数理解析研究所講究録
576巻 1985年 154-176

Examples of compact Einstein Kähler manifolds with positive Ricci tensor

阪大理　坂根由昌 (Yusuke Sakane)

0. Introduction

Pを complex dimension Nの compact complex manifold とし，JによりPの complex structure を表す。gをP上の hermitian metric とするとき，$\omega(X,Y)=g(X,JY)$ (X,YはPの tangent vector) によりP上の Kähler form ωが定義されるが，$d\omega=0$のとき，(P,J,g)は Kähler であるという。rにより Kähler metric gの Ricci tensor を表すと，rは hermitian となり Ricci form ρが $\rho(X,Y)=r(X,JY)$により定義される。よく知られているように，第2 Bianchi identity から $d\rho=0$となりρは type $(1,1)$の cohomology class を定義し，Pの first chern class $c_1(P)$は

$$\frac{1}{2\pi}[\rho]=c_1(P)$$

で与えられる。(P,J,g)が Einstein Kähler であると

すると，　$\rho = k\omega \ (k \in \mathbb{R})$ となり

(1)　$k > 0 \rightarrow c_1(P) > 0$

(2)　$k = 0 \rightarrow c_1(P) = 0$

(3)　$k < 0 \rightarrow c_1(P) < 0$

となる．逆に，(P, J, g) を compact Kähler manifold で first chern class $c_1(P)$ が正，零，負であるものとするとき，(P, J) 上に Einstein Kähler metric が存在するかという問題が考えられるが，これはよく知られているように，(3)に対応するとき，すなわち，負のときは，Aubin [1] と Yau [10] により独立に，Einstein Kähler metric の存在と一意性が証明された。また(2)に対応するとき，すなわち，零のときは，いわゆる Calabi 予想が成り立つことをとして，各 Kähler class に vanishing Ricci tensor をもつ Kähler metric が一意的に存在することが Yau [10] により証明された。一方(1)に対応するとき，すなわち，first chern class $c_1(P)$ が正のときは，一般には反例，Einstein Kähler metric の存在しないもの，があり逆は成り立たない。最近 Bando－Mabuchi [2] によって，(holomorphic automorphism を除いて) Einstein Kähler metric の一意性が first chern class が正のときにも証明された．また first chern class が正である compact Einstein Kähler manifoldsのよく知られた例としては，Kähler C-space，すなわち，simply connected compact Kähler homogeneous spaceがある．ここではnon-homogeneous Einstein Kähler manifoldsの例を構成する。

1. Obstruction theorems と反例.

(P, J, g)をcompact Kähler manifoldとするとき，$\mathfrak{g}(P, J)$によりP上のholomorphic vector fields全体のなすLie algebra，$\mathfrak{k}(P, g)$によりP上のKilling vector fields全体のなすLie algebraとすると，$\mathfrak{k}(P, g) \subset \mathfrak{g}(P, J)$とみなせるが，$g$がEinstein Kähler metricのときは，次のMatsushimaの定理がなりたつ。

Theorem M [7] (P, J, g)をEinstein Kähler manifoldとするとき，$\mathfrak{g}(P, J) = \mathfrak{k}(P, g) \oplus J\mathfrak{k}(P, g)$。特に，$\mathfrak{g}(P, J)$はcompact Lie algebra $\mathfrak{k}(P, g)$の複素化となり$\mathfrak{g}(P, J)$はreductive Lie algebraとなる。

松嶋の定理を用いて，Einstein Kähler metricの存在しない例はYau [9]によって構成された。

例1 (Yau) Pを$P^2(\mathbb{C})$の一点をblow upして得られるもの，すなわち，$P^1(\mathbb{C})$上のhyperplane line bundle Hとtrivial line bundle 1の直和$1 \oplus H$より

得られる $P^1(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle とするとき，$\mathfrak{g}(P,J)$ は reductive でないが，first chern class $c_1(P)$ は正である．

Proposition 1. X を Kähler c-space とし，ξ を X 上の non-trivial holomorphic line bundle とする。ξ と trivial line bundle 1 の直和 $1\oplus\xi$ より得られる X 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P(1\oplus\xi)$ を P で表す。このとき，P 上の holomorphic vector fields 全体の Lie algebra $\mathfrak{g}(P,J)$ が reductive である必要十分条件は $H^0(X,\xi) = H^0(X,\xi^{-1}) = (0)$ となることである。さらにこのとき，$\mathfrak{g}(P,J)$ は $Aut_0(X)\times\mathbb{C}^*$ の Lie algebra と一致する。(cf. [5,8])

特別の場合として，H を $P^n(\mathbb{C})$ 上の hyperplane line bundle とするとき，Theorem M と Proposition 1 から次がわかる。

例2. $1\leqslant a\leqslant n$ のとき，$P(1\oplus H^a)$ の first chern class は正となるが，$P(1\oplus H^a)$ 上には Einstein Kähler metric は存在しない．

例3. H_1, H_2 を $P^n(\mathbb{C})$, $P^m(\mathbb{C})$ の hyperplane line bundle からひきおこされた $P^n(\mathbb{C})\times P^m(\mathbb{C})$ 上の holomorphic line bundle とする。整数 a, b に対して $P_{a,b} = P(1\oplus H_1^{-a}\otimes H_2^{b})$ とおくとき，$|a|\leqq n$, $0\leqslant b\leqslant m$ ならば $P_{a,b}$ の first chern class は正となるが，$-m\leqslant a\leqslant 0$, $0\leqslant b\leqslant m$,

$(a,b) \neq (0,0)$ ならば，$P_{a,b}$ 上には Einstein Kähler metric は存在しない．また $1 \leq a \leq n$, $1 \leq b \leq m$ ならば，$\mathfrak{g}(P_{a,b}, J)$ は $sl(n+1, \mathbb{C}) \times sl(m+1, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}$ と同型な Lie algebra となる．

次に Futaki invariant を思い出しておく。(P, J, g) を first chern class $c_1(P)$ が正である compact Kähler manifold とし，$C_1^+(P) = \{ \omega \in c_1(P) \mid \omega$ は positive closed type (1,1) real 2-form$\}$ とおく。$\omega \in C_1^+(P)$ に対する Ricci form を ρ_ω で表すと，P 上の C^∞-function F で $\frac{1}{2\pi}\rho_\omega - \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d'd'' F$ となるものが定数を加えることを除いて一意的に存在する。この F を用いて，写像 $f : \mathfrak{g}(P, J) \longrightarrow \mathbb{C}$ を $f(X) = \int_P XF\omega^N$ $(N = \dim_{\mathbb{C}} P)$ により定義する。このとき次の二木の定理がなりたつ。

Theorem F [4] linear map $f : \mathfrak{g}(P, J) \to \mathbb{C}$ は $\omega \in C_1^+(P)$ のとり方によらない。特に，(P, J, g) が Kähler Einstein metric を許容すれば，$f \equiv 0$ となる。

例 4 (Futaki [4]) $P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P_{1,1}$ において，$P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ 上では恒等変換を引きおこす $\mathbb{C}^*$-action の holomorphic vector field X に対して，$f(X) \neq 0$ となり，$P_{1,1}$ ($P^2(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle) は Einstein Kähler metric を許容しない。この例では，$\mathfrak{g}(P_{1,1}, J)$ は reductive

なLie algebraである。

これらが今までに知られたobstruction theoremsと知られた反例のいくつかである。

2 Main theorem

Mをcompact typeのirreducible hermitian symmetric spaceとすると，M上のholomorphic line bundlesの同型類のなす群$H^1(M, \mathcal{O}^*)$は$\mathbb{Z}$と同型であることが知られている。Lをfirst chern class $c_1(L)$が正となるholomorphic line bundleで群$H^1(M, \mathcal{O}^*)$のgeneratorとなるものとする。このときMのfirst chern class $c_1(M)$は

$$c_1(M) = k\,c_1(L), \quad (k\text{は}\ 2 \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}} M + 1\text{なる整数})$$

をみたす。$X = M_1 \times M_2$，M_1, M_2はcompact typeのirreducible hermitian symmetric space，k_1, k_2をM_1, M_2に対するchern classから定まる正の整数とする。正の整数a, bで$0 < a < k_1$，$0 < b < k_2$となるものに対して，X上のholomorphic line bundle $L_1^{-a} \otimes L_2^{b}$（L_1, L_2はM_1, M_2上のline bundleのgeneratorからひきおこされたX上のline bundleとする）を考え，$P_{a,b} = P(1 \oplus L_1^{-a} \otimes L_2^{b})$とおくと，$P^1(\mathbb{C})$-bundle $P_{a,b}$のfirst chern class $c_1(P_{a,b})$は正で，Lie algebra $\mathfrak{g}(P_{a,b}, J)$

は，$Aut_0(X)\times\mathbb{C}^*$ の Lie algebra と同型になる。

Main theorem [8]　$m=\dim_{\mathbb{C}} M_1$，$n=\dim_{\mathbb{C}} M_2$ とおく。上に定義した $X=M_1\times M_2$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P_{a,b}$ が Einstein Kähler metric を許容するため必要十分条件は，

$$\int_{-1}^{1}(k_1-ax)^m(k_2+bx)^n x\,dx=0$$

である。

Corollary 1.　$M=M_1=M_2$，$a=b$ のとき，$P_{a,a}$ 上には Einstein Kähler metric が存在する。

Corollary 2.　$M_1=P^1(\mathbb{C})$，$M_2\neq P^1(\mathbb{C})$ のとき，$P_{1,b}$ 上には Einstein Kähler metric は存在しない。

(Corollary 2 の証明は，$\int_{-1}^{1}(2-x)(k_2+bx)^n x\,dx\neq 0$ であることを各 compact type の hermitian symmetric space にわけて計算するが，$b\geq 2$ のときこの積分が正となることは容易にわかる。)

さらに，$M_1\neq M_2$ なる場合で Einstein Kähler metric の存在するものの例としては次のようなものがある．
$M_1=G^8_{6,2}(\mathbb{C})$（$\mathbb{C}^6$ の中の 2-planes のなす complex grassmann manifold），$M_2=P^8(\mathbb{C})$ とすると，$k_1=6$，$k_2=9$ となり，$P_{2,3}$ を考えると，積分は $\int_{-1}^{1}(6-2x)^8(9+3x)^8 x\,dx=0$ となり，$G_{6,2}(\mathbb{C})\times P^8(\mathbb{C})$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P_{2,3}=P(L_1^2\oplus L_2^3)$ は，

Einstein Kähler metric を許容する.

次に Main theorem の証明の方針を述べる.

X を Kähler C-space とすると, X は G/U, ここに G は simply connected complex semi-simple Lie group, U は G の parabolic subgroup, と表わされる。$\rho : U \to \mathbb{C}^*$ を U の holomorphic representation とし, ξ_ρ で ρ に associate した X 上の homogeneous line bundle を表す. X 上の各 holomorphic line bundle は homogeneous line bundle であることが知られている。X 上の homogeneous holomorphic line bundle ξ_ρ に対して, X 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P(1 \oplus \xi_\rho)$ を考える. 群 G は自然に $P(1 \oplus \xi_\rho)$ に作用することに注意する。この G の作用に関して次がなりたつ。

Proposition 2. $P = P(1 \oplus \xi_\rho)$ は3つの G-orbit からなる. 1つの orbit は P の open dense subset で, ξ_ρ に associate した X 上の principal $\mathbb{C}^*$-bundle で, 他の2つの orbit は X と同型である。ただし, ρ は non-trivial であるとする.

e を G の単位元とし, $(e, (1,1)) \in G \times \mathbb{C}^2$ に対応する $P(1 \oplus \xi_\rho)$ の点を 0 で表すとき, 0 における G の isotropy subgroup $\hat{U}$ は $\hat{U} = \{ g \in U \mid \rho(g) = 1 \}$ で与えられる. 従って, ρ が non-trivial のとき, $\dim_{\mathbb{C}} \hat{U} = \dim_{\mathbb{C}} U - 1$ である。

G_uをGのmaximal compact subgroupとし，$V = U \cap G_u$とおくと，G/UとG_u/Vとはdiffeomorphicとなり，

$\hat{V} = \{ g \in V \mid \rho(g) = 1 \}$とおくと，$\rho$がnon-trivialのとき，$\dim_{\mathbb{R}} \hat{V} = \dim_{\mathbb{R}} V - 1$となる．

Proposition 3. $\rho : U \to \mathbb{C}^*$をnon-trivialとするとき，principal $\mathbb{C}^*$-bundle $G \times_\rho \mathbb{C}^*$は，$G_u \times S^1$-equivariantに$G_u/\hat{V} \times \mathbb{R}_+$とdiffeomorphicである，ここに，$G_u \times S^1$は$\mathbb{R}_+$にtrivialに作用する。

さて$P = P(1 \oplus \xi_\rho)$上にEinstein Kähler metricが存在すれば，それは$G_u \times S^1$-invariant metricであることに注意して，Pのopen orbit $G \times_\rho \mathbb{C}^*$上の$G_u \times S^1$-invariant Kähler metricの形を考える。$\mathfrak{g}_u, \mathfrak{v}, \hat{\mathfrak{v}}$を$G_u, V, \hat{V}$のLie algebraとし，$\langle\ ,\ \rangle$を$\mathfrak{g}_u$のKilling formから定義される$\mathfrak{g}_u$上の$Ad(G_u)$-invariant inner productとする．$\mathfrak{m}$を$\langle\ ,\ \rangle$に関する$\mathfrak{v}$のorthogonal complementとし，$\mathfrak{c}_\rho$を$\hat{\mathfrak{v}}$の$\mathfrak{v}$における$\langle\ ,\ \rangle$に関するorthogonal complementとし，$\mathfrak{f} = \mathfrak{c}_\rho + \mathfrak{m}$とおくと，

$$\mathfrak{g}_u = \hat{\mathfrak{v}} \oplus \mathfrak{f}, \quad \mathfrak{v} = \hat{\mathfrak{v}} \oplus \mathfrak{c}_\rho, \quad [\mathfrak{v}, \mathfrak{c}_\rho] = (0)$$

$[\mathfrak{v}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$となる．また$G \times \mathbb{C}^*$のLie subgroup $G_u \times \mathbb{R}_+$は$G \times_\rho \mathbb{C}^* \cong G_u/\hat{V} \times \mathbb{R}_+$にtransitiveに作用する。$\mathbb{R}_+$のLie algebraのa basisを$\{H\}$とし，$o \in G \times_\rho \mathbb{C}^*$にお

ける tangent space $T_o(P)$ と $\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\widehat{H}$ とを同一視する.

$\mathfrak{g}_u\oplus\mathbb{R}\widehat{H}=\widehat{\mathfrak{v}}\oplus\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\widehat{H}$, $Ad(\widehat{V})(\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\widehat{H})\subset\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\widehat{H}$ となることに注意する. $G\times_\rho\mathbb{C}^*$ (あるいは P) 上の complex structure J は $G\times\mathbb{C}^*$ の action で invariant であるから linear isomorphism $I:\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\widehat{H}\longrightarrow\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\widehat{H}$ で, $I^2=-id$, $I\circ Ad(g)=Ad(g)\cdot I$ $(g\in\widehat{V})$ なるものをひきおこす. さらに, I は, $I\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}=\mathbb{R}\widehat{H}$ をみたし, $X=G/U=G_u/V$ 上の invariant complex structure とも compatible であるから

$I\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$ をみたす.

X が compact type の irreducible hermitian symmetric space M_1, M_2 の積 $M_1\times M_2$ のときには, $\mathfrak{g}_u=(\mathfrak{g}_1)_u\oplus(\mathfrak{g}_2)_u$ $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ は simple Lie algebra, $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{m}_i\subset(\mathfrak{g}_i)_u$ $(i=1,2)$ となり, さらに $[\widehat{\mathfrak{v}},\mathfrak{m}_i]=\mathfrak{m}_i$ $(i=1,2)$,

$I\mathfrak{m}_i=\mathfrak{m}_i$ $(i=1,2)$, $\mathfrak{m}_i$ $(i=1,2)$ は $\widehat{\mathfrak{v}}$-module として irreducible である. これより, $\mathfrak{k}\oplus\mathbb{R}\widehat{H}$ 上の $Ad(\widehat{V})$-invariant hermitian inner product B は一意的に

$$B=d\left(\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}}+\langle I\circ, I\circ\rangle|_{\mathbb{R}\widehat{H}}\right)+c_1\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{m}_1}+c_2\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{m}_2}$$

と表わされる. ここに d, c_1, c_2 は正の実数, $\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}}$, $\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{m}_1}$, $\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{m}_2}$ は, inner product $\langle\ ,\ \rangle$ から $\mathfrak{c}_{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ 上にそれぞれひきおこされた inner product, $\langle I\circ, I\circ\rangle|_{\mathbb{R}\widehat{H}}$ は $\langle IX, IY\rangle$ $(X, Y\in\mathbb{R}\widehat{H})$ により定義される $\mathbb{R}\widehat{H}$ 上の内積を

表す。$\beta_0, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2$ を、それぞれ、$G_u/\hat{V} \times \mathbb{R}_+$ 上の $G_u \times \mathbb{R}_+$-invariant symmetric tensor で、$\langle\ ,\ \rangle|_{\mathfrak{c}_g}$, $\langle I\cdot, I\cdot\rangle|_{\mathbb{R}\hat{H}}$, $\langle\ ,\ \rangle|_{m_1}$, $\langle\ ,\ \rangle|_{m_2}$ ($Ad(\hat{V})$-invariant symmetric bilinear form on $\mathfrak{g}\oplus\mathbb{R}\hat{H}$ とみて) に対応するものとする。さらに $\beta_0, \beta_1, \alpha_1, \alpha_2$ は right S^1-action で invariant である。このことから、次の proposition が証明できる。

Proposition 3. $G \times_\rho \mathbb{C}^*$ 上の $G_u \times S^1$-invariant hermitian metric g は

(2.1) $g = F^2(\beta_0+\beta_1) + H_1^2\alpha_1 + H_2^2\alpha_2$

と表される。ここに F, H_1, H_2 は $G_u \times S^1$-invariant positive valued C^∞ function on $G\times_\rho \mathbb{C}^*$ である。

$X \in \mathfrak{c}_g$ に対して、$\{\exp tX \mid t\in\mathbb{R}\} \approx S^1$ の right action によってひきおこされる $G_u/\hat{V}\times\mathbb{R}_+$ 上の vector field を X^* で表し、$H = -\dfrac{JX^*}{g(X^*, X^*)^{1/2}}$ とおく。$G\times_\rho\mathbb{C}^*$ 上の $G_u\times S^1$-invariant hermitian metric g で (2.1) の形のものが Kähler metric になる条件を考える。

Proposition 4. (2.1) の形の metric g が Kähler であるための必要十分条件は $\forall A, B \in m$, $0 \neq \forall X \in \mathfrak{c}_g$ に対して

$$-\frac{F}{\langle X, X\rangle^{1/2}}\langle X, [A, IB]\rangle + d(H_1^2)(H)\langle A,B\rangle|_{m_1} + d(H_2^2)(H)\langle A,B\rangle|_{m_2} = 0$$

がなりたつことである。

さらに $G_u \times S^1$-invariant hermitian metric g on $G \times_\rho \mathbb{C}^*$ が Kähler であるとき，g の Riemannian connection ∇ について，vector field H は $\nabla_H H = 0$ をみたすことがわかる。Compact Lie group $G_u \times S^1$ が $P = P(1 \oplus \xi_\rho)$ 上に holomorphic transformation group として作用するから P 上には $G_u \times S^1$-invariant Kähler metric g_0 が存在する．$\bar{o}$ を $G_u/\tilde{V}$ の原点とするとき，点 $c(t_0) = (\bar{o}, 1) \in G_u/\tilde{V} \times R_+$ を通る arc length で parametrize された (P, g_0) の geodesic $c(t)$ で $\dot{c}(t_0) = H_{c(t_0)}$ をみたすものを考える．$\nabla_H H = 0$ より，$c(t)$ は $(\bar{o}, 1)$ を通る H の integral curve で，L_0 を $P = P(1 \oplus \xi_\rho)$ の $G_u \times S^1$ の 2 つの singular orbit の $c(t)$ の長さとするとき，次がなりたつ．

Theorem 4.

(1) g_0 を $P = P(1 \oplus \xi_\rho)$ 上の $G_u \times S^1$-invariant Kähler metric とすると，g_0 は open orbit $G \times_\rho \mathbb{C}^*$ 上で，

$$g_0 = dt^2 + f_0^2(t)\hat{\beta}_0 + h_1^0(t)^2\alpha_1 + h_2^0(t)^2\alpha_2$$

と表わされる．ここに $\hat{\beta}_0$ は ρ の weight Λ に対して，$\Lambda(X_0) = \sqrt{-1}$ で定まる $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}$ の元 X_0 を用いて，$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{\langle X_0, X_0 \rangle}\beta_0$ により定義される tensor（すなわち，$P^1(\mathbb{C})$ の S^1-action が right S^1-action $\{\exp tX_0 \mid t \in R\}$ に対応するようにしたもの），f_0, h_1^0, h_2^0 は $[0, L_0]$ で定義された C^∞ function で

次の条件をみたすもの：

$$(2.2)\begin{cases} f_0,\ h_j^0 \text{ は } (0, L_0) \text{ 上で正の値をとり,} \\ f_0 \text{ は } 0, L_0 \text{ で奇関数で, } f_0'(0) = -f_0'(L_0) = 1 \text{ を} \\ \text{みたし, } h_j^0 \text{ は } 0, L_0 \text{ で偶関数で, } h_j^0(0) > 0 \\ h_j^0(L_0) > 0 \text{ となる.} \end{cases}$$

(2) 逆に $f(s)$, $h_j(s)$ $(j=1,2)$ が $[0, L]$ で定義された C^∞ function で，条件 (2.2) の性質をみたすものとすると，metric $g = ds^2 + f(s)^2\beta_0 + h_1(s)^2\alpha_1 + h_2(s)^2\alpha_2$ は open orbit $G \times_P \mathbb{C}^*$ 上で定義され；g は $P(1 \oplus \xi_P)$ 上の C^∞ metric に拡張される.

(2) において，g が $G \times_P \mathbb{C}^*$ 上で Kähler であれば，拡張されたmetric も $P(1 \oplus \xi_P)$ で Kähler となることに注意する.

次に open orbit $G \times_P \mathbb{C}^* = G_u/\hat{V} \times (0, L)$ 上の metric $g = ds^2 + f(s)^2\beta_0 + h_1(s)^2\alpha_1 + h_2(s)^2\alpha_2$ の Ricci tensor を計算するために，Bérard Bergery[3] に従って Riemannian submersion になっていることを利用する. metric g の形から $G_u/\hat{V} \times (0, L) \longrightarrow (0, L)$ は Riemannian submersion となり，O'Neill の formula を用いることにより，r を g の Ricci tensor，$\hat{r}$ を g_t の Ricci tensor と

するとき，次の propositionをえる．

Proposition 5. $X_0 \in \mathfrak{l}_\mathfrak{p}$ を以前のように，$\Lambda(X_0)=\sqrt{-1}$ で定義されるものとし，$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ の orthonormal basis $\{B_1, \cdots, B_{2m}, C_1, \cdots, C_{2n}\}$ ($B_i \in \mathfrak{m}_1$, $C_i \in \mathfrak{m}_2$ $m=\dim_{\mathbb{C}} M_1$, $n=\dim_{\mathbb{C}} M_2$) を系こる．$\{H, \frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_1}B_1, \cdots, \frac{1}{h_1}B_{2m}, \frac{1}{h_2}C_1, \cdots, \frac{1}{h_2}C_{2n}\}$ は g の orthonormal basis であるが，これに対して次がなりたつ．

$$
\begin{cases}
\Omega(H,H) = -\left(\frac{f''}{f}+2m\frac{h_1''}{h_1}+2n\frac{h_2''}{h_2}\right) \\
\Omega(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{f}X_0) = \hat{\Omega}(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{f}X_0) - \frac{f'}{f}\left(2m\frac{h_1'}{h_1}+2n\frac{h_2'}{h_2}\right) - \frac{f''}{f} \\
\Omega(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_i) = \hat{\Omega}(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_i) - \frac{f'h_1'}{fh_1} - \frac{h_1''}{h_1} - (2m-1)\left(\frac{h_1'}{h_1}\right)^2 - 2n\frac{h_1'h_2'}{h_1h_2} \\
\Omega(\frac{1}{h_2}C_i, \frac{1}{h_2}C_i) = \hat{\Omega}(\frac{1}{h_2}C_i, \frac{1}{h_2}C_i) - \frac{f'h_2'}{fh_2} - \frac{h_2''}{h_2} - (2n-1)\left(\frac{h_2'}{h_2}\right)^2 - 2m\frac{h_1'h_2'}{h_1h_2} \\
\Omega(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_1}B_i) = \Omega(\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_2}B_i) = \Omega(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_1}B_j) = \Omega(\frac{1}{h_2}C_i, \frac{1}{h_2}C_j) = 0 \\
\text{for } i \neq j \\
\Omega(\frac{1}{h_1}B_i, \frac{1}{h_2}C_j) = 0 \quad (\forall i, j)
\end{cases}
$$
．

さらに，$\xi_p = L_1^{-a} \otimes L_2^{b}$ ($0<a<k_1$, $0<b<k_2$) のとき，metric $g = ds^2 + f(s)^2\hat{\rho}_0 + h_1(s)^2\alpha_1 + h_2(s)^2\alpha_2$ が Kähler であるための必要十分条件は

$$
\begin{cases}
\frac{a}{2k_1}f + 2h_1h_1' = 0 \\
\frac{-b}{2k_2}f + 2h_2h_2' = 0
\end{cases}
$$

で与えられることが，Proposition 4を用いることによってわかる。またRicci tensor $\hat{r}$ は次のPropositionのようになる。

Proposition 6. g の orthonormal basis
$\{\frac{1}{f}X_0, \frac{1}{h_1}B_1, \cdots, \frac{1}{h_1}B_m, \frac{1}{h_1}IB_1, \cdots, \frac{1}{h_1}IB_m, \frac{1}{h_2}C_1, \cdots, \frac{1}{h_2}C_n,$
$\frac{1}{h_2}IC_1, \cdots, \frac{1}{h_2}IC_n\}$ に対して，

$$\hat{r}\left(\tfrac{1}{f}X_0, \tfrac{1}{f}X_0\right) = 2m\left(\frac{a}{2k_1}\right)^2\frac{f^2}{4h_1^4} + 2n\left(\frac{b}{2k_2}\right)^2\frac{f^2}{4h_2^4}$$

$$\hat{r}\left(\tfrac{1}{h_1}B_i, \tfrac{1}{h_1}B_i\right) = \hat{r}\left(\tfrac{1}{h_1}IB_i, \tfrac{1}{h_1}IB_i\right) = \frac{1}{2h_1^2} - \left(\frac{a}{2k_1}\right)^2\frac{f^2}{2h_1^4}$$

$$\hat{r}\left(\tfrac{1}{h_2}C_j, \tfrac{1}{h_2}C_j\right) = \hat{r}\left(\tfrac{1}{h_2}IC_j, \tfrac{1}{h_2}IC_j\right) = \frac{1}{2h_2^2} - \left(\frac{b}{2k_2}\right)^2\frac{f^2}{2h_2^4}$$

$(i=1, \cdots, m,\ j=1, \cdots, n)$

となる。

以上により，次の定理を得る.

Theorem 7. X を2つの irreducible hermitian symmetric space of compact type M_1, M_2 の直積 $M_1 \times M_2$ とし，X 上の projective bundle $P(1 \oplus L_1^{-a} \otimes L_2^{b})$ を考える. $G_u \times S^1$-invariant metric $g = ds^2 + f(s)^2\beta_0 + h_1(s)^2\alpha_1 + h_2(s)^2\alpha_2$ on the open orbit が Einstein Kähler であるための必要十分条件は f, h_1, h_2 が次の ordinary differential equation をみたすことである.

$$
(2.3)\quad
\begin{cases}
\dfrac{a}{2K_1}f + 2h_1h_1' = 0 \\[2mm]
-\dfrac{b}{2K_2}f + 2h_2h_2' = 0 \\[2mm]
-\left(\dfrac{f''}{f} + 2m\dfrac{h_1''}{h_1} + 2n\dfrac{h_2''}{h_2}\right) = \lambda \\[2mm]
-\dfrac{f''}{f} - \dfrac{f'}{f}\left(2m\dfrac{h_1'}{h_1} + 2n\dfrac{h_2'}{h_2}\right) + 2m\left(\dfrac{a}{2K_1}\right)^2\dfrac{f^2}{4h_1^4} + 2n\left(\dfrac{b}{2K_2}\right)^2\dfrac{f^2}{4h_2^4} = \lambda \\[2mm]
-\dfrac{h_1''}{h_1} - \dfrac{f'h_1'}{fh_1} - (2m-1)\left(\dfrac{h_1'}{h_1}\right)^2 - 2n\dfrac{h_1'h_2'}{h_1h_2} + \dfrac{1}{2h_1^2} - \left(\dfrac{a}{2K_1}\right)^2\dfrac{f^2}{2h_1^4} = \lambda \\[2mm]
-\dfrac{h_2''}{h_2} - \dfrac{f'h_2'}{fh_2} - (2n-1)\left(\dfrac{h_2'}{h_2}\right)^2 - 2m\dfrac{h_1'h_2'}{h_1h_2} + \dfrac{1}{2h_2^2} - \left(\dfrac{b}{2K_2}\right)^2\dfrac{f^2}{2h_2^4} = \lambda
\end{cases}
$$

ここに λ は正の定数.

Ordinary differential equations (2.3) は次の differential equation と同値であることがわかる.

$$
(2.4)\quad
\begin{cases}
\dfrac{a}{2K_1}f + 2h_1h_1' = 0, \quad -\dfrac{b}{2K_2}f + 2h_2h_2' = 0 \\[2mm]
h_2' = \sqrt{y(h_2)}, \quad 2\lambda(aK_2h_2^2 + bK_1h_1^2) = aK_2 + bK_1 \\[2mm]
\dfrac{dy}{dh_2} + 2\left(\dfrac{n+1}{h_2} - m\dfrac{aK_2}{bK_1}\dfrac{h_2}{h_1^2}\right)y = \dfrac{1}{2h_2} - \lambda h_2
\end{cases}
$$

この最後の一階の線型常微分方程式の解は

$$
y = \frac{1}{2h_2^{2(n+1)}(bK_1h_1^2)^m}\left\{\int h_2^{2n+1}(bK_1h_1^2)^m(1-2\lambda h_2^2)\,dh_2 + C\right\}
$$

ここに，C は定数で，h_1^2 は $aK_2h_2^2 + bK_2h_1^2 = \frac{1}{2\lambda}(aK_2 + bK_1)$ を

みたすものとする）で与えられる。

さて $P(1 \oplus L_1^{-a} \oplus L_2^{b})$ 上に Einstein Kähler metric g が存在すると仮定すると，Matsushima の定理により，g は $G_u \times S^1$-invariant metric と考えてよく，g は Theorem 7 の形としてよい．また $h_2'(0)=0$ より $y(h_2(0))=0$ で，$y(h_2)$ は次で与えられる：

$$y(h_2)=\frac{1}{2h_2^{2(m+1)}(bK_1h_1^2)^m}\int_{h_2(0)}^{h_2} h_2^{2m+1}(bK_1h_1^2)^2(1-2\lambda h_2^2)\,dh_2$$

さらに，$y(h_2(L))=0$ より

$$y(h_2(L))=\frac{1}{2h_2^{2(m+1)}(L)\,(bK_1h_1^2(L))^m}\int_{h_2(0)}^{h_2(L)} h_2^{2m+1}(bK_1h_1^2)^2(1-2\lambda h_2^2)\,dh_2$$

$=0$。 また $f'(0)=-f'(L)=1$ なども用いて，

$$h_2(L)=\sqrt{(1+b/K_2)/2\lambda}\ ,\quad h_2(0)=\sqrt{(1-b/K_2)/2\lambda}\,.$$

がわかり，$y(h_2(L))=0$ は次の積分が 0 となることと同値であることがわかる．

$$\int_{-1}^{1}(K_2+bx)^m(K_1-ax)^m x\,dx=0\,.$$

逆に

$$\int_{\sqrt{(1-b/K_2)/2\lambda}}^{\sqrt{(1+b/K_2)/2\lambda}} h_2^{2m+1}(bK_1h_1^2)^2(1-2\lambda h_2^2)\,dh_2=0$$

とすると $\overset{\text{ま}}{え}$，$h^0=\sqrt{(1-b/K_2)2\lambda}$，$h^1=\sqrt{(1+b/K_2)/2\lambda}$ と

おく．$[h^0, h^1]$の近傍上で $y(h_2)$を

$$y(h_2)=\frac{1}{2h_2^{2(n+1)}(bk_2h_1^2)^m}\int_{h^0}^{h_2} h_2^{2n+1}(bk_2h_1^2)^m(1-2\lambda h_2^2)\,dh$$

により定義すると，$y(h^0)=y(h^1)=0$で，$h^0<h_2<h^1$ に対して $y(h_2)>0$ となる．また $\frac{dy}{dh_2}(h^0)>0$，$\frac{dy}{dh_2}(h^1)>0$．(h^0, h^1)上の関数 $\hat{t}(h_2)$を

$$\hat{t}(h_2)=\int_{\sqrt{1/2\lambda}}^{h_2}\frac{1}{\sqrt{y(h_2)}}\,dh_2$$ により定義する．

$\hat{t}_0=\lim_{h_2\to h^0+}\hat{t}(h_2)$，$\hat{t}_1=\lim_{h_2\to h^1-}\hat{t}(h_2)$ は存在する．

$[h^0, h^1]$上の関数 $t(h_2)$を

$$t(h_2)=\hat{t}(h_2)-\hat{t}_0,\quad t(h^0)=0,\quad t(h^1)=\hat{t}_1-\hat{t}_0=L$$

で定義すると，$t(h_2):[h^0, h^1]\to[0, L]$ monotone increasing continuous function で，(h^0, h^1)上で C^∞ となる．$h_2(t)$を $t(h_2)$の逆関数とすると，$(0, L)$上で $\frac{dh_2}{dt}=\sqrt{y(h_2)}$ となる．$h_2(t)$は $[0, L]$上の正の値をとる C^∞ function で，$0, L$で偶関数となるものに拡張されることがわかる．fを $f=\frac{4k_2}{b}h_2h_2'$ で定義し，$h_1>0$を $2\lambda(ak_2h_2^2+bk_1h_1^2)=ak_2+bk_1$ をみたすように定義すると，f, h_1, h_2は (2.4) をみたし，条件(2.2) もみたす．従って，Einstein Kähler metric が

存在する.

3. Futaki invariant と Main theorem の積分の条件との関係, その後の発展

Futaki invariant と Main theorem の積分の条件との関係は, Koiso-Sakane [6] で調べられ, Main theorem は次のように拡張される.

Theorem I. X を compact Einstein Kähler manifold で, g_0 を X 上の Kähler metric でその Ricci tensor r_0 が $r_0 = g_0$ をみたすものとする。ξ を X 上の holomorphic line bundle で, ξ の fiber metric に関する metric connection の curvature tensor B の g_0 に関する固有値が, X 上で constant でかつ, これらの固有値の絶対値が 1 より小さいような fiber metric が存在するものとする. このとき, X 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P = P(1 \oplus \xi)$ に Einstein Kähler metric が存在するための必要十分条件は, Futaki invariant $f : \mathfrak{h}(P, J) \to \mathbb{C}$ が 0 となることである. さらに, Futaki invariant が 0 となることは,

$$\int_{-1}^{1} x \det(1 - x g_0^{-1} B)\, dx = 0$$

と同値である.

Theorem I の適用できる例をあげよう。

例 5. M を compact Einstein Kähler manifold で M 上の line bundle L で、$c_1(L) = a\, c_1(M)$ $(0<a<1)$ となるものが存在すると仮定する. $X = M \times M$ とおき, $\xi = L_1 \otimes L_2^{-1}$ を $L \to M$, $L^{-1} \to M$ からひきおこされた X 上の holomorphic line bundle とする. このとき, M 上の Kähler metric g でその Ricci tensor r が $r = g$ をみたすものをとると, X 上の product metric $g_0 = g \oplus g$ に関して, Theorem I の仮定がみたされ, $P(1 \oplus \xi)$ 上に Einstein Kähler metric が存在することが, 被積分関数 $x \det(id - x g_0^{-1} B)$ が奇関数となり, 積分が 0 となることよりわかる.

例 6. $M = P^n(\mathbb{C})$ とし, H を M 上の hyperplane section line bundle とし $L = H^m$ とおくと, $X = M \times M$ 上の $P^1(\mathbb{C})$-bundle $P(L \oplus L)$ は Einstein Kähler metric を許容し, isometry group の action に関して cohomogeneity は 1 である. $P = P(L \oplus L)$ の first chern class $c_1(P)$ は

$$c_1(P) = (n+1-m)\pi^*(c_1(H) \oplus c_1(H)) + 2\, c_1(\zeta)$$

(ここに $\pi : P \to X$ は projection, ζ は P の各 fiber $P^1(\mathbb{C})$ 上

の hyperplane line bundle からひきおこされる P 上の line bundle とする.) で与えられる. 従って $n+1-m$ が偶数ならば, P 上の holomorphic line bundle η で, $c_1(\eta)=\frac{1}{2}c_1(P)$ なるものが存在する. P の k 個の copy を考え, $Y=P\times\cdots\times P$ (k個),

$\xi_0=\xi\otimes\cdots\otimes\xi$ (k個) とおき, k が奇数のとき

$X=Y\times P^{(2n+1)k}(\mathbb{C})$, $\xi=\xi_0^{-1}\otimes H^{\frac{(2n+1)k+1}{2}}$ とし

k が偶数のとき. $X=Y\times Q^{(2n+1)k}(\mathbb{C})$ ($Q^l(\mathbb{C})$ の l 次元の complex hyperquadric), $\xi=\xi_0^{-1}\otimes L_0^{\frac{(2n+1)k}{2}}$ (ここに, L_0 は $Q^{(2n+1)k}(\mathbb{C})$ の holomorphic line bundle の群の generator で $c_1(L_0)$ が正となるもの, $c_1(Q^l(\mathbb{C}))=l\,c_1(L_0)$ となることに注意) とおくと, Theorem I の条件を X,ξ はみたし, 被積分関数は $x\det(id-xg_0^{-1}B)$ $=x(1-\frac{1}{2}x)^{2(n+1)k}(1+\frac{1}{2}x)^{2(n+1)k}$ で与えられ, これは奇関数であるから, 積分は 0 となり, $P(1\oplus\xi)$ は Einstein Kähler metric を許容し, cohomogeneity は, $k+1$ となる. すなわち, 与えられた cohomogeneity をもつ'既約'な Einstein Kähler manifold が存在する.

例7. 最後に $P^1(\mathbb{C})$-bundle の base space X が既約で, Einstein Kähler metric が $P^1(\mathbb{C})$-bundle P に

存在するものの例をあげておく. $X = SL(3,\mathbb{C})/B$, ここにBはBorel subgroupとする. $H^1(X, \mathcal{O}^*)$をholomorphic line bundleのisomorphism classのなす群とすると,
$H^1(X, \mathcal{O}^*) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$となる. H_1, H_2をholomorphic line bundle over Xでgeneratorとなるもので,
$c_1(H_1) > 0$, $c_1(H_2) > 0$, $c_1(X) = 2(c_1(H_1) + c_1(H_2))$
となるものとする. $\xi = H_1^{-1} \otimes H_2$とおくと, X, ξはTheorem Iの条件をみたし, この場合のBのg_0に関する固有値は$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$となる. 従って積分は0となり, $P(1 \oplus \xi)$ (X上の$P^1(\mathbb{C})$-bundle) はEinstein Kähler metricを許容する.

References

[1] T. Aubin : Equation du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes, Bull. Sc. Math. 102 (1978) 63-95.

[2] S. Bando - T. Mabuchi : to appear.

[3] L. Bérard Bergery : Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein, Preprint 1981.

[4] A. Futaki : An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, Invent. Math. 73 (1983), 437-443.

[5] K. Ishikawa and Y. Sakane: On complex projective bundles over a Kähler C-space, Osaka J. Math. 16 (1979) 121–132.

[6] N. Koiso and Y. Sakane: Non-homogeneous Kähler-Einstein metrics on compact complex manifolds, to appear.

[7] Y. Matsushima: Sur la structure du groupe d'homeomorphismes analytique d'une certaine variété kählerienne, Nagoya Math. J., 11 (1957) 145–150.

[8] Y. Sakane: Examples of compact Einstein Kähler manifolds with positive Ricci tensor, to appear.

[9] S.T. Yau: On the curvature of compact Hermitian manifolds, Invent. Math. 25 (1974), 213–239.

[10] S.T. Yau: On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 339–411.