数理解析研究所講究録
575巻 1985年 105-116



# The additivity of the clasp singularities

神大 理 森元勘治 (Kanji Morimoto)

## §0 Introduction

$S^3$内の tame knot $k$ に対していろいろな numerical invariants が定義されており、(c.f. [1] [5] [7] [8] [9] [10])、それらの不変量と knots の connected sum との関係を調べることは重要な問題と言えよう。たとえば knot の genus 及び、bridge index $-1$ は、加法性を持つことが知られている (c.f. [5] [7] [8])。また、最近 [6] において、M. G. Scharlemann により、unknotting number one knots は prime であることが示された。さて、本稿において 我々は clasp number の加法性について考察する。clasp number の加法性は一般にはまだ不明であるが、部分的結果として、次の定理を得た。( clasp number $c(k)$ の定義は後ほど与える)。

定理 $k_1, k_2$ を二つの non-trivial knots とする。このとき、$c(k_1 * k_2) = 2$ ならば $c(k_1) = c(k_2) = 1$ である。
ここで、$k_1 * k_2$ は $k_1$ と $k_2$ の connected sum である。

この定理と後述の命題を合わせて、次の系を得る。

系 $k_1, k_2$ を二つの knots とする。このとき、
$c(k_1 * k_2) \leq 2$ ならば $c(k_1 * k_2) = c(k_1) + c(k_2)$ である。

本稿の議論は P.L. Category で行う。$cl(\cdot)$, $Int(\cdot)$, $\partial(\cdot)$ は、それぞれ closure, interior boundary を示す。集合 $A$ の濃度を $|A|$ で示す。

## §1 Intersections of a clasp disk and a 2-sphere

$k$ を $S^3$ 内の tame knot, $B$ を 2-disk とすれば、以下の如き immersion $f$ が存在することはよく知られている (c.f. [3] [10] [11])。

$f : B \to S^3$ s.t. $f|_{\partial B} : \partial B \to k$ は同相写像 かつ $f^{-1}(\tilde{\Sigma})$ の各 component は $\partial B$ の点と $\mathrm{Int} B$ の点を結ぶ arc。
ここで、$\tilde{\Sigma} = \{ x \in f(B) \mid |f^{-1}(x)| \geq 2 \}$。

このとき、$D=f(B)$ を $k$ の a clasp disk と呼ぶ。

$c_D(k)=|\{\text{components of } \hat{\Sigma}\}|$ とおき、$c(k)=\min_D\{c_D(k)\}$ とおく。$c(k)$ を $k$ の the clasp number と呼ぶ。$c(k)$ の定義から、$u(k)\leq c(k)$ 及び $g(k)\leq c(k)$ である。ここで $u(k), g(k)$ は the unknotting number of $k$ 及び、the genus of $k$ である。

$D=f(B)$ を $c_D(k)=c(k)$ となる $k$ の clasp disk とする。$\Sigma=f^{-1}(\hat{\Sigma})$, $\Sigma=\sigma_1\cup\sigma_2\cup\cdots\cup\sigma_{2c(k)}$ とおく。ここで $\sigma_i$ は $\Sigma$ の component である ($i=1,2,\cdots,2c(k)$)。さらに、$\partial\sigma_i\cap \mathrm{Int}B=\{x_i\}$, $\partial\sigma_i\cap\partial B=\{y_i\}$, $X=\cup_{i=1}^{2c(k)}\{x_i\}$ and $Y=\cup_{i=1}^{2c(k)}\{y_i\}$ とおく。

今、$k$ を non-prime knot とし、$S$ を $k$ の non-trivial connected sum を与える 2-sphere とする (以下 connected sum と言えば、非自明なものだけを意味する)。$S$ と $D$ は横断的に交わるとしてよいから、$\hat{T}=S\cap D$, $T=f^{-1}(\hat{T})$ とおけば、$T$ は一本の properly embedded arc in $B$ と いくつかの simple loops in Int $B$ からなる。

補題　上の状況において、$k$ の connected sum を与え、以下の条件 (1)〜(3) を満たす 2-sphere が存在する。

(1) $\alpha$ を $T$ の subarc で $\mathrm{Int}\,\alpha \cap \Sigma = \phi$ and $\partial\alpha \subset \Sigma$ とすれば、$\partial\alpha$ は $\Sigma$ の一つの component に含まれない。

(2) $\alpha$ を $T$ の subarc で $\mathrm{Int}\,\alpha \cap \Sigma = \phi$ and $\partial\alpha = \{P, Q\}$ where $P \in \partial B$ and $Q \in \sigma_i \subset \Sigma$ とする。$\beta$ を $\sigma_i$ の subarc で、$\partial\beta = \{Q, y_i\}$ とする。$B_1$, $B_2$ を $\alpha \cup \beta$ によって分離される $B$ 内の二つの disks とする。このとき、$B_1 \cap (\Sigma - \sigma_i) \neq \phi$ and $B_2 \cap (\Sigma - \sigma_i) \neq \phi$ である。

(3) $\alpha$ を $T$ の loop component、$B'$ を $\alpha$ に bound される $B$ 内の disk とすれば、$|B' \cap X| \geq 2$ である。

証明

(1) $\partial\alpha$ が $\Sigma$ の一つの component $\sigma_i$ に含まれるとすれば、$\sigma_i$ の subarc と $T$ の subarc による二辺形が存在し、isotopy で交わりをはずすことができる。

(2) $B_1 \cap (\Sigma - \sigma_i) = \phi$ とする。$B_1 \cap \{x_i\} = \phi$ ならば、$f(B_1)$ に沿った isotopy で交わりをはずすことができる。$B_1 \cap \{x_i\} \neq \phi$ ならば、(1) における二辺形が存在するか、または上の disk $B_1$ と同じ条件 (i.e. $B_1 \cap \{x_i\} = \phi$) を満たす disk が存在し、交わりをはずすことができる。

(3) $\beta$ を $B'$ 内の innermost loop とし、$B^*$ を $\beta$ によって張られる disk とする。$D^* = f(B^*)$ は $S^3$ 内の disk で $D^* \cap S = \partial D^*$ 故、$E_1$, $E_2$ を $\partial D^*$ によって分離される $S$

内の二つの disks とし、$S_i = E_i \cup D^*$ $(i=1,2)$ とおく。さらに $B_i$ を $S_i$ に張られる $S^3$ 内の 3-ball で $B_1 \cap B_2 = D^*$ を満たすものとする。さて、$|B^* \cap X| = 0$ のとき、$B_1 \cap k = \phi$ としてよい故、$S_2$ を少し $B_2$ 内に押し込むことにより、交わりをはずすことができる。$|B^* \cap X| = 1$ のとき、$D^* \cap k$ は1点故 $(B_i, B_i \cap k)$ は 1-string tangle $(i=1,2)$。$S$ は $k$ の connected sum を与える故、$(B_1, B_1 \cap k)$ は unknotted tangle ではないとしてよい (c.f. [4])。よって $S_1$ を少し $B_1$ 内に押し込むことにより、交わりをはずすことができる。

## §2 Proof of Theorem

次の命題は補題から直接に示されるが、[6] の結果、又は genus の加法性からの系でもある。

命題　$c(k)=1$ ならば $k$ は prime knot である。

注意。$c(k)=1$ であるための必要十分条件は、$k$ が doubled knot となることである。(c.f. Ch IV of [5])。

さて、定理の証明である。$k = k_1 \# k_2$ とおく。以下の証明

において、記号は§1と同じ記号 $S$, $D=f(B)$, $\Sigma$, $\tilde{\Sigma}$, $T$, $\tilde{T}$, $X$, $Y$ を使う。また、$S$ は補題の条件を満たしているものとする。$m$ を $T$ の arc component とし、$B_1$, $B_2$ を $m$ によって分離される $B$ 内の二つの disks とする。さらに $l_1=B_1\cap\partial B$, $l_2=B_2\cap\partial B$ とおく。

主張1 $|B_1\cap X|=|B_2\cap X|=2$

補題より $|B_1\cap X|\neq 0$ and $|B_2\cap X|\neq 0$。$|B_1\cap X|=1$ とする。$B_1\cap X=\{x_i\}$ and $f(\sigma_i)=f(\sigma_j)$ とする。補題より $B_1$ は $T$ の loop component を含まないから、$y_j$ と $x_i$ を結ぶ $B$ 上の arc $\gamma$ で $f(\gamma)$ が $S$ と横断的に1点で交わる simple loop となるものが存在し、矛盾。よって主張が示された。

主張2 $T$ は loop component を持たない。

$B_1$ が $T$ の loop component を含むとする。補題と主張1より outer most loop が存在し $n$ とする。$A$ を $\partial B_1$ と $n$ にはさまれた $B_1$ 内の annulus とし、$\Sigma'=\{x\in A \mid |g^{-1}(g(x))|\geq 2\}$ とする。ここで $g=f|A$ である。しからば、$g:A\to S^3$ は immersion で $g(A)\cap S=g(\partial A)\cap S=g(n\cup m)$ である。さらに $\Sigma'$ の各 component は $\partial A$ の異なる components を結ぶ arcs である。ここで、用語を二つ準備する。$r_1$, $r_2$ を $\Sigma'$ の components で $g(r_1)=g(r_2)$ とする。$A'$ を $r_1\cup r_2$ によって切りとられる $A$ 内の disk で $A'\cap l_1=\phi$ とする。

このとき $g(A')$ を取りのぞくことにより、新しい immersion $g^*: A^* \to S^3$ s.t. $A^*$ is an annulus $g^*(A^*) \cap S = g^*(cl(\partial A^* - l^*))$ ここで $l^*$ is a subarc with $g^*(l^*) = g(l_1)$。この操作を、a double curve surgery of type I と呼ぶ。次に、$r_i, s_i$ を $(i=1,2)$ $\Sigma'$ の components で $g(r_1)=g(r_2)$, $g(s_1)=g(s_2)$ かつ、$r_i \cup s_i$ に切りとられる $A$ 内の disk で $A_1 \cap A_2 = \phi$ かつ、$A_i \cap l_1 = \phi$ を満たすものが存在するものとする。このとき $g(A_1)$ と $g(A_2)$ を入れかえることにより、新しい immersion $g^*: A^* \to S^3$ を得る。この操作を a double curve surgery of type II と呼ぶ。"double curve surgery" という用語については [2] の Ch IV を参照されたい。さて、主張2の証明であるが、type I の surgeries をくり返すことにより、embedding $g^*: A^* \to S^3$ s.t. $A^*$ is an annulus, $g^*(A^*) \cap S = g^*(cl(\partial A^* - l^*))$, where $l^*$ is a subarc of $\partial A^*$ with $g(l^*) = g(l_1)$ を得る。このとき、$g(l_1)$ が isotopy で $S$ に押し付けられることがすぐわかり矛盾。主張2が示された。

主張3 $|l_1 \cap Y| = |l_2 \cap Y| = 2$

主張2に注意すれば、主張1と同様の議論で示される。

さて、$\Sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$, $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ によって区切られる $\partial B$ 上の arcs を $a_1, a_2, a_3, a_4$ とおく。これらの順序は図1の通りである。主張2より $T=m$ である。$\partial m = \{P_0, Q_0\}$

とおくと、主張3より $P_0 \in a_1$, $Q_0 \in a_3$ としてよい。

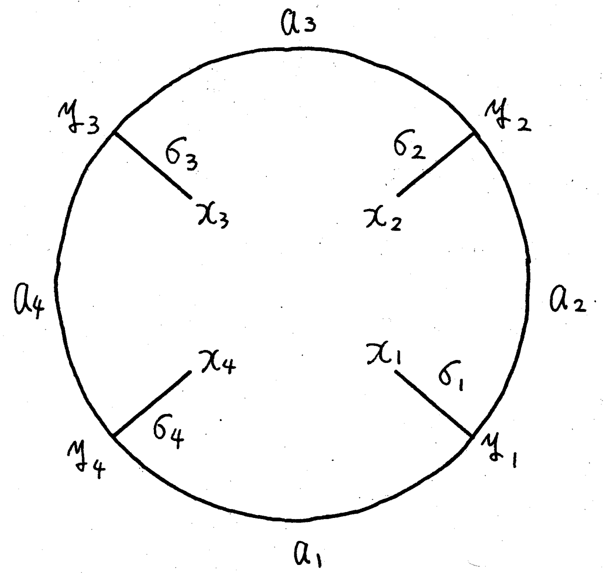
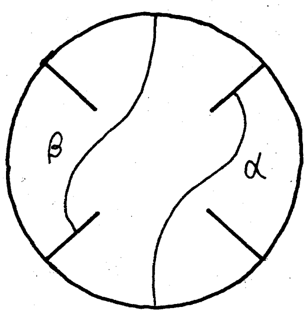


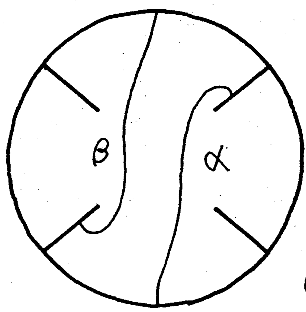

図1

$m \cap \Sigma = \phi$ のとき、$k$ は二つの clasp number one knots の connected sum であり、命題2、knots の prime decomposition の uniqueness から (c.f. [7]) $c(k_1) = c(k_2) = 1$ を得る。

$m \cap \Sigma \neq \phi$ とする。$\alpha, \beta$ を $m$ の subarcs で $\mathrm{Int}\,\alpha \cap \Sigma = \mathrm{Int}\,\beta \cap \Sigma = \phi$, $\partial\alpha = \{P_0, P_1\}$ $\partial\beta = \{Q_0, Q_1\}$ $P_1 \in \Sigma$, $Q_1 \in \Sigma$ とする。しからば、$P_1 \in \sigma_2$, $Q_1 \in \sigma_4$ としてよい。$\alpha, \beta$ に関して、図2の三つの場合がある。




Case A




Case B

図2

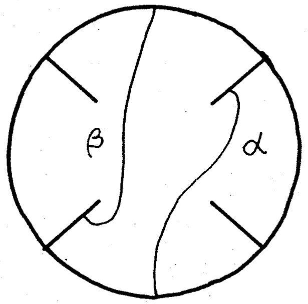



図2

Case C のとき。$|m\cap\sigma_4|>|m\cap\sigma_i|$ $(i=1,2,3)$ となり矛盾。よって Case C は起らない。

Case A のとき。$|m\cap\sigma_2|>|m\cap\sigma_1|$, $|m\cap\sigma_4|>|m\cap\sigma_3|$ より $f(\sigma_1)=f(\sigma_3)$, $f(\sigma_2)=f(\sigma_4)$ である。故に $|m\cap\sigma_i|$ is odd $(i=1,2,3,4)$ である。$l$ を $\partial B$ の subarc で $\partial l=\partial m$ かつ $\{y_1,y_2\}\subset l$ とし、$B'$ を $l\cup m$ によって張られる $B$ 内の disk とする。$|m\cap\sigma_i|$ is odd より $B'\cap X=\{x_3,x_4\}$ である。$\Sigma'=\Sigma\cap B'$ とおき、$i=1,2$ に対して、$\mu_i$ を $\Sigma'$ の component で、$\sigma_i$ の subarc かつ $\mu_i\cap l\neq\phi$ とする。また、$\nu_i$ を $\Sigma'$ の component で、$\nu_i\cap X\neq\phi$ かつ、$\nu_1$ $(\nu_2)$ は、$\mu_1$ $(\mu_2)$ によって分離される $B'$ 内の disk で $\mu_2$ $(\mu_1)$ を含まないものに含まれるとする。$s_1,\cdots,s_p$ $r_1,\cdots,r_q$ を図3の如き $\Sigma'$ の components とする。

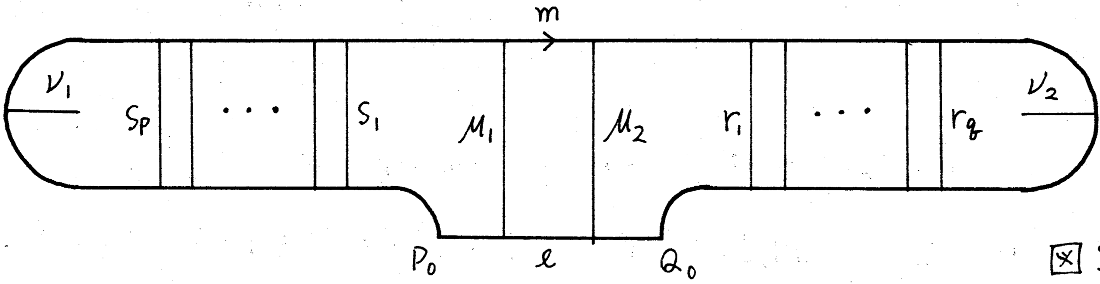



図3

$m$ に $P_0$ を始点 $Q_0$ を終点とする向きを入れ、$m \cap \Sigma' = \{z_1, z_2, \cdots, z_{2(p+q+2)}\}$ とおく。ここで $z_i$ は $m$ の向きに沿った $m \cap \Sigma'$ の $i$ 番目の点である。このとき図2から、$z_i \in \sigma_4$ ならば $i$ is even。$z_i \in \sigma_3$ ならば $i$ is odd。である。$g = f|_{B'}$ とおく。以下で double curve surgeries を用いて $g$ の singuralities を取り除いて行くが、新しい immersion に対しても同じ記号 $g$ と $B'$ を用いる。

Case A-1 $g(\mu_1) = g(\nu_1)$ のとき。

$\nu_1 \subset \sigma_3$ 故 $z_{p+1} \in \sigma_3$ 即ち $p$ is even。まず type I の surgeries を用いて $g(s_i) \neq g(s_j)$ $(1 \leq i < j \leq p)$, $g(r_i) \neq g(r_j)$ $(1 \leq i < j \leq q)$ とできる。このとき $p = q$ である。しからば $S$ 上の loops に注意して type II の surgeries を用いて $p = q = 0$ にできる。(1回の surgeries で減少する singuralities の数は偶数であることに注意せよ)。

Case A-2 $g(\mu_1) = g(\nu_2)$ のとき。

$\nu_1 \subset \sigma_4$ 故 $z_{p+1} \in \sigma_4$ 即ち $p$ is odd. よって Case A-1 の議論を用いて $p = q = 1$ $g(\mu_1) = g(\nu_2)$ となる。よってもう一度 surgery を行って、$p = q = 0$, $g(\mu_1) = g(\nu_2)$ を得る。

さて、我々は以上で、immersion $g : B' \longrightarrow S^3$ s.t. $\partial B' = m \cup \ell$, $g(\ell) = f(\ell)$, $g(B') \cap S = g(m)$, $p = q = 0$

and $g(M_i) = g(V_i)$ $(i=1,2)$ を得た。

この immersion に注目すれば、$S$ が $k$ の connected sum を与えないことがわかる。故に Case A は生じない。

全く同様の議論を用いて Case B は生じないことがわかる。

これで定理は証明された。

## References


[1] R.H.Fox : A quick trip through knot theory , Topology of 3-manifolds and related topics , Prentice - Hall , Englewood Clifts , N.J. , 1962 , 120 - 167.

[2] J.Hempel : 3-manifolds , Ann. of Math. Studies 86 Princeton N.J. Princeton University Press 1976.

[3] Y.Nakagawa : Elementary disks and their equivalences , Quart. J. Math. Oxford (2) , 27 (1976) , 355 - 369.

[4] Y.Nakanishi : Primeness of links , Math. Sem. Notes Kobe University , 9 (1981) , 415 - 440.

[5] D.Rolfsen : Knots and links , Mathematics Lecture Series 7 , Publish or Perish Inc. , Berkeley , Ca. 1976.

[6] M.G.Scharlemann : Unknotting number one knots are prime , Preprint.

[7] H.Schubert : Die eindeutige zerlegbarkeit eines knotens in primknoten , Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg , math - nat. Kl. , 3. Abh. (1949).

[8] H.Schubert : Über eine numerish knoteninvariante , Math. Zeitschr. Bd. 61 , S. 245 - 288 (1954).

[9] H.Seifert : Über das Geschlecht von knoten , Math. Ann. 110 (1935) , 571 - 592.

[10] T.Shibuya : Some relations among various numerical invariants for links , Osaka J. Math. 11 (1974) 315 - 322.

[11] N.Smythe : Handlebodies in 3-manifolds , Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970) . 534 - 538.