ に attach されるとする。する

と A_1 と A_2 は, V_1 下 parallel より $\partial A_1 \cup \partial A_2$ は, F 上の互いに disjoint な annuli A^1, A^2 を cobound する。今 $\mathcal{J}^{(j_3+1)} \cap V_2$ を見てやる。この時 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ の位置と 14頁の Claim より $\mathcal{J}^{(j_3+1)} \cap V_2$ の成分下次のような annuli A_1', A_2', A_3' が存在する事がわかる。

- A_i' ($i=1,2,3$) は, D_i' に type 3 band を attach して得られる。
- A_1' と A_2' は, V_2 下 parallel.



この時 $\partial A_1' \cup \partial A_2'$ は, F 上の互いに disjoint な ^{二個の} annuli を cobound するが, その一つは A^1 としてよい。そこで残る一つを A^3 と書く事にする。(注: $A^3 \neq A^2$) 11頁 D_1, D_2, D_3 下 D_1 の置かれていた方を '左', D_3 の置かれていた方を '右' と呼ぶ事にする。

この時, 14頁 Claim の証明より, h_{j_4}, h_{j_5} は, D_2 の右側と D_3 の左側の間に attach されるとしてよい。すると:

Assertion 1 h_{j_4} は, type 1 band 下 D_1 の右側に attach される。
(証明略)

11頁 D_1 と異なる, h_{j_1} の attach される \mathcal{J}_1 の成分を D_4 とすると:

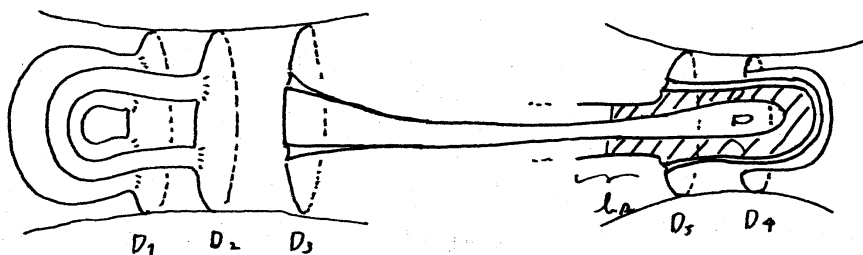
Assertion 2 \mathcal{J}_1 の成分下 D_1 に parallel なものは (D_1 以外に) ない。

Proof. \mathcal{J}_1 の成分 $D_5 (\neq D_4)$ は, D_4 に parallel とする. D_4 と D_5 の間には \mathcal{J}_1 の成分は, 存在しないとする. また $D_4 \cup D_5$ に i 番目に attach される band を h_{2i} とする. この時, h_{2i} (h_{2i+1} resp.) は D_4 (D_5 resp.) に attach される annulus A_i (A_{i+1} resp.) になるとしてよい. 今, D_4 と D_1 の間に type 1 band h_{j_1} が存在する事より $\{D_4, D_5\}$ は type * pair となる. 従って A_4 と A_5 は V_1 上 parallel. 今 D_4 (D_5 resp.) の置かぬ方を '右' ('左' resp.) と呼ぶ事にする.

h_{j_1} は, D_4 の右側に attach されたせよ. (1) M_1 (M_2 resp.) を $M - \mathcal{J}^{(k_2+1)}$ の成分の closure 上 A_1 と A_2 (A_4 と A_5 resp.) の間の product region を含むものとする. この時 \mathcal{J}_1 の最小性より M_1 (M_2 resp.) は A_1 (A_4 resp.) が fiber の和である様な Seifert fibration を許容する事がわかる. 従って M_1 の Seifert fibration は $2M_1$ の成分を通して M_2 にのびる. これは torus 分解の定義に矛盾.

(A^3 の存在より)

h_{j_1} は, D_4 の左側に attach されるとする. この時 type 1 band h_{2i} ($k_2 < i < j_2$) 上 D_5 の左側に attach され, その中を h_{j_1} が通り抜ける様なものがある. すると $\mathcal{J}^{(j_2+1)} \cap F$ 上

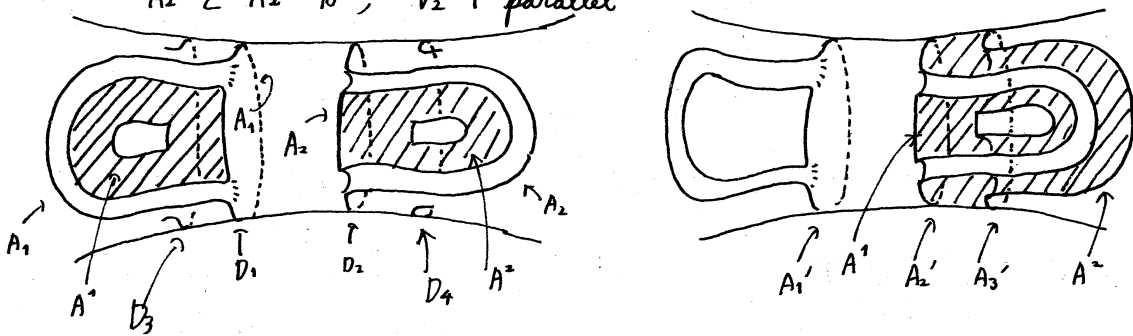


Lemma 3.8 の仮定をみたす *rectangle* が見出せるが、これは、
 $(\Delta_0, \dots, \Delta_m)$ の最小性に矛盾。

以上 Assertion 2 の証明終り。

type 3 $\{E_i, E_i'\}$ は, type 3 とし γ_1 の成分 D_1, D_2 は E_i , γ_2' の成分 D_1', D_2', D_3' は E_i' に属するとする。いま D_1, D_1' (D_2, D_3' resp.) の置かぬ方向を '左' ('右' resp.) と呼ぶ事にする。
 (D_1, D_2) は type 3 pair とし
 ま左 D_3' は D_2' の右にあるとしてよい。 $D_1 \cup D_2$ に i 番目に *attach* する *band* を b_{j_i} とする。この時 D_{j_i} ($i=1,2$) は, D_i に *attach* する *annulus* A_i を生じるとしてよい。この時 $\gamma^{(j_2+1)} \cap V_2$ の成分 A_1', A_2', A_3' 下次の様なものが存在する。

- A_i' ($i=1,2,3$) は, D_i' に type 3 band を *attach* して得るもの。
- A_2' と A_3' は, V_2 上 *parallel*



この時, F 上の *annuli* A_1', A_2' と γ_1 の成分 D_3, D_4 を上の様
 に定める。すると Assertion 2 の証明と同様の議論により次が
 証明出来る。

Assertion 3 D_3, D_4 に *parallel* な γ_1 の成分は存在しない。

以下, 命題の証明に届く。

今 $\{E_1, \dots, E_r\}$ ($r \geq 2$) は type 3 parallel classes よりなる $\{E_1, \dots, E_1\}$ の subset とする。この時 Assertion 3 より 各 i ($1 \leq i \leq r$) に対して \mathcal{J}_1 の parallel classes $E_{2(i)}, E_{m(i)}$ で各々は丁度一つの \mathcal{J}_1 の成分を含む様なものかとなる。この時 $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^r \{E_{2(i)}, E_{m(i)}\}$ とおく。いま \mathcal{J}_1 の各成分に attach される band は、丁度二つだけだから、 \mathcal{C} は少なくとも r 個の元をもつ。

次に $\{E_{r+1}, \dots, E_{r+n}\}$ ($n \geq 0, r+n \leq 1$) を type 2 parallel classes よりなる $\{E_1, \dots, E_1\}$ の subset とする。Assertion 2 より 各 i ($r+1 \leq i \leq r+n$) に対して \mathcal{J}_1 の parallel class $E_{m(i)}$ で丁度一つの \mathcal{J}_1 の成分を含む様なものかとなる。いま $E_{m(i)} \in \mathcal{C}$ とする。 D_1 を E_i に属す \mathcal{J}_1 の成分で type * pair ではないものとする。この時 T_1 を \mathcal{J} の成分で $T_1 \supset D_1$ なるものとするとき、 $T_1 \cap T_1$ は三個以上の成分を含みそのうち二個は \mathcal{C} に含まれる parallel class に属す。いまこのような D_1 を \mathcal{J}_1 から取り除いても依然として $6q-8$ 個以上の成分が存在する。この様な取り除きを $E_{m(i)} \in \mathcal{C}$ なる全ての i に対して行なう事により \mathcal{J}_1 の subset \mathcal{D} で $\#\mathcal{D} \geq 6q-8$ なるものか得られる。次に $E_{m(i)} \notin \mathcal{C}$ とする。

D_1 を上の通りとする。いま $E_{m(i)} = E_{m(j)}$ ($i \neq j, r+1 \leq i, j \leq r+n$) とする。この時 T_1 を \mathcal{J} の成分で $T_1 \supset D_1$ なるものとするとき、 $T_1 \cap T_1$ は三個以上の成分を含む。いまこの様な D_1 を \mathcal{D} から取り除いても依然として $6q-8$ 個の成分を含む。この様

右取り除きを上の様な全7の D_i に対し7行なう事により \mathcal{D} の subset \mathcal{D}' 下 $\#\mathcal{D}' \geq 67-8$ なるものが得られる。

他方, $\{E_{r+t}, \dots, E_{r+t}\}$ ($t \geq 0, r+t \leq 7$) を type 4 elements かつなる $\{E_1, \dots, E_7\}$ の subset とすると16頁 (***) より $t \leq 7$. 従って $\mathcal{C}' = \{E_1, \dots, E_7\} \cup \mathcal{C} \cup \{E_{m(r+t)}, \dots, E_{m(r+t)}\}$ とすると \mathcal{D}' の成分下 \mathcal{C}' に属する様なものの個数は高々 $2U$. また E_2 ($1 \geq r+t$) は, 高々2個の \mathcal{D}' の成分しか含まない。従って Lemma 4.2 より $\#\mathcal{D}' \leq 67-10$ 矛盾

以上7命題の証明終了。

References

- [K₁] T. Kobayashi, Structures of full Haken manifolds, preprint
- [K₂] _____, 3-manifolds with incompressible tori intersecting a Heegaard surface in essential loops, preprint
- [O] M. Ochiai, On Haken's theorem and its extensions, Osaka J. Math. 20 (1983), 461~468