

結び目理論に現われるグラフについて

東大文理 小林一章  
(Kazuaki Kobayashi)

$G$  を平面グラフとし、 $G$  の各 edge に  $a_+, a_-, b_+, b_-$  のいずれかの code がつけられているとする。更に  $G$  は次の (1), (2) をみたす  $S^2$  上への埋め込み  $f: G \rightarrow S^2$  をもつとする。

(1)  $S^2 - f(G)$  の各領域の境界を多辺形と呼んだ時、 $f(G)$  が作る各多辺形は  $b_-$  code をもつ辺を偶数個 (0 個でもよい) 含む。

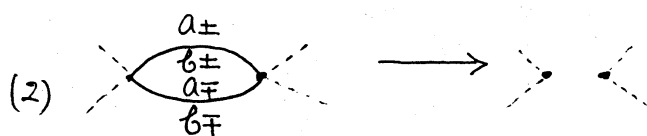
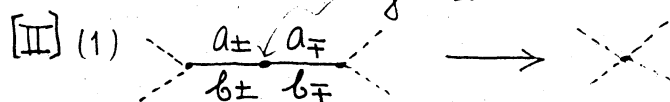
(2)  $G$  の各頂点は  $a_-$  code をもつ辺と偶数個 (0 個でもよい) だけ incidence 関係にある。

$G$  上に次の操作  $\rightarrow$  を導入する。(以下の [0] の操作によって  $G$  とその  $S^2$  上への実現  $f(G)$  を区別せずを使う)

[0]  $G$  の平面又は  $S^2$  上の勝手な 2 つの実現  $f(G), g(G)$  に対し  
 $f(G) \leftrightarrow g(G)$

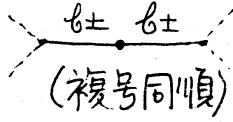
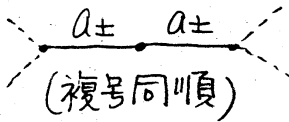
[I] loops 及び degree 1 の頂点を  $G$  が持っているとき、それは loops 及び degree 1 の頂点を除去した graph を  $G'$  として

$G \rightarrow G'$

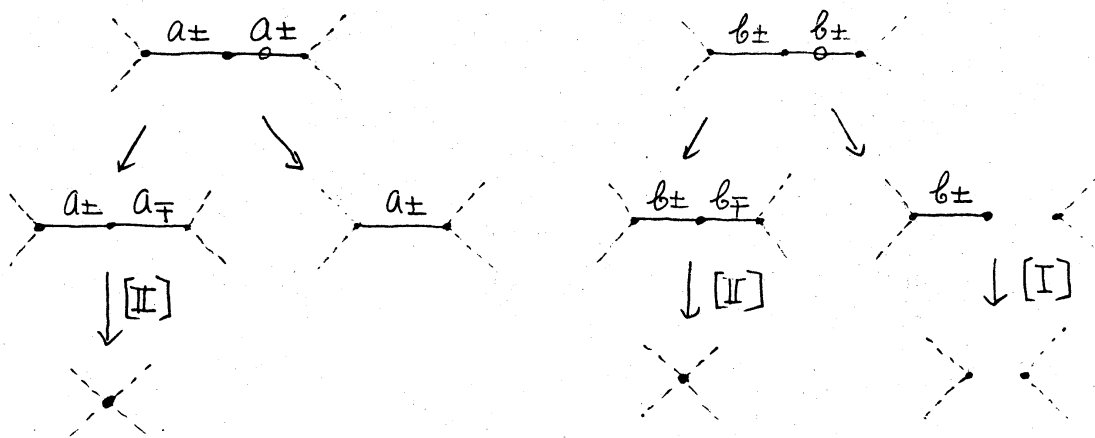


これを行なう (逆方向の操作は行わない)  
(code 同順)

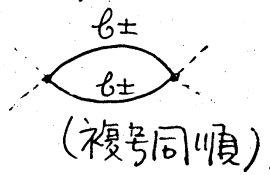
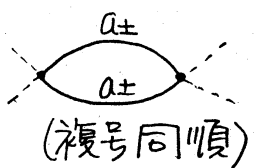
[III] (1) お頁 [II] (1) の code 以外の degree 2 の頂点があると  $G$  の性復 (2) から次の場合のみ



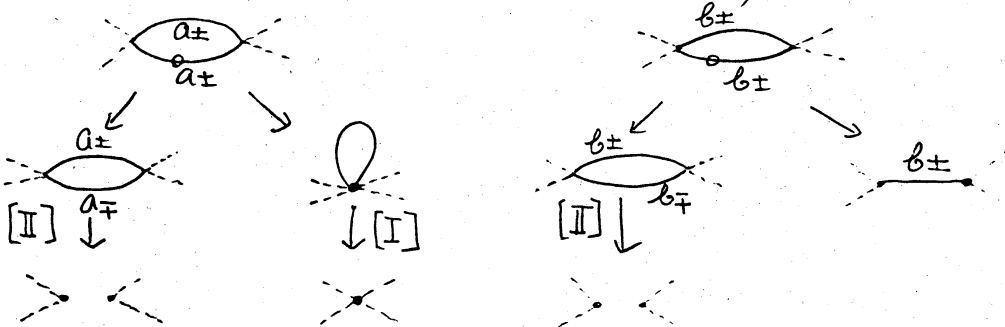
このときここで以下のような graph の辺の contraction, deletion を行なう。



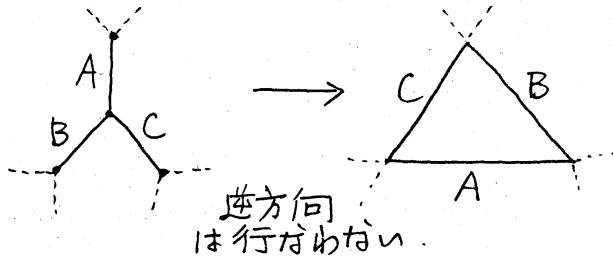
(2) お頁 [II] (2) 以外の code をもつ 2 辺形があるとする。このとき  $G$  の性復 (1) から次の場合のみ



このときここでグラフの辺の contraction, deletion を行なう。



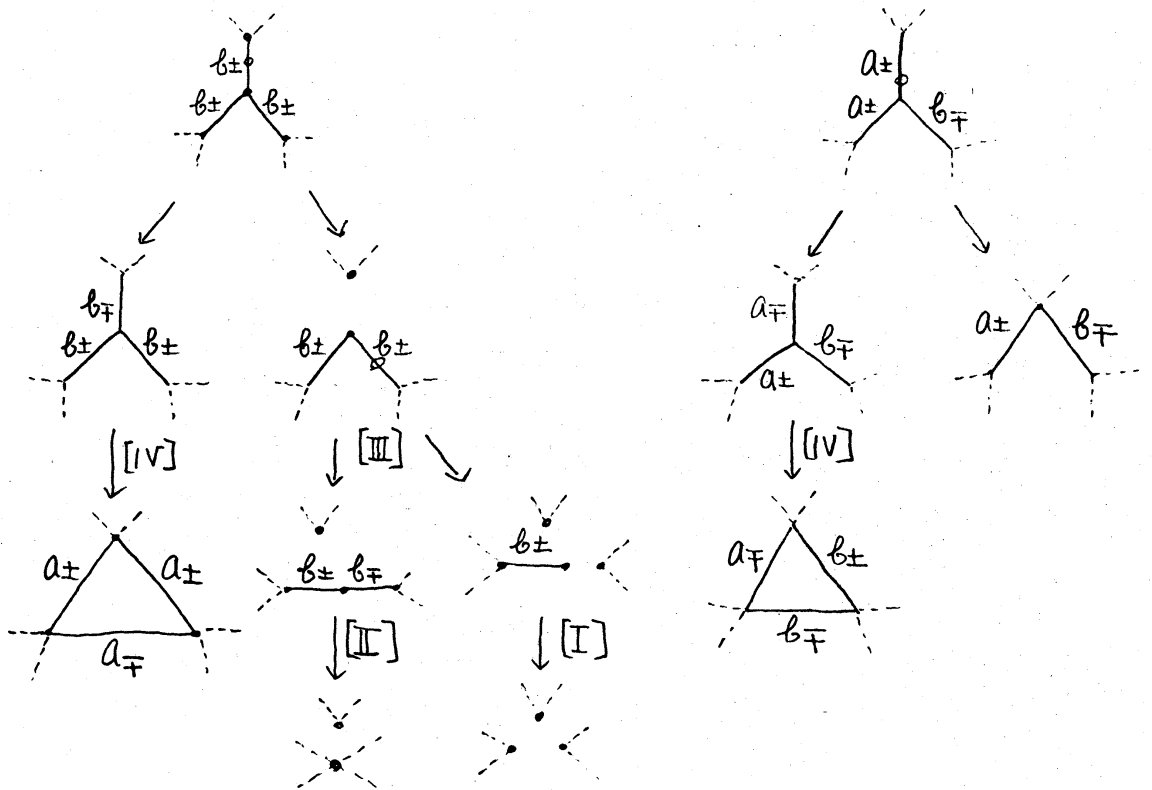
[IV]  $G$  に degree 3 の頂点がありその頂点を共有する3つの辺が次の3対以外の code をもつとき



code の変化は  $A, B, C$  が  
 三辺形上の  $A, B, C$  に移  
 り  $a$  は  $b$  に,  $b$  は  $a$  に

変り,  $\pm$  code は不変 ; この操作の使えない3対の code  
 3つ共  $a$ -code, 1つのみ  $a$ -code 及び  $(b_{\pm}, b_{\pm}, b_{\pm}), (a_{\pm}, a_{\pm}, b_{\mp})$  (複号同順).

[V]  $G$  に degree 3 の頂点があり, 上の操作が使えない3対の code は  $G$  の性質(2)より  $(b_{\pm}, b_{\pm}, b_{\pm}), (a_{\pm}, a_{\pm}, b_{\mp})$  のみ. このとき次の操作を行なう



上の [0] 以外の操作に番号順に優先順位をつける。従って例えばグラフ  $G$  に操作 [IV] を行なって出来たグラフ  $G_1$  にもし操作 [II] と [IV] が出来る可能性があるときはまず [II] を行なう。

グラフ  $G$  を上の操作で次々と変化させていった時全ての選択肢の先が全て自明なグラフ (即ち頂点のみから成るグラフ) になるとき  $G$  は分解可能 (resolutionable) という。

問題 1. 操作 [0] ~ [V] でどの様なグラフが分解可能か?

2. 操作 [0] ~ [III] でどの様なグラフが分解可能か?

先ず問題 1 を考察してみよう。

前述で定義したグラフの分解方法を Edge Reduction Method (ED-法) という。

ED-法の特長: グラフ  $G$  に ED-法を繰り返し適用し ED-法に依り reduced な graph  $G'$  になったとする (即ち  $G'$  には [I] ~ [V]迄の操作がもう適用出来ない。[0] は可逆なので例外)。 $G'$  は一般に連結でないが次の事が言える。(多辺形を考える時は常に  $G^2$  上へ実現したものを考えている)。

(1) 「 $\#E(G') < \#E(G)$ 」又は「 $\#E(G') = \#E(G)$  で  $\#V(G') < \#V(G)$ 」

ここで  $E(G)$ ,  $V(G)$  は各々  $G$  の辺の集合, 頂点の集合

(2)  $G'$  は loop, degree 1 の頂点, 2 辺形, degree 2 の頂点, degree 3 の頂点をもたない。

(3) ある多辺形の隣り合わない 2 つの頂点がある多辺形に隣

接する1つの多辺形に含まれることはない。何故ならもしそういう事が起ると degree 2 の頂点が存在する事になる(又は dual graph が 2 辺形をもつ。)

従って以下では vertex の degree 4 以上, 辺の数 3 以上の多辺形のみから成るグラフを考える。

平面グラフに関するオイラーの定理より

$$\#V(G) = p, \#E(G) = q, \#R(G) = \ell \quad \text{とすると}$$

$$p - q + \ell = 2 \quad \text{ただし } R(G) \text{ は } S^2 - G \text{ の領域の集合}$$

$$\text{今頂点の degree 4 以上だから } 4p \leq 2q$$

多辺形は辺の数 3 以上だから  $3\ell \leq 2q$  (ED法に関する reduced graph 及びその dual graph が loop を持たないから, 全ての面を数え上げる時, 各辺は必ず丁度 2 回数えられる)。よって  $2 = p - q + \ell \leq \frac{q}{2} - q + \frac{2}{3}q = \frac{q}{6}$

従って上式は  $q \geq 12$  でなければ矛盾する。即ち  $q \leq 11$  なる全てのグラフは分解可能

注. degree 4 以上の頂点, 辺の数 4 以上の多辺形のみから成る平面グラフが存在しないことは上と同様に示せる。

$q = 12$  のとき (1) 全ての多辺形が 3 辺形としてみる。

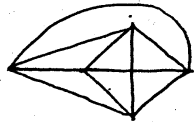
$$\ell = \frac{2}{3}q = 8 \quad 2 = p - q + \ell = p - 12 + 8 \quad \therefore p = 6$$

更に頂点の次数が5以上のものが  $u (\geq 1)$  個あるとすると

$$4(p-u) + 5u \leq 2g = 24 \quad \therefore 4p + u \leq 24$$

$$p=6 \text{ を代入. } 24 + u \leq 24 \rightarrow \text{矛盾} \quad \therefore u=0$$

従って全ての多辺形が3辺形なら  $p=6$ ,  $\varepsilon=8$  で全ての頂点の次数=4.



(2)  $\varepsilon$  個の多辺形のうち  $t$  個が3辺形で  $\varepsilon > t \geq 1$  とすると  
( $t=0$  となる事はない)

$$3t + 4(\varepsilon - t) \leq 2g = 24. \quad \rightarrow 4\varepsilon \leq 24 + t$$

$$\text{また } 4p \leq 2g = 24 \text{ より } p \leq 6$$

$$\text{従って } 2 = p - g + \varepsilon \leq 6 - 12 + 6 + \frac{t}{4} \quad \therefore t \geq 8$$

$\varepsilon > t \geq 8$ . 一方一般に辺の数が3以上の多辺形のみだ

$$\text{から } 3\varepsilon \leq 2g = 24. \quad \therefore \varepsilon \leq 8 \quad \text{これは矛盾}$$

従ってこの場合は起らない。以上より  $g=12$  のとき実際に起って  $[0] \sim [V]$  で分解不能なグラフは上図のみ。

$g=13$  のとき このときは全ての多辺形が3辺形という事はない。そこで  $\varepsilon$  個の多辺形のうち  $t$  個が3辺形で  $\varepsilon > t \geq 1$  ( $t=0$  となる事はない) とすると

$$3t + 4(\varepsilon - t) \leq 2g = 26 \quad \rightarrow 4\varepsilon \leq 26 + t$$

$$\text{また } 4p \leq 2g = 26$$

$$\text{従って } 2 = p - g + \varepsilon \leq \frac{26}{4} - 13 + \frac{26}{4} + \frac{t}{4} \quad \therefore t \geq 8.$$

$p > t \geq 8$  より  $p \geq 9$ . 一方辺の数が3以上の多辺形のみだから  $3t \leq 2g = 26$  より  $t \leq \frac{26}{3}$  には矛盾

従って  $g = 13$  であるような全てのグラフは分解可能

同様の計算を  $g = 14$  のときに行なうと  $p = 7, g = 14, t = 9$  で4辺形が1つ3辺形が8つから成る分解不可能なグラフが存在することがわかる。

次に問題2.について考察を行なう。

$G$  が最初の所で述べられている2つの性質(1), (2)を満足しているとして,  $G$  の基本グラフ  $F_G$  を次で定義する。

$V(F_G) = V(G)$  とし更に  $v_i, v_j \in V(G)$  を結んでいる  $G$  の辺があるとき(複数本でも良い),  $v_i$  と  $v_j$  を結ぶ  $F_G$  の辺が唯一つある。また  $F_G$  は loop をもたないとする。ただし  $F_G$  は  $G$  が持っていた性質(1), (2)を必ずしも持っていない事に注意。  
 定理1.  $G$  は性質(1), (2)をみたすグラフとする。  $G$  の基本グラフ  $F_G$  が 2-regular graph なら  $G$  は操作 [0] ~ [III] で分解可能である。

証明.  $F_G$  が 2-regular だから  $G$  は次のように parametrized される。  $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  とし  $v_i$  と  $v_{i+1} \pmod{n}$  を結ぶ  $G$  の  $a$ -code の辺が  $g_i$  本 又は  $b$ -code の辺が  $g_i$  本のとき  $x_i = a^{g_i}$  又は  $b^{g_i}$  とし  $G = G(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  とおく。ここで

$G$ の性質(1)より  $v_i$  と  $v_{i+1} \pmod n$  を結ぶ  $G$ の辺は  $a$ -code のみか  $b$ -code のみであることがわかる。また操作 II より  $v_i$  と  $v_{i+1}$  を結ぶ辺は  $a+$ ,  $a-$ ,  $b+$  又は  $b-$  のいずれか1種類の code をもつと仮定してよい。更に  $G$ の性質(2)より

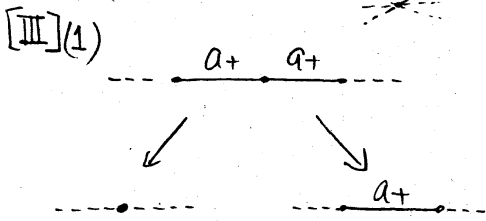
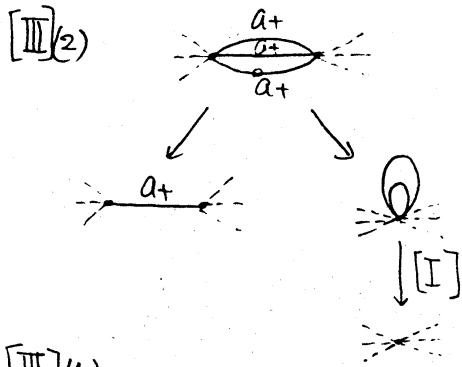
$$x_i = a^{g_i} \text{ で } g_i \text{ が 偶数} \Rightarrow x_{i+1} = a^{g_{i+1}} \text{ で } g_{i+1} \text{ が 偶数} \text{ 又は } x_{i+1} = b^{g_{i+1}}$$

$$x_i = a^{g_i} \text{ で } g_i \text{ が 奇数} \Rightarrow x_{i+1} = a^{g_{i+1}} \text{ で } g_{i+1} \text{ が 奇数}$$

$$x_i = b^{g_i} \Rightarrow x_{i+1} = a^{g_{i+1}} \text{ で } g_{i+1} \text{ が 偶数} \text{ 又は } x_{i+1} = b^{g_{i+1}}$$

のいずれかが起る。よって

Case 1. どこか1ヶ所に  $x_i = a^{g_i}$  ( $g_i$  は奇数) があると全ての parameter  $x_j$  が  $x_j = a^{g_j}$  ( $g_j$  は奇数) となる。この時は各  $i$  について  $v_i$  と  $v_{i+1}$  ( $i=0, 1, 2, \dots \pmod n$ ) を結ぶ辺において次のような操作 [III] (2) を行なう。すると出来るグラフは1

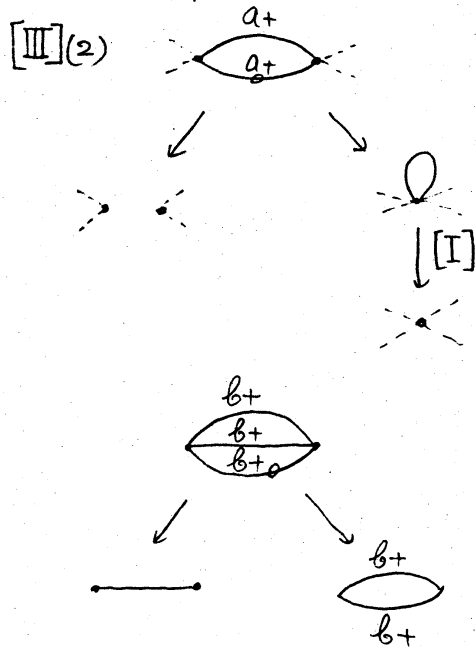


点のみから成るグラフか全ての辺が  $a+$  (又は  $a-$ ) code をもつ 2-regular graph. そこで操作 [III] (1) を行なう。これを読けると出来る全てのグラフは1点のみから成るグラフになり、分解可能。よって以下では  $x_i = a^{g_i}$  ( $g_i$

が奇数) という parameter はない場合を考える。

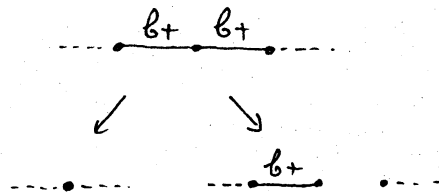


Case 2  $q_i = a^{g_i}$  ( $g_i$  は偶数) という parameter があるとき  
 それらの parameter に対応する所で操作 III(2) を行なうと出来る



グラフは1頂点のみから成るグラフ  
 かその基本グラフが 2-regular  
 graph 又は線分と同相となるグラフ  
 で各辺は  $b$ -code のみをもつもの  
 になる。次に左図のような部分に  
 更に [III](2) を行なうと線分と同相  
 なグラフか 2-regular graph とな  
 る。線分と同相なグラフは操作 I  
 で1頂点のみから成るグラフになり、

2-regular graph で  $b$ -  
 code のみから成るグラフに対しては [III](1) を行なう。これを



を繰り返すと頂点のみから成る  
 グラフになる。従って分解可能

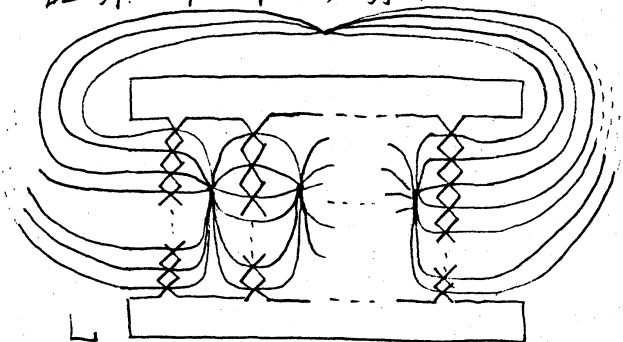
Case 3. 全ての parameter  $q_i$  が  $q_i = b^{g_i}$  のとき Case 2 の  
 後半と同様にすればよい。 J

次に種々の絡み目(link) をグラフを使って表わしてみる。  
 絡み目をグラフに直す方法は文献 [K.2] で述べてあるので参  
 考にしていただきたい。[K.2] で述べられているように絡み目

から導かれるグラフは性質(1),(2)をみたし, 逆に性質(1),(2)をみたす平面グラフから絡み目が構成出来る事がわかる。

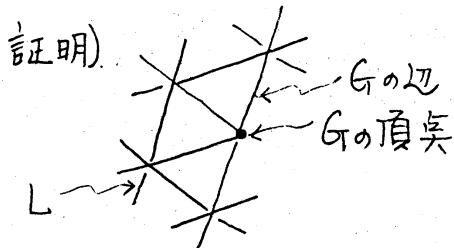
命題. Pretzel link のグラフはその基本グラフが 2-regular graph となるようなグラフであり, 逆に基本グラフが 2-regular graph となるような性質(1),(2)をみたすグラフから作られる絡み目は pretzel link である。 ┌

証明 下図より明らか



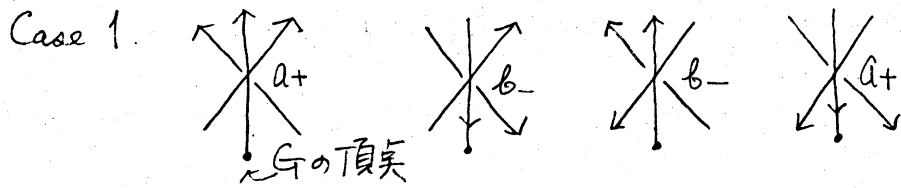
グラフ  $G$  の  $a_+$ -code をもつ辺全てから成る部分グラフを  $G_{a_+}$ ,  $a_-$ -code をもつ辺全てから成る部分グラフを  $G_{a_-}$ , 以下同様に  $G_{b_+}, G_{b_-}$  を定義する。従って例えば  $G$  が  $G = G_{a_+}$  をみたすグラフとは  $G$  の全ての辺の code が  $a_+$  であることを意味している。

命題(見玉)  $G$  が Alternating link diagram から作られる連結なグラフであるなら  $G = G_{a_+} \cup G_{b_-}$  又は  $G = G_{a_-} \cup G_{b_+}$  である。

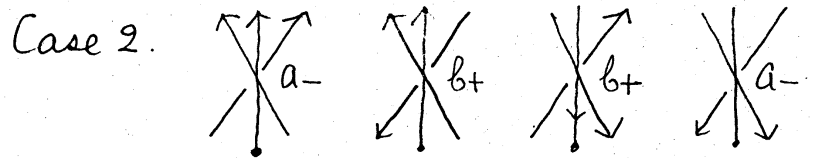
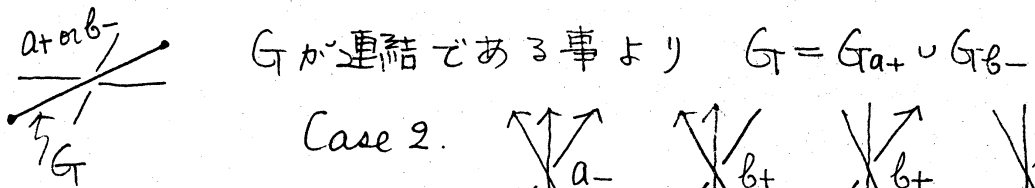


$L$  を Alternating link (の diagram) とすると,  $S^2 - G$  の1つ領域の所では図のようになる。従って  $G$  の

頂点のからみて起る可能性は次のようになる。



従ってこのとき  $G$  の 1 つの頂点のまわりでは  $a_+$  又は  $b_-$  し  
 が起らない。隣り合、た  $G$  の頂点でも同じ事が言えるので、

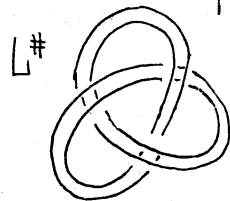
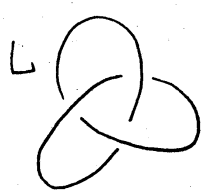


このときは同様の理由により  $G = G_{a_-} \cup G_{b_+}$

』

注. この命題の逆も成立つ。

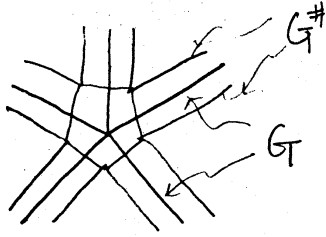
Parallel link のグラフ. link  $L$  (の diagram) の各成分に  
 平行な 2 本の閉曲線を描き, それらから成る link を  $L^\#$  とか  
 く.  $L^\#$  を  $L$  から得られる parallel link という.  $L^\#$  は  $L$  の



成分の数の 2 倍だけ成分をも  
 つ link である.  $L$  から導か  
 れるグラフを  $G$  としたとき,  $L^\#$  から導かれるグラフを  $G^\#$  とす  
 る. 以下  $L$  は non-split link とする.

$G^\#$  の作り方.  $S^2 - G$  の各領域の内部に各領域の境界になっ  
 ている多辺形を相似に描く. 更に  $G$  の頂点のまわりにある今  
 描いた相似多辺形の頂点を順に隣り合っているもののみ結ん

でいい。出来たグラフが  $G^\#$  である。



$G^\#$  の特長  $p = \#V(G)$ ,  $q = \#E(G)$ ,  
 $\varepsilon = \#R(G) \equiv \#\{\text{component of } S^2 - G\}$   
 とすると

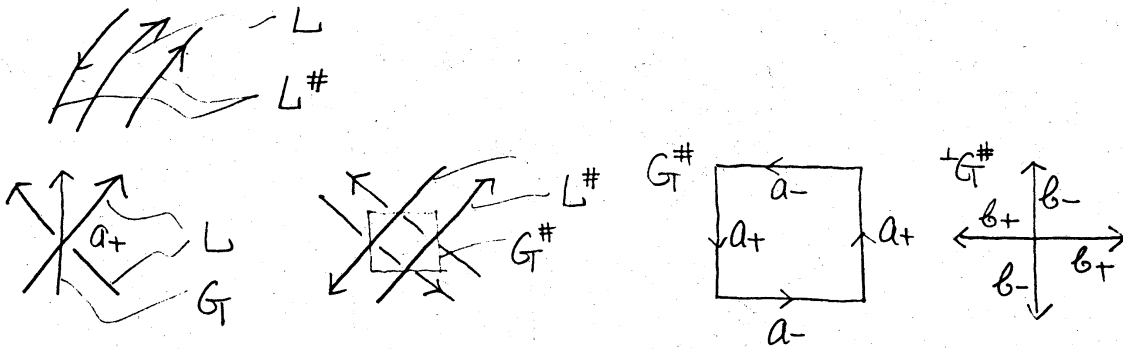
- (1) 4-regular graph
- (2)  $\#V(G^\#) = \text{total degree of } G = 2 \times \#E(G) = 2q$
- (3)  $\#R(G^\#) = \#R(G) + \#E(G) + \#V(G) = p + q + \varepsilon = 2(q+1)$
- (4)  $\#E(G^\#) = 2q + \text{total degree of } G = 4q$

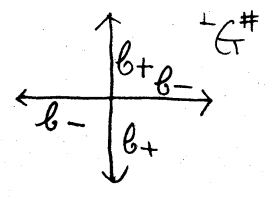
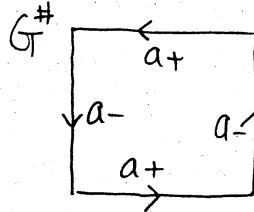
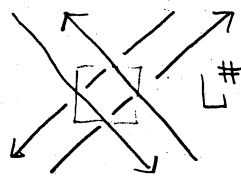
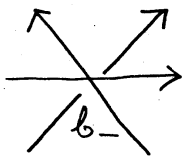
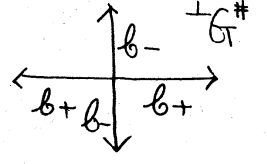
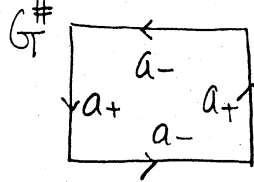
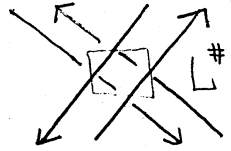
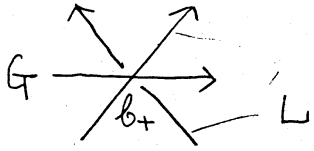
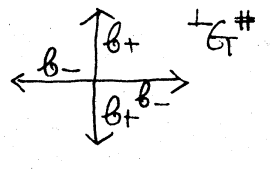
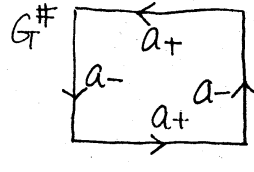
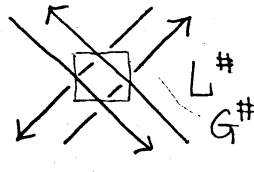
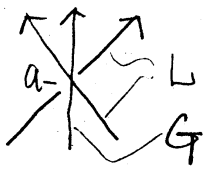
(又はオイラーの定理と上の(2), (3)を使ってよい)

$G^\#$  の双対グラフ  ${}^+G^\#$  の作り方 (双対グラフは  $\mathbb{R}^2$  で考えて unbounded region に頂点をもつ方であると一応決めておく)。  
 まず  $G$  及びその双対グラフ  ${}^+G$  を考える。  $|G| \cap |{}^+G| =$  有限個の点。  
 ${}^+G^\#$  は  $G \cup {}^+G$  を描き  $|G| \cap |{}^+G|$  の各点を頂点としてつけ加えたもの。

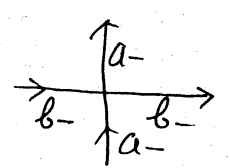
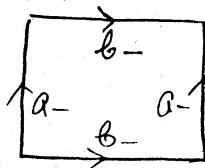
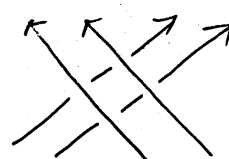
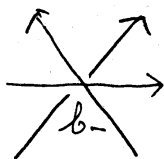
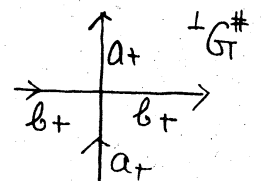
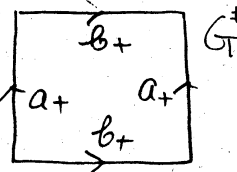
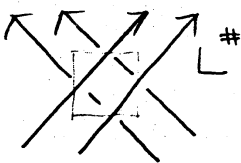
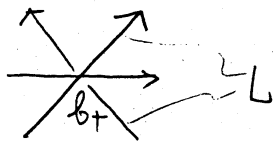
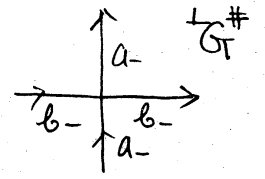
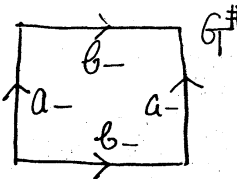
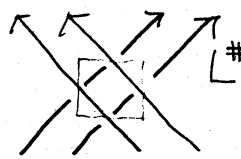
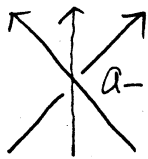
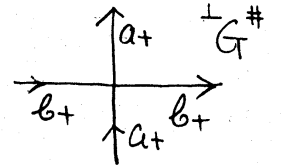
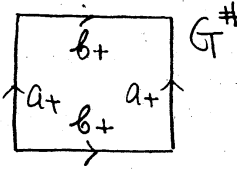
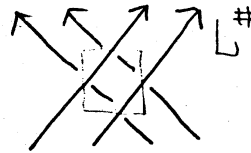
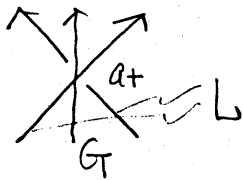
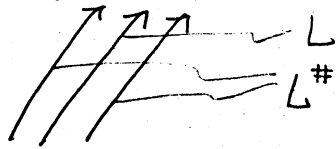
$G^\#, {}^+G^\#$  の coding の仕方

0-type (opposite direction type) のとき





S-type (same direction type) のとき



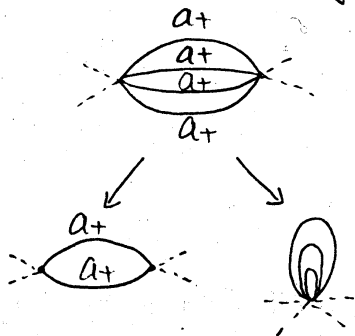
グラフ  $G$  が even type とは  $G$  の adjacent matrix  $A(G)$  の全ての成分が偶数であるようなときを言う。

注.  $A(G)$  の  $(i, j)$  成分は頂点  $v_i$  と  $v_j$  を結ぶ辺の数を表わしている. 従って  $A(G)$  は対称行列

定理 2. (1)  $G = G_{a+} \cup G_{a-}$  ( $G_{a+} = \phi$  又は  $G_{a-} = \phi$  でもよい) であって even type のとき,  $G$  は operation [0] ~ [III] で分解可能

(2)  $G = G_{b+} \cup G_{b-}$  ( $G_{b+} = \phi$  又は  $G_{b-} = \phi$  でもよい) であって,  $G$  の頂点の次数が 2 か又は次数 2 でない任意の 2 つの頂点を結ぶ任意の path が偶数個の辺から成るなら  $G$  の双対グラフ  ${}^+G$  は operation [0] ~ [III] で分解可能

証明. (1) even type の  $G = G_{a+} \cup G_{a-}$  に対し operation [III](2) を行おうと crossing change side 及び smoothing side に出来る



グラフは共に, 再び  $G_{a+} \cup G_{a-}$  の形をした even type のグラフ. 従って operation [III](2) を続けていくと有限個の葉のみから成る自明なグラフ

に到達する. 即ち分解可能である.

(2)  $G$  が連結でなければ各連結成分毎にこの双対グラフが分解可能か否かを調べればよいから,  $G$  は連結とする.  ${}^+G$  の 2 つの頂点で adjacent の関係にあるものは  $G$  では少なくとも 1

つの辺を共有する2つの領域である。その2つの領域  $A, B$  が辺を含む連結な成分を共有するとすると、それらは線分または円周に同相であり、条件よりそれらは偶数個の辺から成る。従って  $A, B$  に対応する  ${}^+G$  の2頂点  $u_A, u_B$  を結ぶ辺は偶数個 即ち  ${}^+G = \tilde{G}_{a+} \cup \tilde{G}_{a-}$  である  $\therefore$  even type. 故に(1)より  ${}^+G$  は分解可能。』

注. operation [I], [II], [III] が  $G$  に作用するとき、その各々は双対グラフ  ${}^+G$  に対しても作用出来るから operation [I], [II], [III] で  $G$  が分解可能なら  ${}^+G$  も [I], [II], [III] で分解可能であり逆も言える。

上の証明(1), (2)を総合すると次の事が言える。

系.  $G = G_a \cup G_b$  ( $G_a = G_{a+} \cup G_{a-}$ ,  $G_b = G_{b+} \cup G_{b-}$ ) であって、部分グラフ  $G_a$  が even type であり、 $G_b$  の頂点のうち  $G_a \cap G_b$  に含まれるものを任意に取り出し同一視して出来るグラフ達  $\{G_b/\sim\}$  の全てが定理2(2)の条件をみたしているから  $G$  は operation [I], [II], [III] で分解可能である。

証明.  $G$  の部分グラフ  $G_a$  に対し定理2(1)の証明方法を適用し分解していくと、上記の  $\{G_b/\sim\}$  のいずれかにたどり着く。それが定理2(2)の条件を満足しているから定理2(2)より  ${}^+(G_b/\sim)$  は分解可能。従って上の注より  $G_b/\sim$  は分解可能。故に  $G$  は [I], [II], [III] で分解可能。』

定理3.  $G$ をその基本グラフ $F_G$ の任意の頂点の次数が2以下であるようなグラフとすると $G$ は operation  $[0] \sim [III]$  で分解可能.

証明. 定理1の証明を参照.



## References

- [H] Hoste, J., A polynomial invariants of knots and links, preprint
- [J] Jones, V.F.R., A polynomial invariant for knots via von Neuman algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.* 12 (1985) 103-111
- [K.1] Kobayashi, K., Link の Hoste 多項式, 数理解析研 講究録「計算機を応用した低次元トポロジーの研究」
- [K.2] Kobayashi, K., グラフと絡み目に決する多項式, 数理解析研講究録「グラフ理論とその応用」
- [L-M] Lickorish, W.B.R and Millett, K.C., Topological invariants of knots and links, preprint
- [O] Ocneanu, A., A polynomial invariants for knots: A combinatorial and an algebraic approach, preprint.
- [F-Y-H-L-M-O] Freyd, P; Yetter, D; Hoste, J; Lickorish, W.B.R.; Millet, K and Ocneanu, A, A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc.* 12(2)(1985) 239-246.
- [Y-K] Yajima, T. and Kinoshita, S., On the graphs of Knots, *Osaka Math. J.*, 9 (1957) 155-163.