

## D-変形について II

東洋大工 山下正勝 (Masakatsu Yamashita)

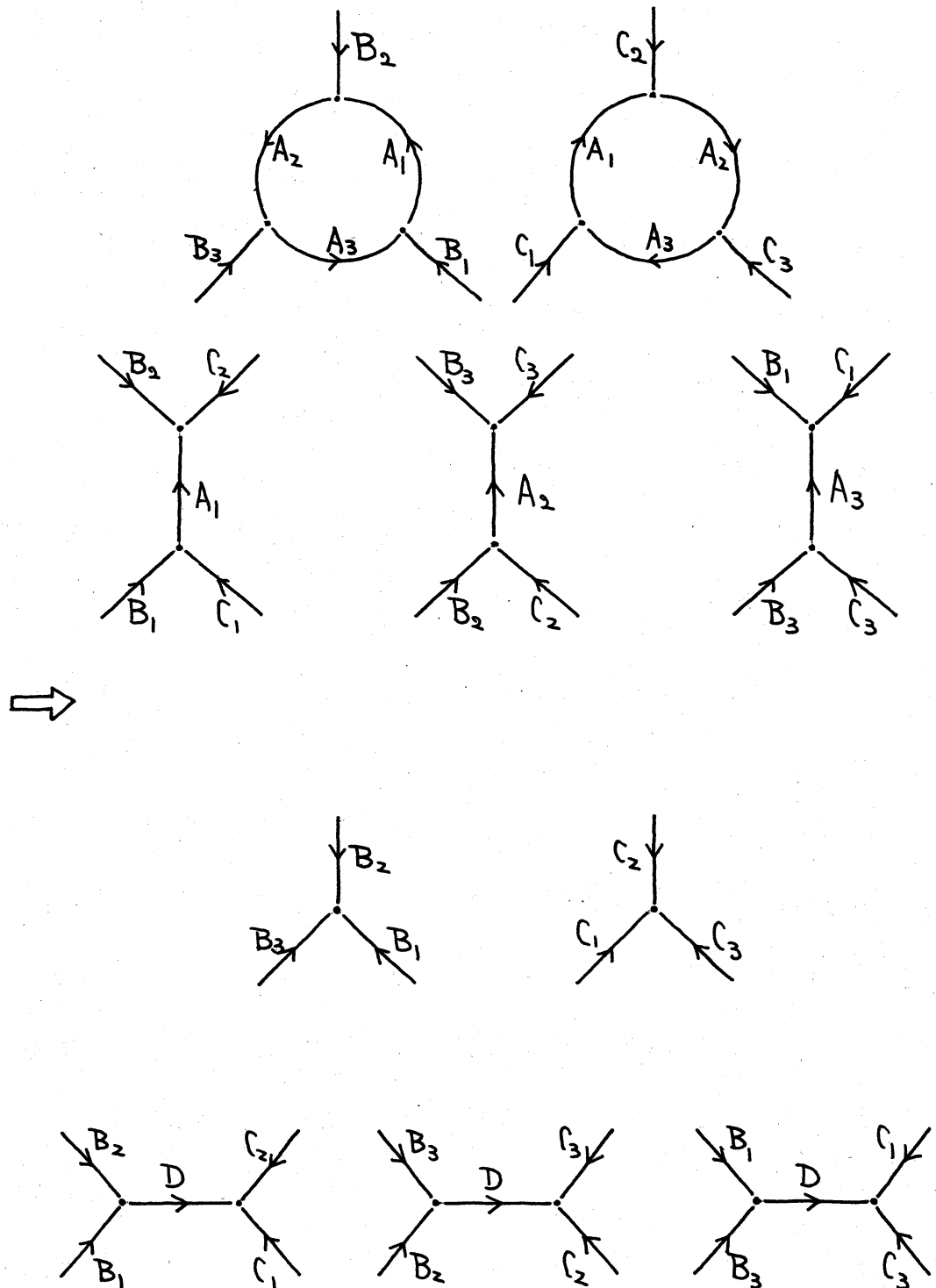
3次元多様体を表現する方法の1つとして球面グラフを用いる方法がある。これは3-ballの境界 $S^2$ を適当に貼り合わせることにより3-ballから任意の3次元多様体が構成できるという思想から来るもので、古来知られている方法の1つである。一方、池田裕司氏(神戸大教養)のFake Surfacesに関する多年にわたる一連の仕事がある。池田氏はこのFake Surfacesと前述の球面グラフとの関係を明らかにして、そのような球面グラフとしてはDS-diagramsと称する性質のよいものだけを扱えば十分であることも見抜いた。これによって同一の3次元多様体を表す球面グラフは相当程度に規制されることになった。しかしながら同じ3次元多様体を与えるDS-diagramsは無数にあるので、それらが互いに移り合えるような算法が欲しい。幸いFake Surfaceに関する池田氏の仕事の中にFake Surfaceの変形として幾何学的な手法が数多く得られているので、とりあえずこれらの手法をDS-diagramの変形という形に翻訳することから始めるのが

よからう。というわけで手始めに  $D$ -変形と称する算法から  
 出發することにした。  $D_1$ -変形,  $D_2$ -変形については [1] に  
 おいて既に詳述したので、ここでは  $D_3$ -変形 及び  $D_m$ -変形  
 ( $m \geq 4$ ) について述べることにする。ただ今回までの各変形  
 は球面グラフ中の関連する local な部分が十分離れている場  
 合についてのみ述べたものであって、ニアミスも犯している  
 場合の処理については一切触れていない。これらについては  
 未整理なので割愛したが、具体的な例にあたってみると実に  
 多くのニアミスが生じているので、具体例の処理を眺めなが  
 ら整理してゆきたいと考えている。他にもいろいろな  $D$ -  
 変形を考へることができようが、いましばらくは具体例に即  
 してかつ必要に応じて追加する方式をとってゆきたい。

さて  $D_1$ -変形と  $D_2$ -変形についての問題点を述べると、

- (1) DS-diagram に  $D_1$ -変形を施すと  $\gamma$  の段階ですべてに DS-  
 diagram の性質がくずれる,
- (2) DS-diagram に  $D_2$ -変形を施すと、球面グラフが非連結  
 になる場合があって  $\gamma$  の場合には DS-diagram の性質がくずれる、  
 ということがある。しかし、 $D_3$ -変形,  $D_m$ -変形 ( $m \geq 4$ ) の場合  
 には  $\gamma$  の心配はない。即ち、 $D_3$ -変形 及び  $D_m$ -変形 ( $m \geq 4$ ) は  
 DS-diagram を確実に DS-diagram に移す変形である。以下、  
 これらの  $D_3$ -変形 及び  $D_m$ -変形 ( $m \geq 4$ ) について図解で述べる。

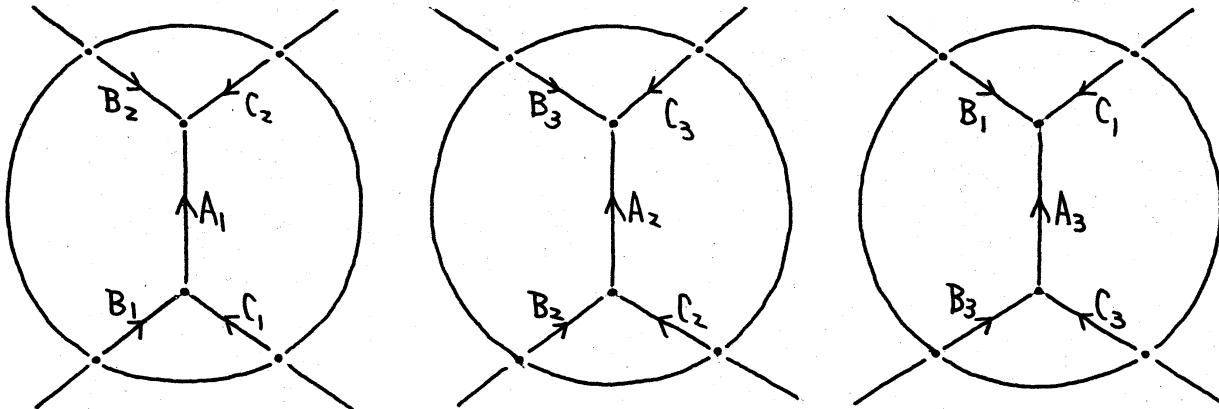
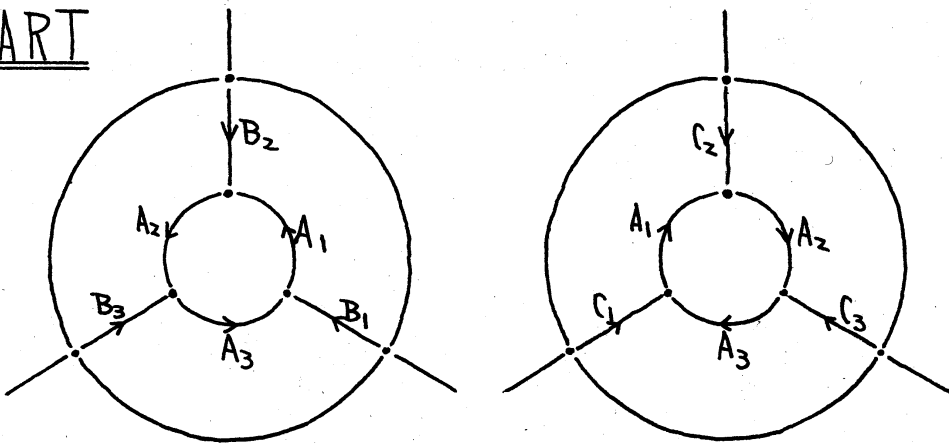
$D_3$ -変形 3辺形に関する下記の local な変形を  $D_3$ -変形という。



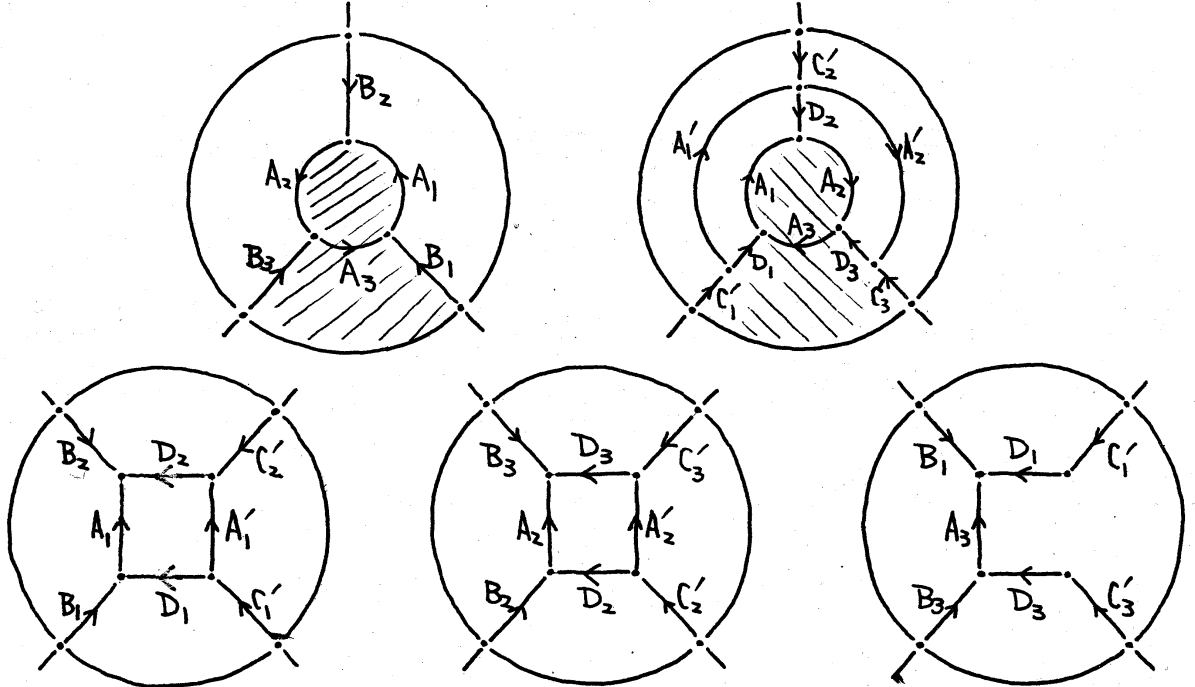
- 定理 (1)  $D_3$ -変形は DS-diagram を保つ  $\rho$ -変形である。  
 (2)  $D_3$ -変形によって DS-diagram の頂点数は 4 つ減る。

証明 は球面グラフに 3 種の基本変形を次々に施すことにより、下記のように図解で示される。local な変形であるから、予め必要部分の近傍を選び、周囲を構成する 1-grams の重複度は全て 2、その他の 1-grams の重複度は全て 3 であるような polygram として出發する。

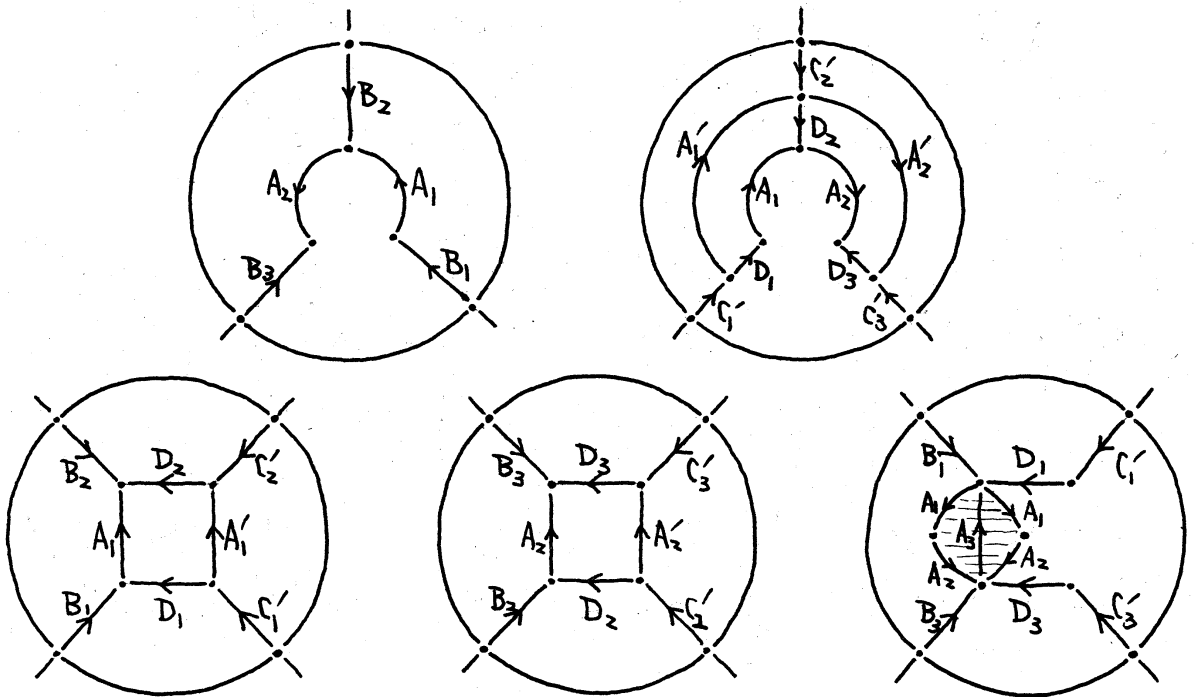
START



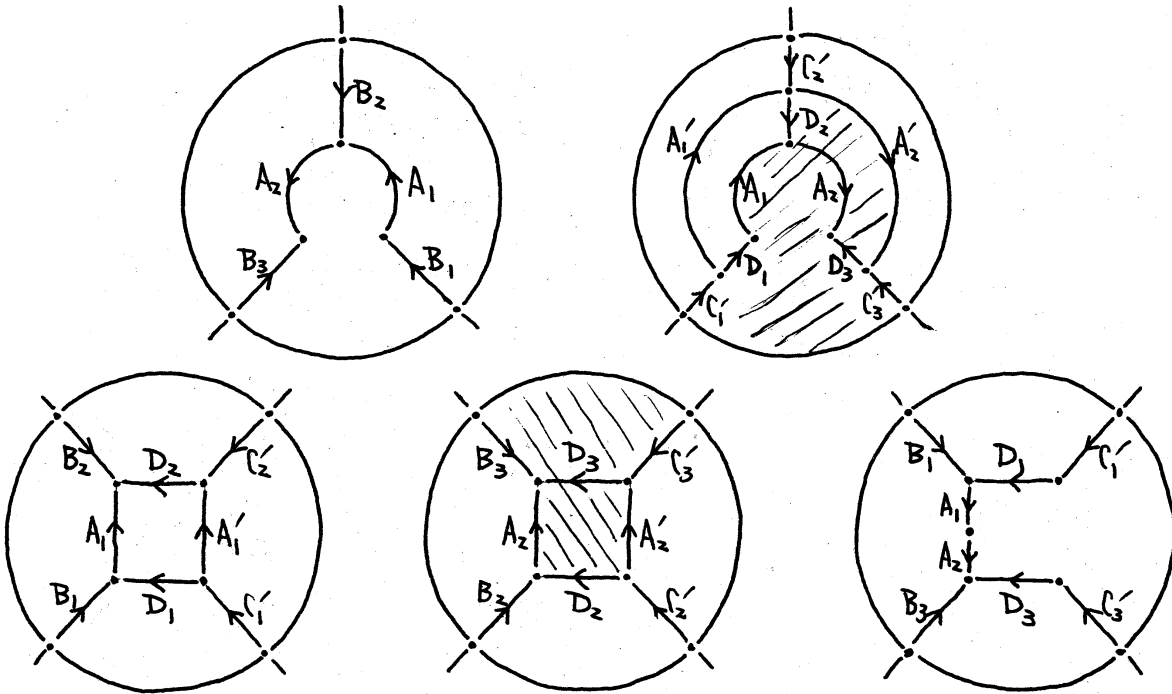
⇒ 分割:  $\{(C_1, C_2, C_3) \rightarrow (C'_1, D_1, C'_2, D_2, C'_3, D_3)$   
 $\} A_1, A_2 \text{ の添加}$



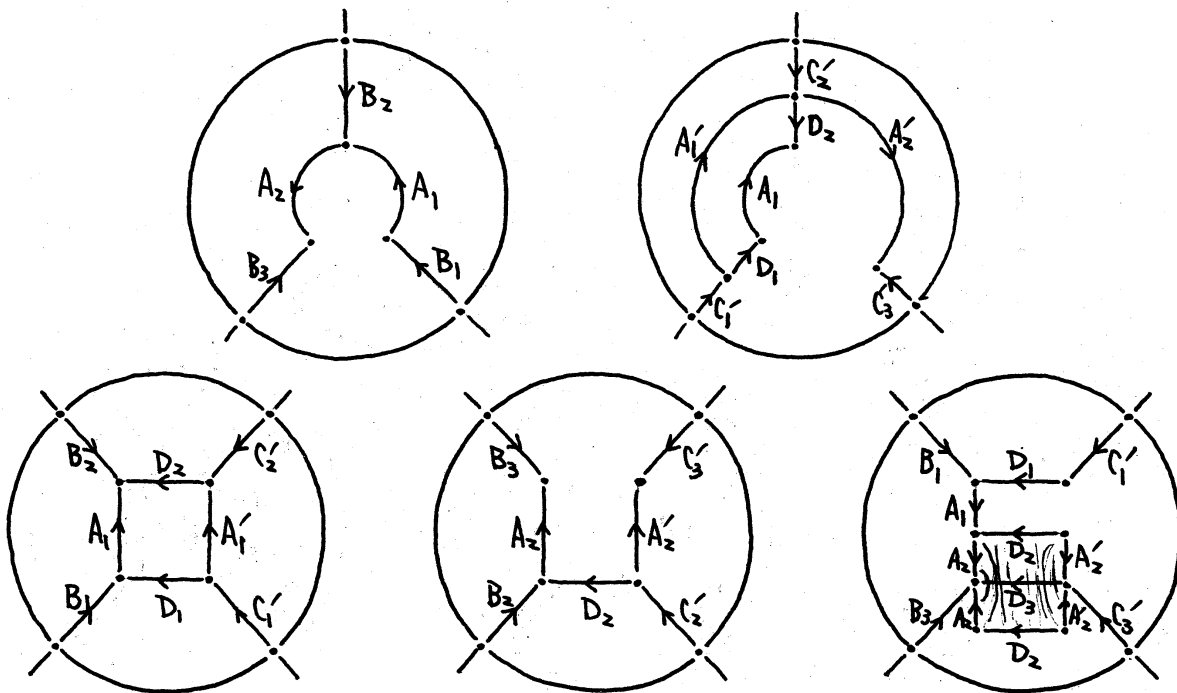
⇒ 切り貼り



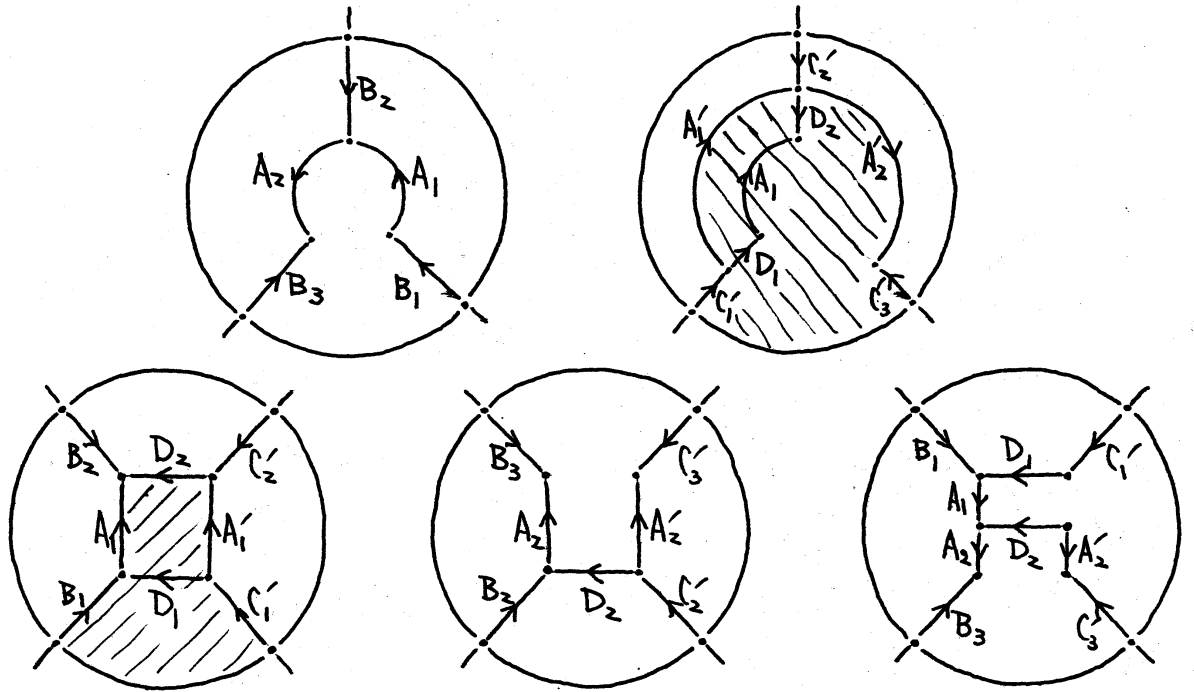
⇒ Collapse



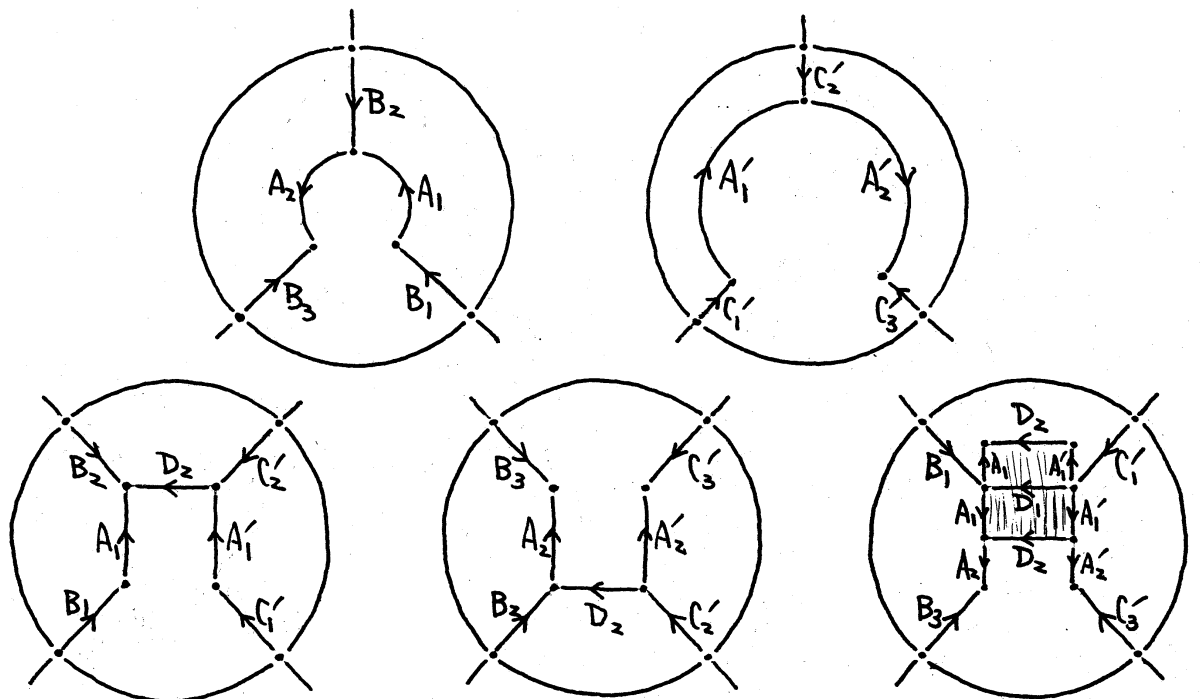
⇒ 切り貼り



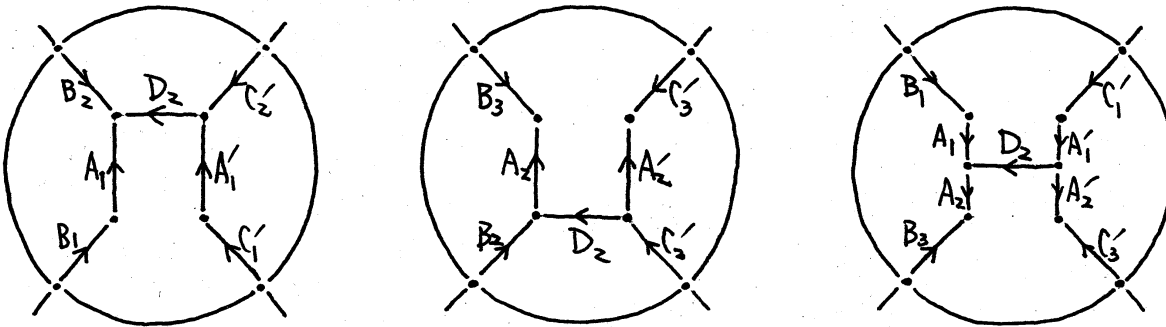
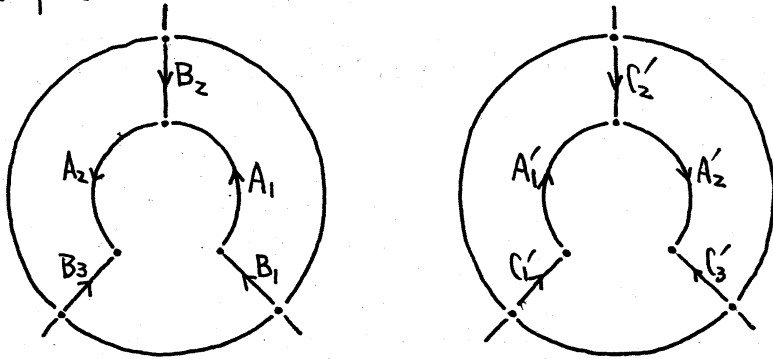
⇒ collapse



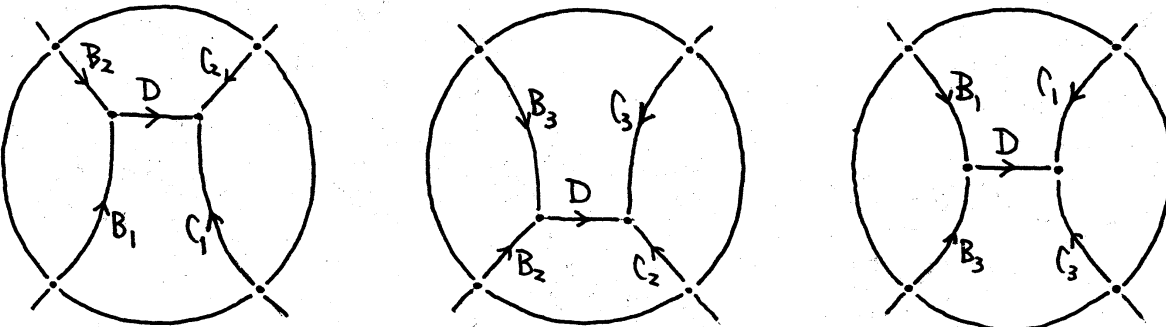
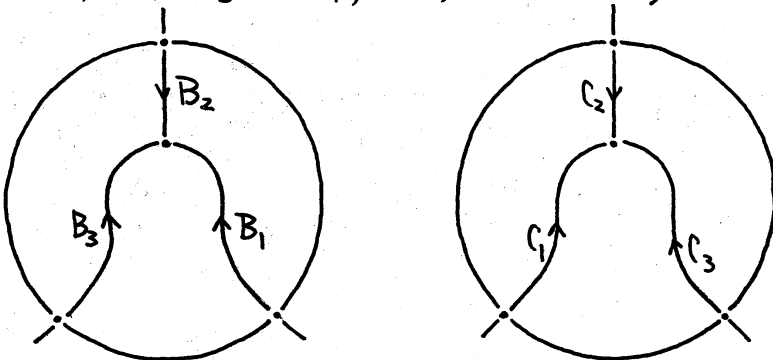
⇒ 切り貼り



⇒ Collapse



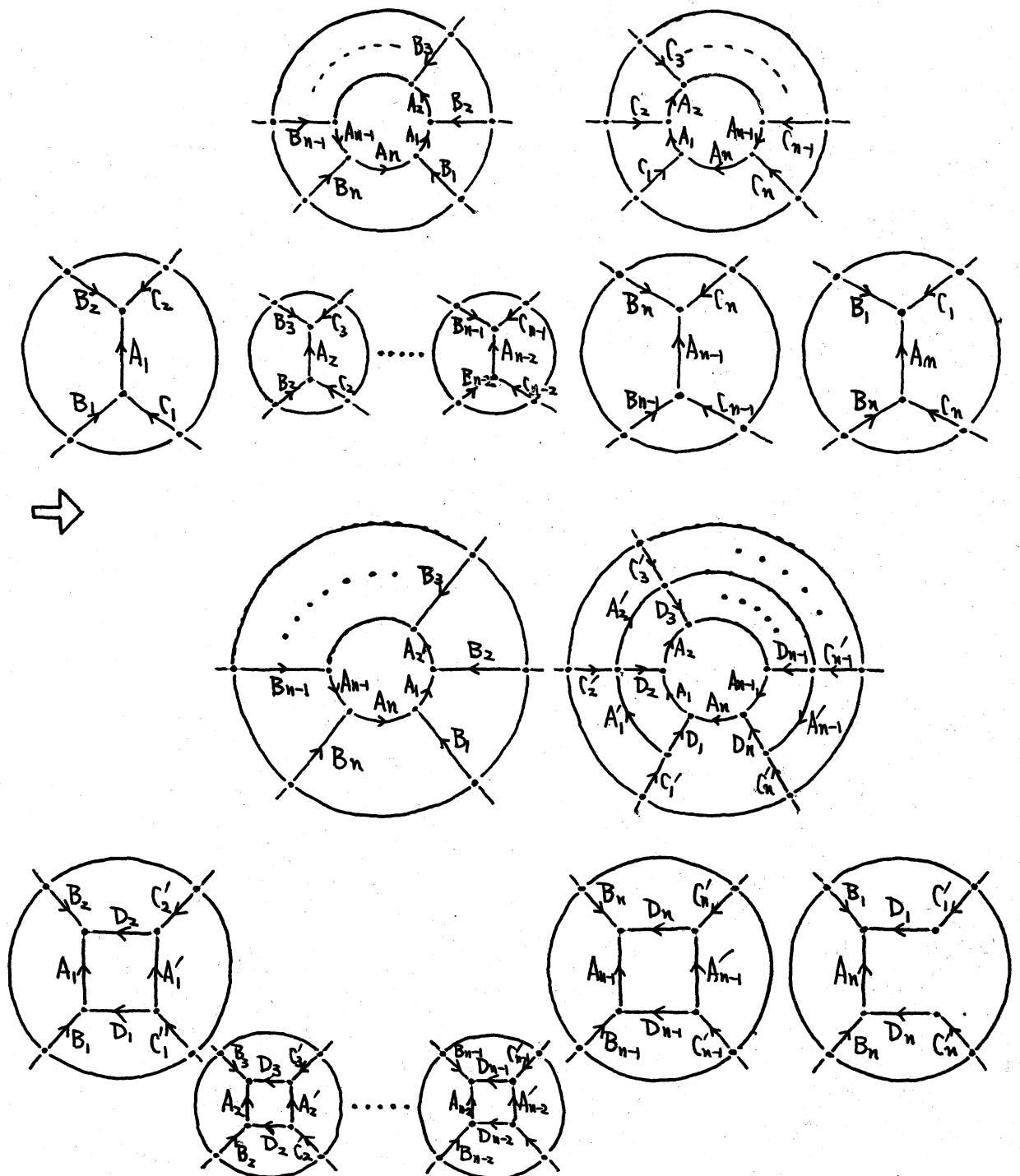
(分割)⁻¹:  
 ⇒  $(B_1A_1, B_2, B_3\bar{A}_2; C_1A_1, C_2, C_3\bar{A}_2; \bar{D}_2)$   
 $(B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3; D)$

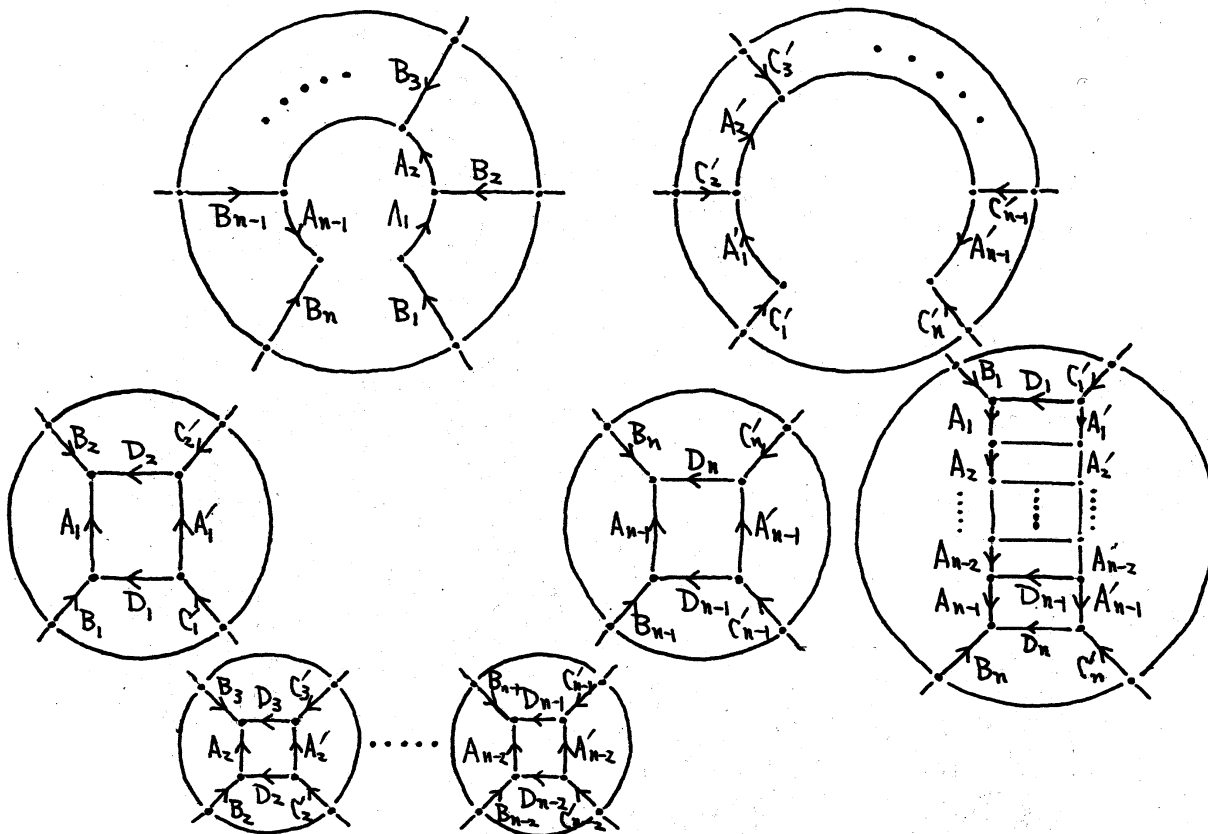
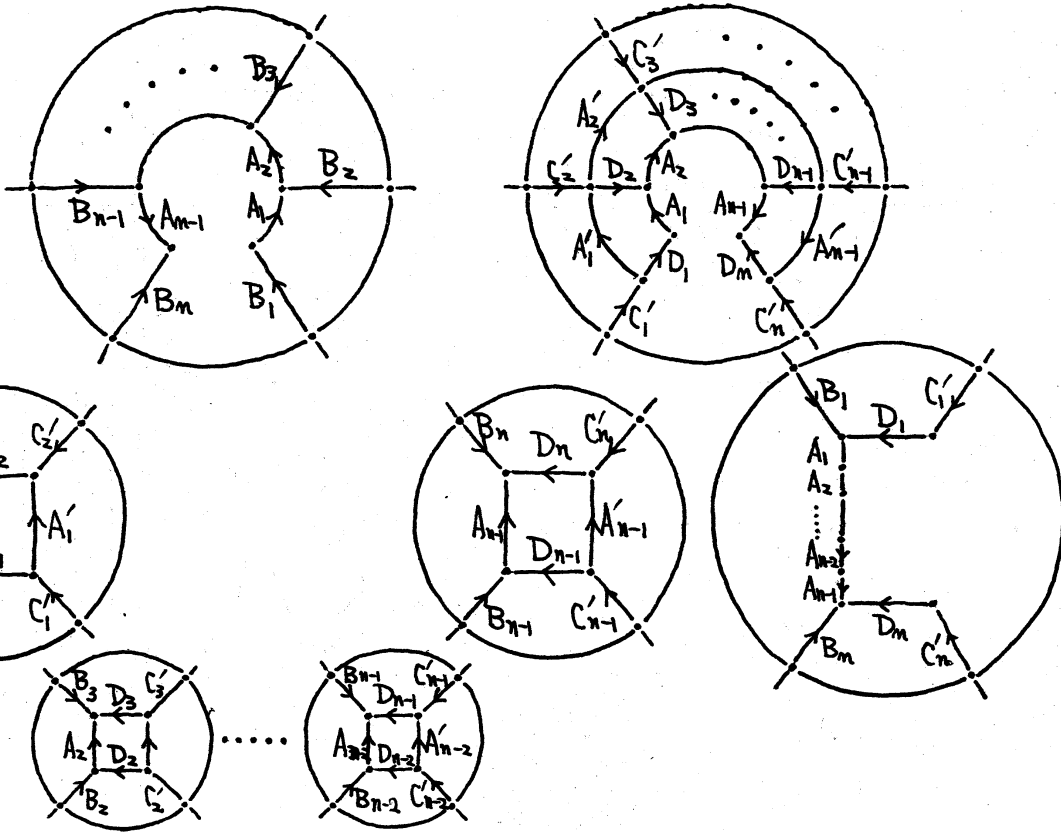


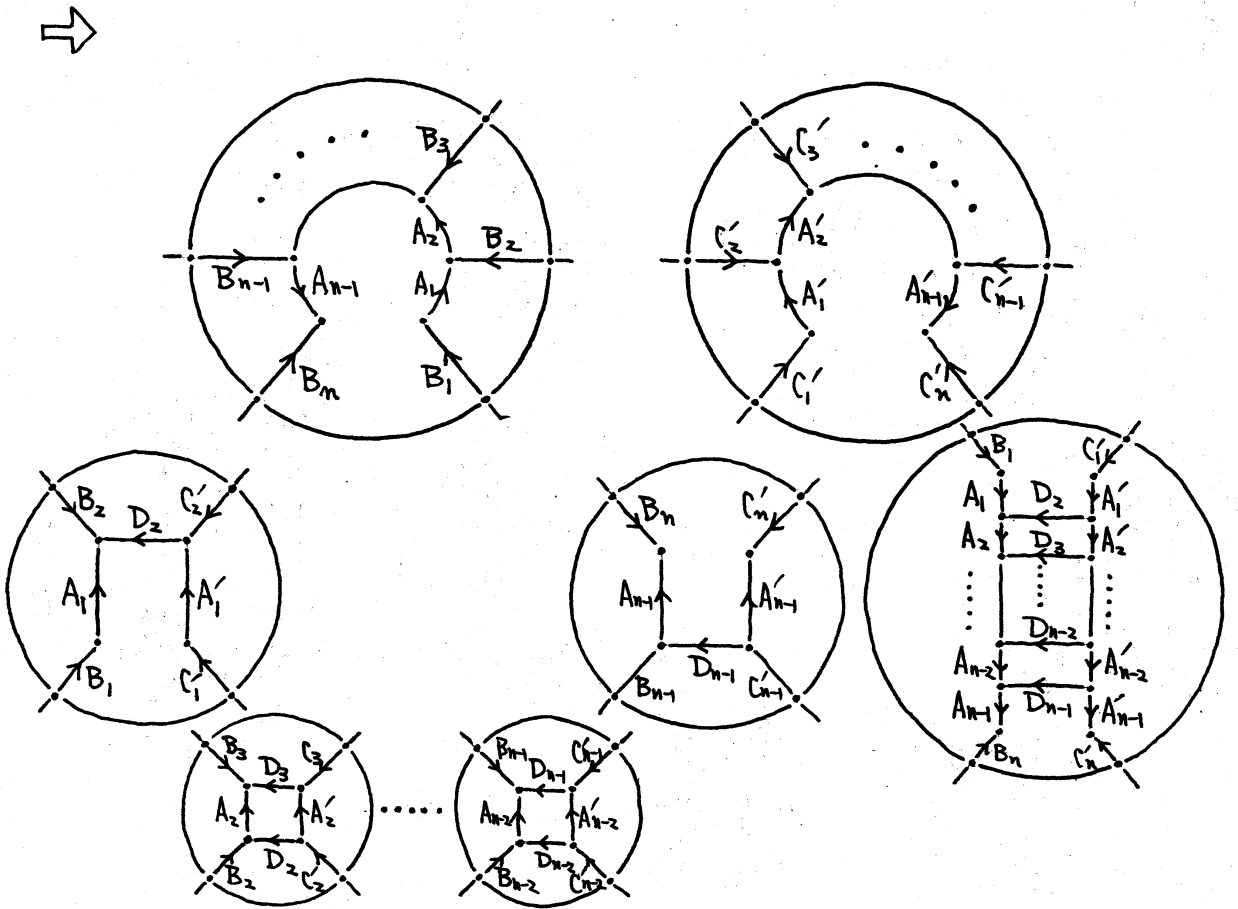
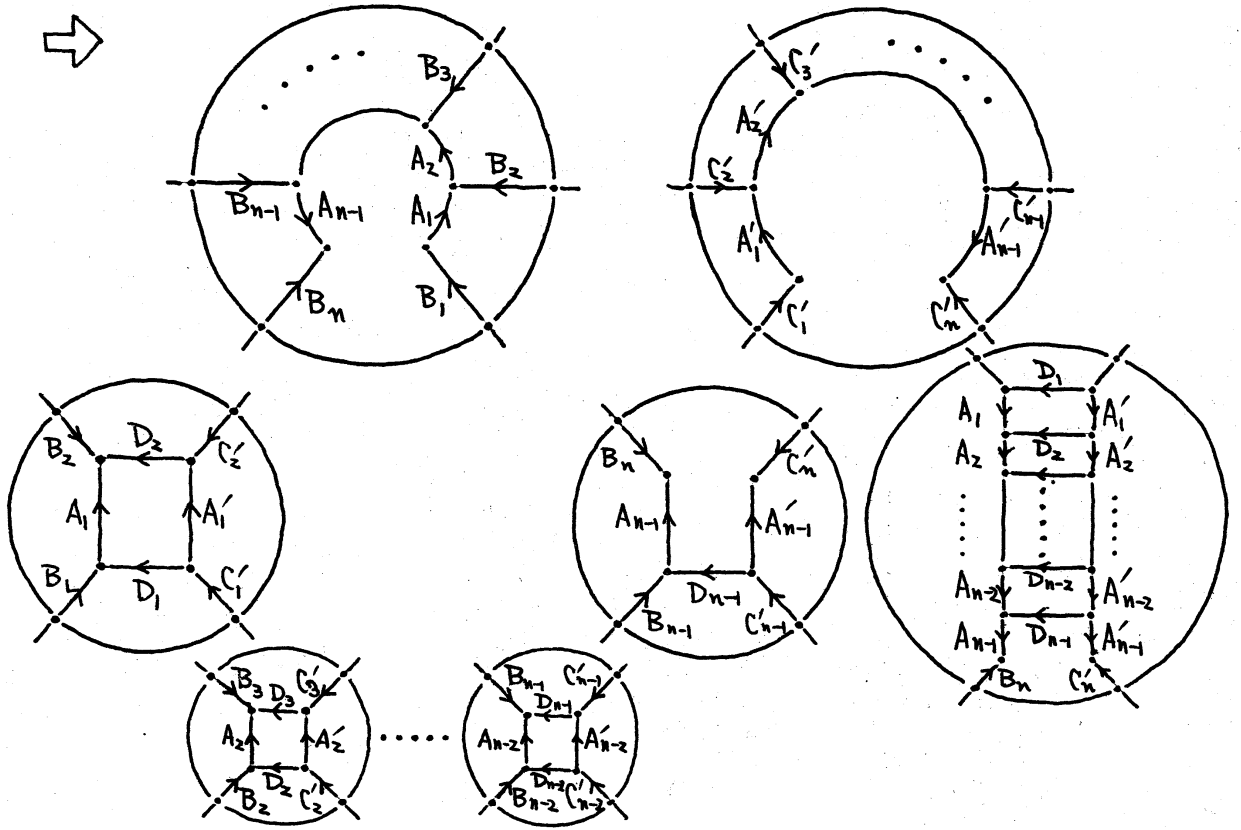
GOAL



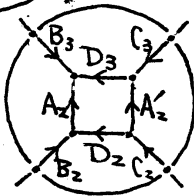
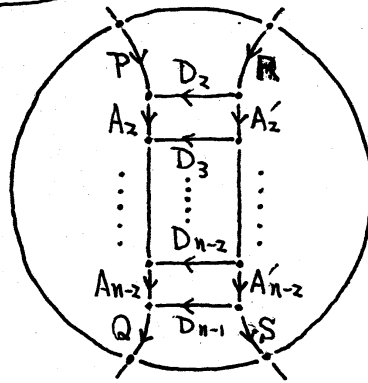
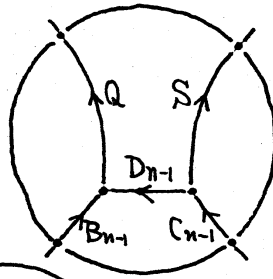
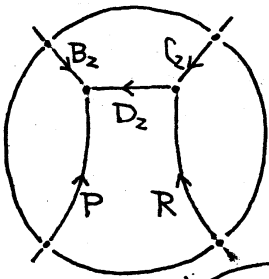
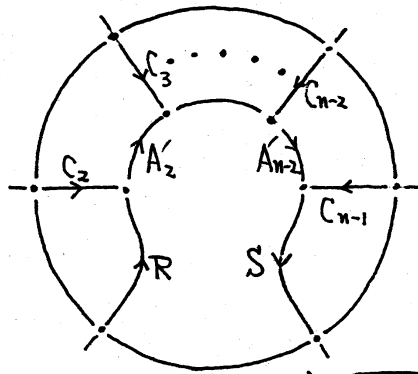
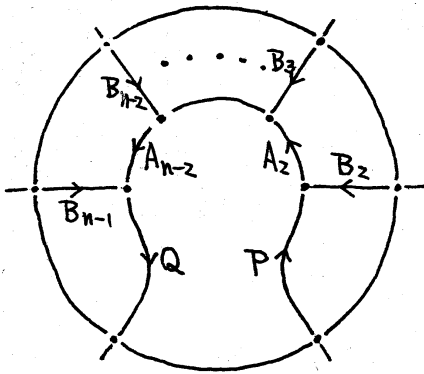
一般の  $n$  辺形 ( $n \geq 4$ ) に対しても  $D_3$ -変形と同様の手法を考えることができる。以下、その手順を簡単に図示しておく。



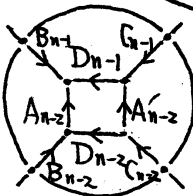




$$\Rightarrow \begin{cases} (B_1 A_1, A_{n-1} \bar{B}_n) \rightarrow (P, Q) \\ (C_1 A_1, A_{n-1} \bar{C}_n) \rightarrow (R, S) \end{cases}, C_i \rightarrow C_i$$

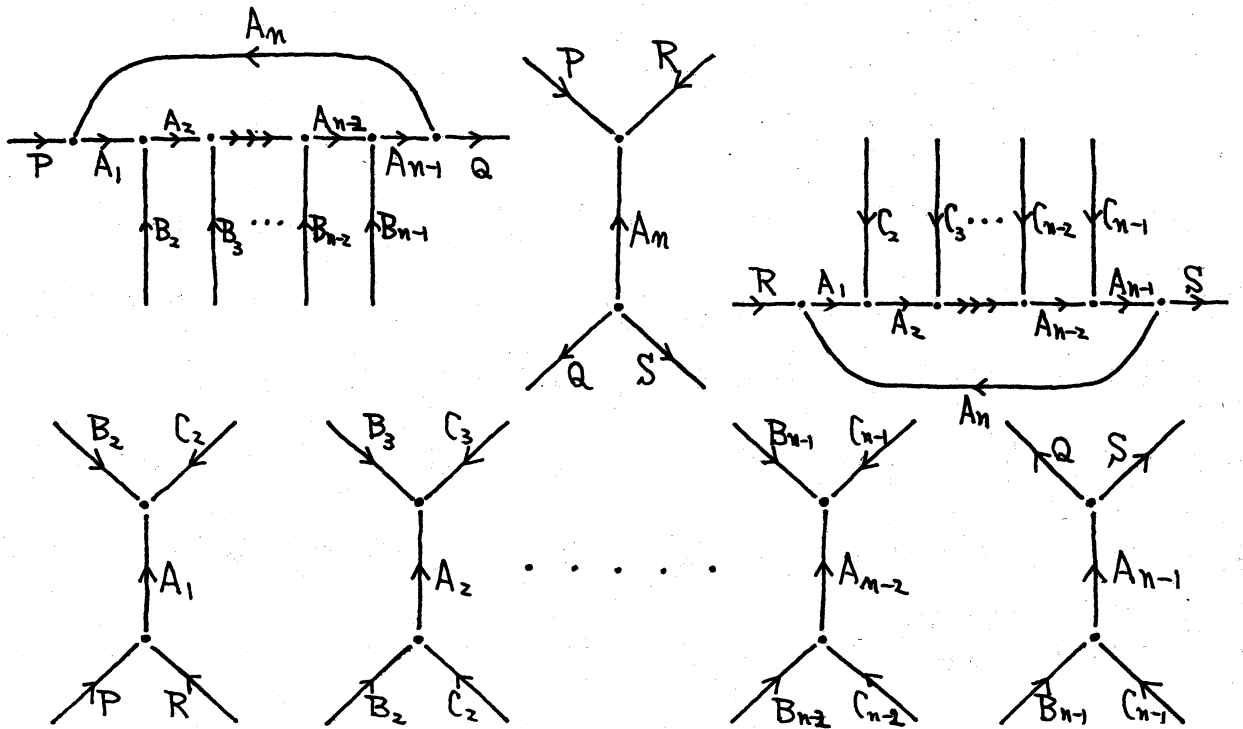
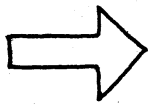
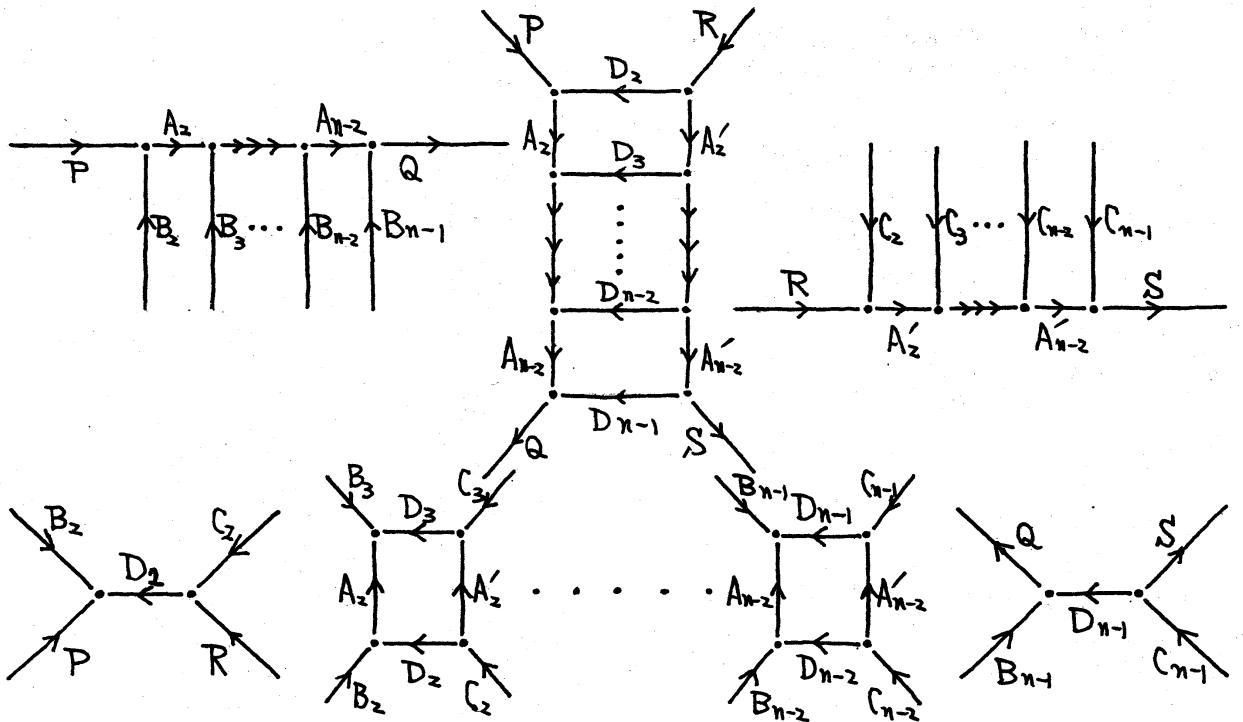


.....



以上のようになる。しかし、実戦的には (DS-diagram をより簡単な DS-diagram に reduce するという思想に基づけば) この変形を逆にたどる方がよい。すなわち、 $n-2$  段のはしご状の図形 (連なる4辺形が  $n-3$  個) を捜して、それに関する local 変形により  $n$  辺形を生じさせ、はしご段を消滅させる変形を  $D_m$ -変形 ( $m \geq 4$ ) と呼ぶことにする。

$D_n$ -变形 ( $n \geq 4$ )



以上の結果をまとめて次の定理を得る。

- 定理 (i)  $D_m$ -変形 ( $m \geq 4$ ) は DS-diagram を保つ  $\theta$ -変形である。
- (ii)  $D_m$ -変形 ( $m \geq 4$ ) によって DS-diagram の頂点数は  $4(m-4)$  個減る。

上の定理から分かるように、実は  $D_4$ -変形は直接には DS-diagram の reduction には貢献しない。ただその流れを変えるだけである。

### 文献

- [1] 京大教理解析研講究録 563 (1985), 207-222.