数理解析研究所講究録
575巻 1985年 165-173

δ-polynomial of decomposable links

大阪工大 渋谷哲夫 (Tetsuo Shibuya)

R^3の中のtameなoriented link ℓにはR^3でorientable surface Fで$\partial F=\ell$になるものがある。そこでこのようなsurfaceのうちでconnected componentの数の最大数を$\nu(\ell)$で表す。ℓがdecomposableとは$\nu(\ell)\geqq 2$のときを言う。

つぎにlinkの∇-polynomial ([2])を定義する。link ℓに対してconnected orientable surface Fで$\partial F=\ell$になるものからSeifert matrix Sが定義される([5])。このSをつかい，ℓの∇-polynomial，$\nabla_\ell(t)$で表す，を

$$\nabla_\ell(t)=(t-1)^{-\mu+1}|S-tS'|$$

で定義する、ここでμはℓのcomponentの数でS'はSの転置行列。しかしℓがdecomposableのとき，すなわち$\nu(\ell)=n\geqq 2$とするとℓのSeifert matrix Sは最後の$n-1$行と$n-1$列の成分がすべて0になることがわかり，常に$\nabla_\ell(t)=0$になる。そこで$\nu(\ell)=n\geqq 2$のとき，この最後の$n-1$行と$n-1$列をとりのぞいた行列を$\mathbb{W}$として，

$$\delta_\ell(t)=(t-1)^{-\mu+n}|\mathbb{W}-t\mathbb{W}'|$$

と定義し、これをℓのδ-polynomialと言う。また$\nu(\ell)=1$のときは、$\delta_\ell(t)=\nabla_\ell(t)$と考える。したがって$\delta_\ell$と$\nabla_\ell$は$\nu(\ell)\geqq 2$で違いがでる。たとえば、$\ell=3_1\circ 4_1$（$\circ$はsplitを意味する）とすると、$\nabla_\ell(t)=0$だが、$\delta_\ell(t)=\Delta_{3_1}(t)\cdot\Delta_{4_1}(t)$になる。

上で述べたようにℓがdecomposableならば、$\nabla_\ell(t)=0$であるが、これの逆が成立するかというのが[4]における予想であるが答はNoである。たとえば次ぎのような3-component link $\ell=k_1\cup k_2\cup k_3$を考えればよい。これのSeifert

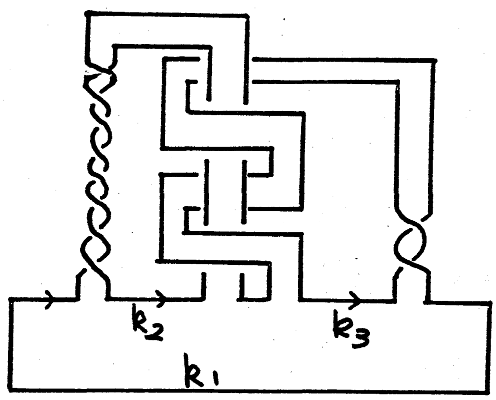

図 1

matrix Sをつくると、

$$S=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$$

だから、$\nabla_\ell(t)=(t-1)^{-2}|S-tS'|=0$、しかしながら$\ell$は

decomposable でない。なぜなら ℓ が decomposable ならば、ある $i(=1,2,3)$ に対して $\mathrm{Link}(k_i, \ell-k_i)=0$ でなければならないが、どの i に対しても上の linking number は 0 にならない。

つぎに decomposable link に対して simple fusion というものを定義する。

いま ℓ を μ- component link として $\mathcal{B}=B_1\cup\cdots\cup B_n$ を互いに交わらない disks で $\ell\cap B_i=\ell\cap\partial B_i=2$ 本の arcs

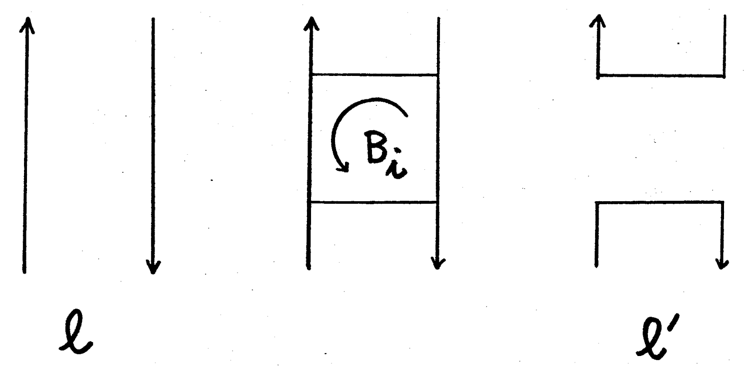

図 2

となる $\mathcal{B}$ を考えたとき、$\ell'=\ell+\partial\mathcal{B}$ の component の数が $\mu-n$ のとき、ℓ' は ℓ の fusion で得られるといい、$\mathcal{B}$ を ℓ の fusion を与える bands という。

特に ℓ が decomposable のとき、orientable surface $\mathcal{F}=F_0\cup\cdots\cup F_m$ で $\partial\mathcal{F}=\ell$, $\partial F_i\cap\ell\neq\phi$ があるが、ℓ の fusion を与える bands $\mathcal{B}=B_1\cup\cdots\cup B_m$ が $\forall s=0,\ldots,m$ に対して $\ell_s\cap\mathcal{B}\neq\phi$ のとき、$\ell'=\ell+\partial\mathcal{B}$ を ℓ の simple fusion で得られる link という，ここで $l_i=\partial F_i$。

l が decomposable のとき，l に張る surface は一意ではないし，$\mathfrak{B}$ のとり方も一意ではなく，したがって l' は link type として一意には決まらない。しかし δ-polynomial に関してはつぎの定理が成立する([6])。

定理　l が decomposable link で l' を l の simple fusion で得られる link で $\nu(l')=1$ とする。そのとき，

$$\delta_{l'}(t)=f(t)f(t^{-1})\,\delta_l(t)$$

と書ける，ここで $f(t)$ はある integral polynomial で $f(1)=\pm1$ を満たすものである。

証明　l を μ-component link とし $\nu(l)=n$ とする。すると l の Seifert matrix S は下の形になる：

$$S=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & \overbrace{}^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ n-1\{ \end{array} & \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

したがって定義より，$\delta_l(t)=(t-1)^{-\mu+n}|W-tW'|$.

また l の simple fusion を与える $(n-1)$ 個の bands と l が張る surface との交わりは ribbon type のみとしてよ

11。この各 ribbon type の交わりの個所で図3のような orientation preserving cut を行う。各 orientation

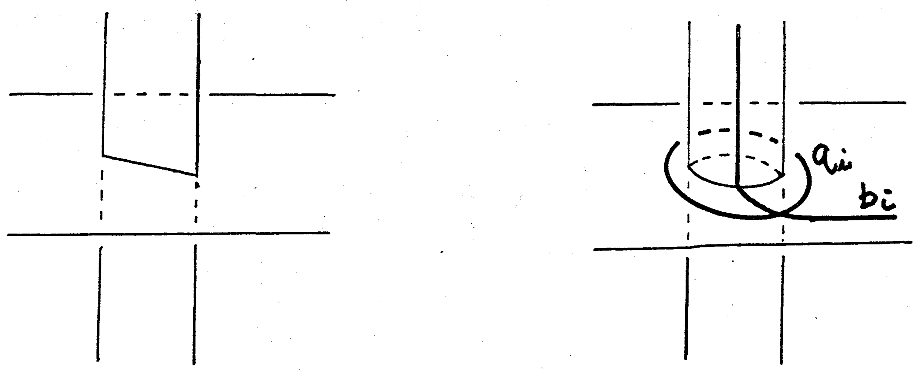

図3

preserving cut を行うと genus が1つづつ増えて、ℓ' に non-singular orientable surface F が張れる。F から Seifert matrix $\bar{S}$ をつくると下のようになる：

$$\bar{S} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} & a_i & b_i \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ a_i \\ b_i \end{array} & \begin{pmatrix} W & 0 & V_4 \\ 0 & 0 & V_2 \\ V_3 & V_1 & V \end{pmatrix} \end{array} .$$

$\nu(\ell')=1$ で ℓ' の component の数は $\mu-n+1$ だから、

$$\begin{aligned} \delta_{\ell'}(t) &= (t-1)^{-\mu+n-1+1}\left|\bar{S}-t\bar{S}'\right| \\ &= (t-1)^{-\mu+n}\left|W-tW'\right|\cdot\left|V_1-tV_2'\right|\cdot\left|V_2-tV_1'\right| \\ &= f(t)f(t^{-1})\,\delta_{\ell}(t). \end{aligned}$$

ここで $f(t)=\left|V_1-tV_2'\right|$ である。また $a_i\cap b_i=$一点，$a_i\cap b_j=\phi\ (i\neq j)$ にとれるから $f(1)=\pm 1$ になる。

これを使うとつぎの系を得る。

系　l が slice link in the weak sense でしかも boundary link ならば，$\delta_l(t)=f(t)f(t^{-1})$ と書ける．ここで $f(t)$ は integral polynomial で $f(1)=\pm 1$ を満たすものとする。

証明　l が slice link in the weak sense だから，$l\subset R^3[0]$ に対して R^4 の上半空間 R^4_+ で locally flat な genus 0 の surface F が張れる。F の minimal point, saddle point を図4(a)から(b)のように変形する。この変形で得られた surface を F' とすると，$F'\cap R^3[0]$

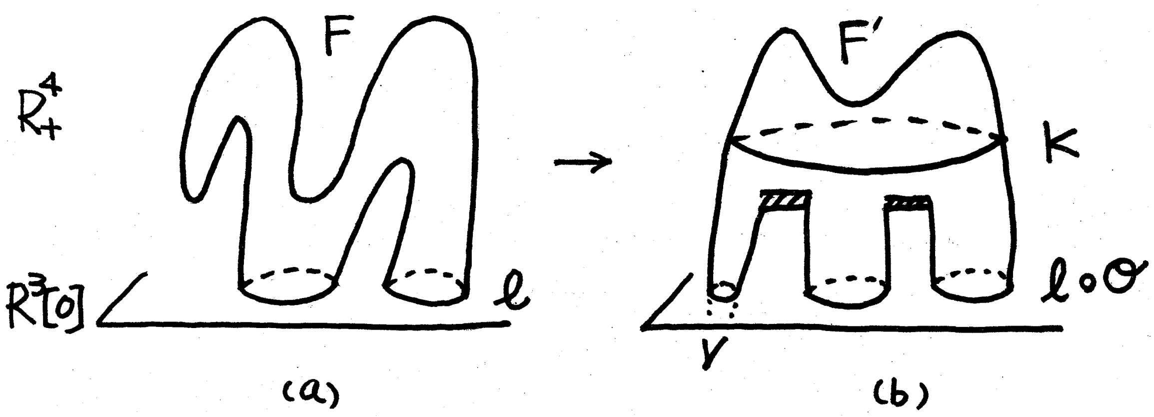

図4

は l と trivial link O が split している。l が boundary link だから $l\circ O$ も boundary link で knot K は $l\circ O$

の simple fusion で得られ $V(K)=1$ である。故に定理より

$$\delta_K(t)=f_1(t)f_1(t^{-1})\delta_\ell(t).$$

一方で K は ribbon knot だから，

$$\delta_K(t)=f_2(t)f_2(t^{-1})$$

と表わせるから，ある integral polynomial $f(t)$ が存在して

$$\delta_\ell(t)=f(t)f(t^{-1}) .$$

この系を使い Casson の問題を考える。Whitehead link L_0 の1つの component の non-twisted double をつくる

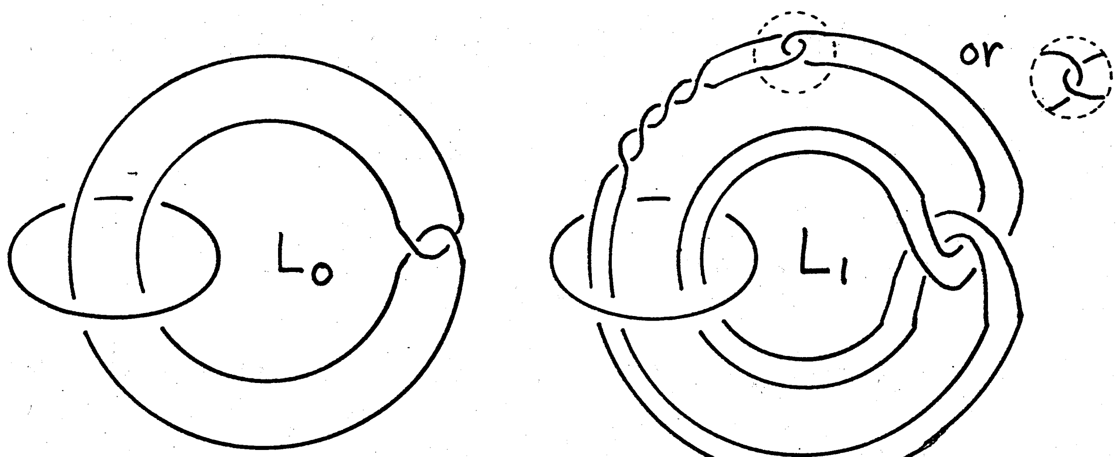

図5

（図5(b)）。これを 1-st iterated Whitehead link と呼び L_1 で表す。以下同様に p-th iterated Whitehead link L_p をつくる。そのとき，

Cassonの問題([3]) $\forall p$ に対して $L_p \sim 0$ (すなわち L_p は slice link in the strong sense) か?

これについては $L_1 \not\sim 0$. 実際は系より L_1 は slice link in the weak sense でもない。なぜなら L_1 は boundary link で,

$$\delta_{L_1}(t) = t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 1$$
$$\text{or} \quad t^4 - 4t^3 + 7t^2 - 4t + 1$$

でこれらは $f(t)f(t^{-1})$ に分解できない。

注　$p \geqq 2$ ならば $\delta_{L_p}(t) = 1$ である。また $^{\exists}p (\geqq 2)$ で $L_p \sim 0$ ならば $^{\forall}q \geqq p$ で $L_q \sim 0$ である([7])。

References

[1] C. Goldberg: On the genera of links, Ph.D. Thesis, Princeton Univ., 1970.

[2] F. Hosokawa: On ∇-polynomials of links, Osaka Math. J., 10 (1958), 273-282.

[3] R. Kirby: Problems in low dimensional manifold theory, Proc. of Symposia in Pure Math. 33 (1978),

273–310.
[4] K. Murasugi: Lecture Notes, Toronto Univ., (1970).
[5] H. Seifert: Über das Geschlecht von Knoten, Math. Ann., 110 (1934), 571–592.
[6] T. Shibuya: δ-polynomial of links, Kobe J. of Math., to appear.
[7] T. Shibuya: On the cobordism of links with two components in a solid torus, Kobe J. of Math., to appear.