数理解析研究所講究録
575巻 1985年 226-230

ある種の表現からのhyperbolic 3-orbifoldsの構成

九工大 相馬輝彦(Teruhiko Soma)

この講演の目標はThurston[6]によって提出された3次元多様体のGeometrization Conjectureの解決に(少しでも)寄与できるような結果を得るため問題となるのは何かを明らかにすることにある。現在、講演者が最も注目しているのは、Thurstonが3-orbifoldsのgeometrization theoremの中で使用しているhyperbolic 3-cone-manifoldsの構造の変形理論である。この理論を使って"擬"hyperbolic 3-manifoldが本当のhyperbolic 3-manifoldであることを示したいのである。

まず問題となるのはsingular locusのcombinatorial typeの選択である。与えられた3-manifold Mがhyperbolicであることを証明したいとき、Mの中のhyperbolic knot Kを選んできて、M−K上のcomplete hyperbolic structureから出発する(M,K)上のhyperbolic 3-cone-manifold structureの変形を考えたとする。もし,実際にこの変形がcone-angle

2π の地点まで到達できたとすると、K は hyperbolic 3-manifold M の中の geodesic loop になる。このような loop は $\pi_1(M)$ の中で K と同じ conjugacy class に入る loops の中で唯一つである。したがって我々は M が海の物とも山の物とも分らないうちから，そうなるような hyperbolic knot K を用意しなければならない。これはまず不可能であろう。

問 1．"擬" hyperbolic 3-manifold M が与えられたとき、M 上の 1-graph Σ で (M, Σ) 上の hyperbolic 3-cone-manifold の変形を考えるのに都合のよいものを見つけよ。また Π から $SL_2(\mathbb{C})$ への表現の空間 $X(\Pi)$（ただし $\Pi = \pi_1(M-\Sigma)$）の中の実曲線 γ で上の変形の "水先案内人" になるものを見つけよ。

この問の後半部分の解答は [5] で与えた。前半部分は次の問と関連して、今度の講演の主なテーマとなっている。

問 2．(M, Σ) の hyperbolic 3-cone-manifolds の構造の変形が cone-angle 2π 以下で geometric limit に到達するとき，それから先に進めるように hyperbolic 3-cone-manifold の概念を一般化せよ。

問3. 問1で与えられた実曲線γがcone-angle 2π 以下で$X(\Pi)$のendに到達してしまうとき，(M, Σ)またはMはどのような位相的性質を持つか。(この問は、裏を返せば、あらかじめ(M, Σ)またはMに何らかの位相的な仮定をしておくことによってγが$X(\Pi)$のendに逃げていくのを避ける方法を求めることにある。)

問4. 問2で与えられたhyperbolic 3-cone-manifoldの概念を一般化したものBがcone-angle 2πの地点まで到達したとき，このBからM上のhyperbolic structureを定義することは可能か。

講演者は問2の中で求められているhyperbolic 3-cone-manifoldの概念の一般化としてbent manifoldという概念を考えた。また、これに関連して次の定理を得た(使用されている定義は[4]の中で説明する予定である)。

定理. Mをclosed orient. 3-manifoldとし，KをMのsimplicial triangulationとする。$\Sigma = |K^{(1)}|$，$\Pi = \pi_1(M - \Sigma)$とおく。表現$\rho : \Pi \to PSL_2(\mathbb{C})$がnon-degenerate, a-realizableであれば、ρをholonomyとして持つようなK上のbent manifold Bが(up to isometryで)唯一つ存在する。

問3、問4について講演者は何の解答も持っていない。問3に対しては、Morgan-Shalenの理論[2],[3]，問4に対しては、Hodgson[1]の結果が解決への何らかの手掛りを与えているように思っているが、これは講演者の希望的観測にすぎないかもしれない。(終)

参考文献

[1] C. Hodgson, Thesis (?)

[2] J. Morgan and P. Shalen, Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures, I, Ann. of Math. 120 (1984), 401-476.

[3] ____ and ____, ______, II, preprint.

[4] T. Soma, Construction of hyperbolic 3-orbifolds from certain representations, 準備中.

[5] 相馬輝彦, Hyperbolic 3-cone-manifoldsについて, 数理解析研講究録 542 (1985), 128-143.

[6] W. Thurston, Three dimensional manifolds,

Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) 6 (1982), 357-381.