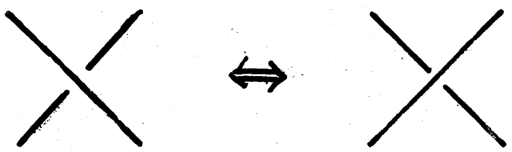
数理解析研究所講究録
575巻 1985年 126-134

Two-bridge knots with unknotting number one

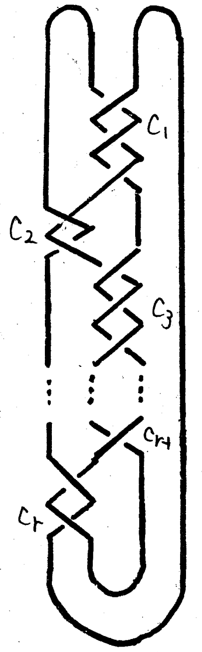
大阪市大 理 村上斉 (Hitoshi Murakami)
九州大 理 金信泰造 (Taizo Kanenobu)

3次元球面の中の，向きを考えないknot Kを考える。その射影図の交差の上下を入れ換える操作をunknotting operationと呼ぶ。



Kのどのような射影図も，有限回のunknotting operationを施すことによって，自明なknotの射影図になることがわかる。そこで，Kのすべての射影図の中で，自明なknotを得るために必要なunknotting operationの最小数を，unknotting numberと呼び，$u(K)$と書く[13]。

two-bridge knotとは，knotを$\mathbb{R}^3$の中で考えたとき，その$\mathbb{R}^1$への射影で極大点が2個しかないようなものがとれるものを言う。



$c_1, c_3, \cdots$ は右ひねりの回数

$c_2, c_4, \cdots$ は左ひねりの回数

このとき，その（$\mathbb{R}^2$への）射影図は上のようにできるので，このknotを $C(c_1, c_2, \cdots, c_r)$ と表す。（Conway's notation, [4, 2]）また，3次元球面のtwo-bridge knotでのdouble branched coverはlens spaceになることがわかる。$C(c_1, c_2, \cdots, c_r)$ のdouble branched coverはlens space $L(p, q)$ となる。ただし，p，qは

$$\frac{p}{q} = c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \cdots + \cfrac{1}{c_r}}}$$

で与えられる。[4, 2, 12] そこで，このtwo-bridge knotを $S(p, q)$ とも書くことにする。（Schubert's notation, [11, 2]）今は，knotを考えているので，pは正の奇数となる。また，$S(p, q)$ と $S(p, -q)$ は同じknotになる。

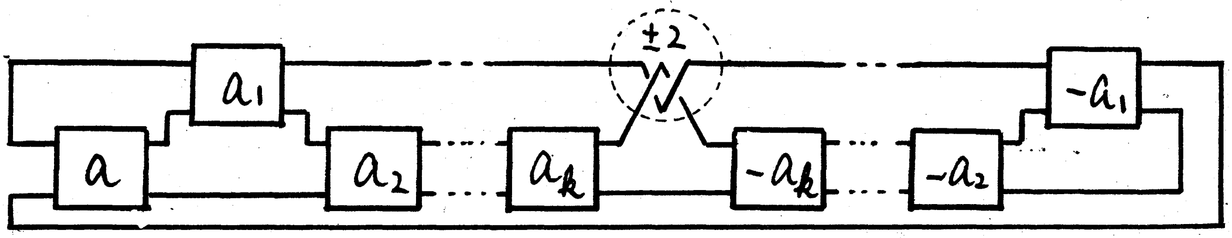
ここでは，two-bridge knot のうち，unknotting number が1であるものをすべて決定する。すなわち，

<u>定理［6］</u>　Kを（自明でない）two-bridge knot とする。そのとき，次の3つは同値である。

(1)　$u(K) = 1$

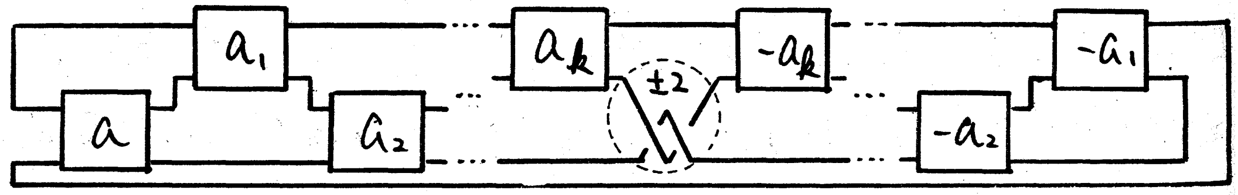
(2)　Kは，$S(p,\ 2n^2)$ と表される。ただし，n は次の条件をみたす整数。
「n と互いに素な整数 m が存在して $2mn = p \pm 1$ となる。」

(3)　Kは，$C(a, a_1, a_2, \cdots, a_k, \pm 2, -a_k, \cdots, -a_2, -a_1)$ と表される。



k: even のとき

k: odd のとき



証明　まず，前ページの図の破線の所でunknotting operationを行なえば，自明なknotになることがわかるので，(3) ⇒ (1) は示された。

(1) ⇒ (2) の証明　Kを$S(p,q)$とする．Lickorish [7] により，次のことが示されている．

「$u(K)=1$となるknot Kのdouble branched coverは，あるstrongly invertible knot kの$\frac{p}{\pm 2}$-surgeryによって得られる。(ただし，pは正の奇数)」（[8] も参照）

two-bridge knot $S(p,q)$のdouble branched coverは，$L(p,q)$であるから，$u(S(p,q))=1$なら$L(p,q)$が，あるknot kの$\frac{p}{\pm 2}$-surgeryで得られるはずである。

ここで，次のCyclic surgery theorem [5] の特別な場合を使う。

「torus knot以外のknot kをDehn surgeryして得られた3-manifoldの基本群がcyclicであれば，そのsurgery係数は整数である。」

$\pi_1(L(p,q)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$でcyclicだから，上の事実によりsurgeryされるknot kはtorus knotでなければならない。

Moser [9] により，(m,n)-torus knot（m,nは互いに素）の$\frac{p}{\pm 2}$-surgeryがlens spaceであれば，$|\pm 2mn+p|=1$であり，そのとき得られるlens spaceは$L(p,\pm 2n^2)$

であることがわかっている。よって，$K=\mathcal{S}(p,q)$は，このようなnを使って$\mathcal{S}(p,\pm 2n^2)=\mathcal{S}(p,2n^2)$と表されることがわかる。

(2) ⇒ (3) の証明　まず，$n=1$のときを考える。$\mathcal{S}(p,2)$は$C(\frac{p-1}{2},2)$と表されるので，このときは正しい。

そこで$n>1$とする。整数$a\ (\neq 0)$とtを$an+t=m$ $(n>|t|>0)$となるようにとり，$\frac{n}{t}$を

$$\frac{n}{t}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_k}}$$

と連分数展開する。そして，kが偶数のときには

$$f_1=a+\frac{1}{a_1+}\cdots\frac{1}{+a_k+}\frac{1}{2\varepsilon+}\frac{1}{(-a_k)}+\cdots+\frac{1}{(-a_1)}$$

kが奇数のときには

$$f_2=a+\frac{1}{a_1+}\cdots\frac{1}{+a_k+}\frac{1}{(-2\varepsilon)}+\frac{1}{(-a_k)}+\cdots+\frac{1}{(-a_1)}$$

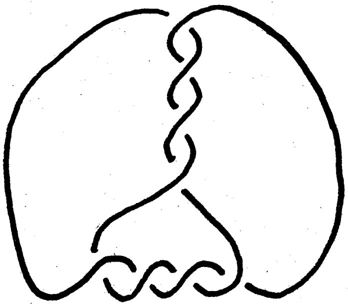
という連分数を考える。（ただし，$2mn=p-\varepsilon$ $(\varepsilon=\pm 1)$とする）すると，$f_1=f_2=\frac{p}{2n^2}$となることがわかるので（たとえば，[12]，[2]で説明されているように行列を用いる），$\mathcal{S}(p,2n^2)$が$C(a,a_1,\cdots,a_k,\pm 2,-a_k,\cdots,-a_1)$と表されることが示された。

（証明終わり）

<u>注意</u>　Lickorish [7] の方法は，K の double branched cover $M(K)$ の，$H_1(M(K))$ 上の linking form を調べるものである。これを two-bridge knot に適用すると，$u(K)=1$ となるものは，$S(p, 2n^2)$ の形であることしかわからない（ただし，n と p は互いに素）。つまり定理の(2)に書かれている n についての条件が与えられないのである。

<u>例</u>　$u(8_3)=2$　（notation は [1] による）

この knot は $S(17, 4)$ または $C(4, 4)$ と表され，次のようなものである。



上の図から $u(8_3) \leqq 2$ はすぐにわかるから，$u(8_3)=1$ であると仮定して矛盾を導こう。

$\frac{(17\pm1)}{2} = 8\ (=2^3)$ or $9\ (=3^2)$ だから，定理の「(1) ⇒ (2)」より，8_3 は，$S(17, 2)$，$S(17, 2\cdot 8^2)$ or $S(17, 2\cdot 9^2)$ になるはずである，ところが，Schubert によると [11, 2]

「$S(p, q)$ と $S(p, q')$ が同じ knot を表す ⇔ $\pm q'q^{\pm1} \equiv 1 \pmod{p}$」であるから，矛盾していることになる。

$S(17,4) = S(17, 2\cdot 6^2)$ であるから，Lickorish の方法では判定できないことを注意しておく。

同じ方法で，

$$8_4,\ 8_6,\ 8_8,\ 8_{12},\ 9_5,\ 9_8,\ 9_{15},\ 9_{17},\ 9_{31}$$

の unknotting number はすべて2となることがわかる。これらは，[10] では判定できていなかったものである。このうち，8_8，9_{15}，9_{17}，9_{31} は Lickorish の方法でも判定可能なものである。([10] で判定できていなかったもののうち，7_4 は Lickorish が $u(7_4)=2$ であることを [7] で示している。また，[7] では，Rickard が，unknotting operation に +，− をつけて考えて，signature も込めて評価する方法でもう一つ判定できる (計6つ) と書かれているが，それが上記の9つの中にはいるかどうかは，知らない。この方法については [3] 参照)

現在のところ，9-crossing までの knot のうち unknotting number のわかっていないものは，

$$8_{10},\ 8_{16},\ 9_{25},\ 9_{32},\ 9_{10},\ 9_{13},\ 9_{35},\ 9_{38},\ 9_{49}$$

の9つで，前の4つは $u=1$ or 2，後の5つは $u=2$ or 3

である。

最近（1985年6月）Cochran-Lickorish [3] により、Donaldson の定理を使った unknotting number 判定法が考えられているが、まだ具体的に unknotting number を決定するには到っていないようである。

References

[1] J.W. Alexander and G.B. Briggs : On types of knotted curves, Ann. of Math. 28(1927), 562-586.

[2] G. Burde and H. Zieschang : KNOTS , De Gruyter studies in mathematics 5, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985.

[3] T.D. Cochran and W.B.R. Lickorish : Unknotting information from 4-manifolds, preprint, 1985.

[4] J.H. Conway : An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, Oxford-New York, 1969, 329-358.

[5] M. Culler, C.McA. Gordon, J. Luecke, and P.B. Shalen : Dehn surgery on knots, preprint, 1985.

[6] T. Kanenobu and H. Murakami : Two-bridge knots with unknotting number one, preprint, 1985.

[7] W.B.R. Lickorish : The unknotting number of a classical knot, Contemporary Mathematics, Proceedings 1981 Amer. Math. Soc. Conf., Rochester, N.Y., to appear.

[8] J.M. Montesinos : Surgery on links and double branched coverings of S^3, Ann. of Math. Studies 84(1975), 227-259.

[9] L. Moser : Elementary surgery along a torus knot, Pacific J. of Math. 38(1971), 737-745.

[10] Y. Nakanishi : A note on unknotting number, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 9(1981), 99-108.

[11] H. Schubert : Knoten mit zwei Brüken, Math. Z. 65(1965), 133-170.

[12] L. Siebenmann : Exercices sur les noeuds rationnels, preprint, Orsay, 1975.

[13] H. Wendt : Die gordische Auflösung von Knoten, Math. Z. 42 (1937), 680-696.