数理解析研究所講究録
575巻 1985年 213-222

Degeneration of geometric structures on Seifert fibered manifolds

都立大理 大鹿 健一
(Ken'ichi Ohshika)

3次元には geometry (maximal な homogeneous metric で compact quotient をもつもの) が8種類 ($\mathbb{H}^3$, $\mathbb{E}^3$, S^3, $\mathbb{H}^2\times\mathbb{E}$, $S^2\times\mathbb{E}$, $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, Nil, Sol) あることが知られている。そのうち6種類 ($\mathbb{H}^2\times\mathbb{E}$, $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, $\mathbb{E}^3$, Nil, $S^2\times\mathbb{E}$, S^3) は Seifert fibered manifold, 即ち 2-orbifold 上の S^1-bundle のもつ geometry である。M を Seifert fibered mfd とする時, $\mathcal{T}(M)$ で M の Teichmüller space 即ち M 上の geometric structure の isotopy classes 全体の空間に C^∞-topology から induce される topology をいれたもの を表す。以前 [Ohshika 1] において, $\mathcal{T}(M)$ の homeo type が調べられたが, そこで $\mathcal{T}(M)$ は特に M が $\mathbb{H}^2\times\mathbb{E}$, $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$, $\mathbb{E}^3$, Nil のいずれかの geometric structure をもつ時, surface の Teichmüller space と似た性質を持つことを示唆した。Surface の Teichmüller space については, Thurston ([Thurston 1]) により, それが自然に disk に compactify されることが示されている。

そこで上のMについて、"$\mathcal{T}(M)$ は自然にdiskにcompactifyされるか？"という問が考えられるが、それが肯定的に示せることがわかった。又それに伴い $\pi_0\mathrm{Diff}^+(M)$ の元の分類が得られた。尚内容の詳細は [Ohshika 3] を参照して頂き度い。

以降話を単純にする為 M は hyperbolic base orbifold O をもつ Seifert fibered mfd とし、orientable, closed とする。又 $O \neq S^2(2,3,r)$ $S^2(3,3,r)$ とする。

§ Hyperbolic 2-orbifolds

Hyperbolic 2-ofd O について、O上の simple geodesics から成る closed set で、O上の cone point は angle π 以外のものを含まず、cone angle π の cone pt. は唯一つの leaf の端点としてのみ含み得るようなものを、O上の geodesic lamination という。Geodesic lamination で transverse measure をもったものを measured lamination という。O上の measured lamination 全体の空間を $\mathcal{ML}(O)$ で表す。$\mathcal{ML}(O)$ には measure topology と呼ばれる topology が入る。$\mathcal{ML}(O)$ には $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ が measure を実数倍することにより act する。$\mathcal{ML}(O)-\{0\}/\mathbb{R}_+-\{0\}$

に quotient topology を入れたものを $\mathcal{PL}(\mathcal{O})$ と表す。

<u>Prop.</u> $\mathcal{ML}(\mathcal{O}) \cong \mathbb{R}^{-3\chi(X_0)+2k}$, $\mathcal{PL}(\mathcal{O}) \cong S^{-3\chi(X_0)+2k-1}$
但し $\chi(X_0)$ は $\mathcal{O}$ の underlying surface X_0 の euler 数。k は $\mathcal{O}$ の cone points の数。

次に base orb $\mathcal{O}$ の Teichmüller space $\mathcal{T}(\mathcal{O})$ について，その compactification を考える。それには $\mathcal{O}$ が orientable な場合のみ使える方法と，non-orientable な時にも使える方法と2通りあり，前者を後で使う必要があるので双方を考える。($\mathcal{O}$ は orientable とは限らなかった。)

まず $\mathcal{O}$ は oriented とする。$\mathcal{O}$ 上の measured lamination (L, μ) は universal cover $\mathbb{H}^2$ 上の measured lamination $(\tilde{L}, \tilde{\mu})$ に lift する。$(\tilde{L}, \tilde{\mu})$ に関して，$\mathbb{H}^2$ の left-earthquake map $E_{(\tilde{L},\tilde{\mu})}: \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ が $\mathbb{H}^2$ の isometry の左からの合成を除いて unique に定まる。これは直観的に言えば，$\tilde{L}$ の leaf に沿って，外側から measure の分だけの左への translation を合成した写像である。一方 $\mathcal{T}(\mathcal{O})$ の元は $\pi_1^{orb}(\mathcal{O})$ から $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ への faithful discrete representation に対応している：$\mathcal{T}(\mathcal{O})$ の元 g を1つ fix し，それに対応する representation $r_g: \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ をとる。(L, μ) に $E_{(\tilde{L},\tilde{\mu})}\, r_g\, E_{(\tilde{L},\tilde{\mu})}^{-1}: \pi_1^{orb}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ に

対応する$\mathcal{T}(O)$の元を対応させる写像を $\varepsilon : \mathcal{MF}(O) \longrightarrow \mathcal{T}(O)$ と表す。

<u>Thm.</u> $\varepsilon : \mathcal{MF}(O) \longrightarrow \mathcal{T}(O)$ は homeomorphism.

$\mathcal{MF}(O)$ は $\mathcal{PF}(O)$ 上の open cone だと思えるから，上のεによって，$\mathcal{T}(O)$ に $\mathcal{PF}(O)$ 上の open cone としての構造が入る。このようにして，$\mathcal{T}(O)$ を $\mathcal{PF}(O)$ を boundary にもつ disk の内部と思えるが，以下に見るようにこの compactification は自然である。

$\mathcal{S}$ を $\pi_1^{orb}(O)$ の torsion free elements 全体の集合とし，$\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ は $\mathcal{S}$ から $[0,\infty)$ への関数全体の空間に各点収束の位相を入れたものとする。$P\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} := \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} - \{0\} / \mathbb{R}_+ - \{0\}$，$l_* : \mathcal{T}(O) \longrightarrow P\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ を $s \in \mathcal{S}$ について s の geodesic length を各成分とする写像，$m : \mathcal{PF}(O) \longrightarrow P\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ を infinimum measure を各成分で対応させる写像を projectify したものとする。

<u>Thm</u> O を orientable とする時，$l_* \sqcup m : \mathcal{T}(O) \sqcup \mathcal{PF}(O) \longrightarrow P\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ は injective で，$m(\mathcal{PF}(O))$ が $l_*(\mathcal{T}(O))$ の $P\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$ での completion の boundary になっている。その completion は上での disk への compactification に一致する。

次に O が non-orientable の時にも使える方法を考える。$\mathcal{MF}(O)$ で O 上の measured foliation で cone point では 1-pronged saddle を許しその他では singularity は通常の saddle であるようなもの全体の集合とする。(measure topology を入れる。)

Prop.
$$\begin{tikzcd} \mathcal{ML}(O) \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, "m"'] & & \mathcal{MF}(O) \arrow[dl, "m"] \\ & \mathbb{R}_+^S & \end{tikzcd}$$
左の図式を可換にする様な $\mathcal{ML}(O)$ と $\mathcal{MF}(O)$ の間の homeomorphism が存在する。

一方 $\mathcal{MF}(O)$ について surface の場合 ([Fathi et al.] 参照) と同じ議論を行うことにより, $\mathcal{PF}(O) := \mathcal{MF}(O) - \{0\} / \mathbb{R}_+ - \{0\}$ が $P\mathbb{R}_+^S$ での $l_*(\mathcal{T}(O))$ の boundary に map されることがわかる。従って上の Prop. と合わせて O が non-orientable な時も前 Thm が成立することがわかった。

§ $\mathcal{T}(M)$ の compactification

M が $\mathbb{H}^2\times\mathbb{E}$ or $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ geometry を持つ場合を考えるが, $\mathcal{T}(M)$ は $\mathbb{H}^2\times\mathbb{E}$ - geometry の場合, M の regular fiber の geodesic length を 1 とする structure のみの空間とする。(fibration の uniqueness よりこの仮定は up to isotopy で diffeo に関して invariant)

$E = \mathbb{H}^2\times\mathbb{E}$ or $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ $p: E\longrightarrow\mathbb{H}^2$ を base geometry への projection とする。$v\in T_x(E)$ が horizontal とは、$\|v\|_E=\|p_*(v)\|_B$ であること。vertical とは $\|p_*(v)\|_B=0$ のこと。curve はその tangent vector が全て horizontal の時 horizontal という。

<u>Lemma</u> γ を B の geodesic, $x\in E$ を $p(x)\in\gamma$ なる元とする時, x を通る γ の horizontal な lift が唯一存在し, それは geodesic になる。

以下暫く O が orientable の場合を考える。Measured lamination $(\tilde{\mathcal{L}},\tilde{\mu})\subset\mathbb{H}^2$ について, $E_{(\tilde{\mathcal{L}},\tilde{\mu})}:\mathbb{H}^2\longrightarrow\mathbb{H}^2$ を上の lemma により unique に horizontal に lift することができる。それを $E^{h}_{(\tilde{\mathcal{L}},\tilde{\mu})}: E\longrightarrow E$ とする。$\mathcal{T}(M)$ の各元は,([Waldhausen], [Scott] の定理により,) $\pi_1(M)$ の $\mathrm{Isom}(E)$ への faithful discrete representation に対応している。$g\in\mathcal{T}(M)$ を fix することにより, $r_g:\pi_1(M)\longrightarrow\mathrm{Isom}(E)$ が定まる。(L,μ) に,
$E^{h}_{(\tilde{\mathcal{L}},\tilde{\mu})}\, r_g\, E^{h\ -1}_{(\tilde{\mathcal{L}},\tilde{\mu})}:\pi_1(M)\longrightarrow\mathrm{Isom}(E)$ に対応する $\mathcal{T}(M)$ の元を対応させることにより, $\mathcal{E}^{h}_{g}:\mathcal{ML}(O)\longrightarrow\mathcal{T}(M)$ が定まる。

一方 [Ohshika 1] に示されているように $q : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(0)$ なる fibre bundle があり，その fibre は $H^1(X_0;\mathbb{R})$ と同相であることがわかっていた。$g_1, g_2 \in \mathcal{T}(M)$ が $q(g_1) = q(g_2)$ なら image of $r_{g_1} r_{g_2}^{-1} \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R})$ と思える。$\mathcal{E}_g^v : H^1(X_0;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$ を $c \in H^1(X_0;\mathbb{R})$ に $r_{g'} r_g^{-1}(\alpha) = c(\alpha)$ となる $g' \in q^{-1}(q(g))$ を対応させる写像とする。このとき，

$$\mathcal{E}^h_{\mathcal{E}^v_g(c)}(L, \mu) = \mathcal{E}^v_{\mathcal{E}^h_g(L,\mu)}(c)$$ が成立する。

<u>Thm</u> $\mathcal{ML}(0) \times H^1(X_0;\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathcal{E}^h_{\mathcal{E}^v_{g}(\ )}(\ )} \mathcal{T}(M)$ は homeomorphism.

次にこれが自然な $\mathcal{T}(M)$ の compactification を~~導~~くことをみる。S_1 を $\pi_1^{orb}(0)$ の torsion free elements 全体，S_2 を $\pi_1(M)$ の元で $\pi_1^{orb}(0)$ の torsion free element に落ちるもの全体とする。$l_1 : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathbb{R}_+^{S_1}$ を $m \in \mathcal{T}(M)$ に $q(m)$ ではかった geodesic length を各成分で対応させる写像，$l_2 : \mathcal{T}(M) \to \mathbb{R}^{S_2}$ を m に対して $s \in S_2$ - 成分は $r_m(s)$ を表す geodesic について $p r_m(s)$ の horizontal な lift との向の差を対応させる写像とする。$m_1 : \mathcal{ML}(0) \longrightarrow \mathbb{R}_+^{S_1}$ を各成分で infinimum measure をはかる写像，$m_2 : H^1(X_0;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{S_2}$ を c に $p^*(c)(s_2)$ を s_2 一成分として対応させるもの，π を projectivisation map とする。

<u>Thm</u> $\pi_0(l_1, l_2) : \mathcal{T}(M) \longrightarrow P(\mathbb{R}_+^{S_1} \times \mathbb{R}^{S_2})$ は injective でその image は disk に compactify され, boundary は $\pi_0(m_1 \times m_2)(\mathcal{ML}(O) \times H^1(X_0; \mathbb{R})) \cong P(\mathcal{ML}(O) \times H^1(X_0; \mathbb{R}))$.

以上で O が orientable な時の $\mathcal{T}(M)$ の compactification ができた。

O が non-orientable な場合, $\tilde{O}$ を O の orientation double cover, $\tilde{M}$ を $\tilde{O}$ に M を pull back した Seifert fibered mfd とする。すると $\mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(\tilde{M})$, $\mathcal{ML}(O) \longrightarrow \mathcal{ML}(\tilde{O})$, $H^1(X_0; \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X_{\tilde{O}}; \mathbb{R})$ 等は injective

<u>Prop.</u> $\mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(\tilde{M}) \xrightarrow{\pi_0(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2)} P(\mathbb{R}_+^{\tilde{S}_1} \times \mathbb{R}^{\tilde{S}_2})$ の image は disk に compactify され, その boundary は $P(\mathcal{ML}(O) \times H^1(X_0; \mathbb{R}))$ に同相.

これで O が non-orientable な場合も $\mathcal{T}(M)$ の compactification ができた。

§ Diffeomorphisms の分類

M の fibration の uniqueness により $\pi_0 \mathrm{Diff}^+(M)$ は ,

$P(\mathbb{R}_+^{S_1} \times \mathbb{R}^{S_2})$ にactする。従って $\pi_0 \mathrm{Diff}^+(M)$ は $\overline{\mathcal{T}(M)}$ にactしそのinteriorでは $\mathcal{T}(M)$ への自然なactionに一致する。$\overline{\mathcal{T}(M)}$ はdiskだから，$f \in \pi_0 \mathrm{Diff}^+(M)$ は $\overline{\mathcal{T}(M)}$ の何処かにfixed pt. を持つ。その位置によって $\pi_0 \mathrm{Diff}^+(M)$ の元は分類される。

<u>Prop.</u> $[f] \in \pi_0 \mathrm{Diff}^+(M)$ について，$[f]$ が $\mathcal{T}(M)$ の中にfixed pt. をもつ $\Leftrightarrow$ $\exists n>0$ $f^n \underset{\text{isot.}}{\simeq} id.$

。$\mathcal{T}(M)$ にはfixed pt. は持たないが，$\mathcal{T}(O)$ にfixed pt をもつ時，$\Leftrightarrow$ $\exists n>0$ f^n は vertical Dehn twist に isotopic.

。$\partial\overline{\mathcal{T}(M)}$ の有理点（s.c.c. のsystemの点）にfixed pt. をもつ $\Leftrightarrow$ f でinvariantなsaturated incompressible tori がある。(reducible 型)

{ $\mathcal{T}(O)$ のsectionの ∂ にある時 $\Leftrightarrow$ その上で id. に isot.
〃 ない 〜でない

。その他の場合 $\Leftrightarrow$ f でinvariantなsaturated laminationの対がある。

Prob $\partial\mathcal{T}(M)$ の中である $f\in\pi_0\mathrm{Diff}(M)$ と $g\in\mathcal{T}(M)$ について $f^n g$ $n\to\infty$ が収束する点の全体は dense.

References

[Fathi et al] Travaux de Thurston sur les surfaces Astérisque

[Ohshika 1] Teichmüller spaces of Seifert fibered manifolds with infinite π_1 ; preprint

[Ohshika 2] Finite subgroups of mapping class groups of geometric 3-manifolds ; preprint

[Ohshika 3] Degeneration of geometric structures on Seifert fibered manifolds ; preprint.

[Scott] Homotopy implies isotopy for some Seifert fibre spaces ; preprint

[Thurston] On geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces ; preprint

[Waldhausen] On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large