数理解析研究所講究録
576巻 1985年 65-74

球面内の非等質極小等径超曲面の第一固有値

東京工業大学
武藤 秀夫
Muto Hideo

1. 序

$M^{n-1} \subset S^n(1)$ を、埋め込まれた閉じた極小超曲面とする。高橋の定理 [13] に関連して、次の問題を考える。

<u>問題</u>（荻上 [10]） 上の M の Laplacian の第一固有値 λ_1 が、$\lambda_1 = \dim M$ となる M は、どのようなものか？

ここでは、極小等径超曲面 M^{n-1}、即ち、M 上の単位法ベクトル場 ν に関して、主曲率が定数となるものについて考える。g を異なる主曲率の数，$\{\cot\theta_\alpha\}_{\alpha=0}^{g-1}$（$0<\theta_0<\cdots<\theta_{g-1}<\pi$）を主曲率，$m_\alpha$ を重複度とすると、Münzner [5]，[6] により、$g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$，$\theta_\alpha = \theta_0 + \frac{\alpha}{g}\pi$，$m_{\alpha+2} = m_\alpha$（indices mod g）が示されている。Cartan により、$g \leq 3$ ならば、等質であることが示され、又、尾関-竹内 [11]，Ferus-Karcher-Münzner [2] により、$g=4$ のとき、非等質なものが、無限個存在することが示された。

等質 等径な極小超曲面については、Hsiang-Lawson [3]，高木-高橋 [12]，尾関-竹内 [11] による分類から、武藤-大仁田-浦川 [8]、小谷 [4] は、$g \neq 4$ の場合について、

$\lambda_1 = \dim M$ を示した。

そこで、ここでは、$g=4$ の時の主に、非等質な場合について考える。

compact 多様体 N の Laplacian の固有値を、$\{0<\lambda_1(N) \leqq \lambda_2(N) \leqq \cdots \leqq \lambda_k(N) \leqq \cdots\}$ とすると、次を得る。

定理A. M^{n-1} を $S^n(1)$ 内の閉じた等径超曲面で、$\min\{m_0, m_1\} \geqq 2$ をみたすものとする。この時、

$$\lambda_k(M^{n-1}) \geqq G\,\lambda_k(S^n(1)), \quad \forall k \geqq 1.$$

ここで、$l = g/2$,

$$G = \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m_0}x \cos^{m_1}x\,dx}{\displaystyle \sin^2\theta_0 \int_0^{l\theta_0} \frac{\sin^{m_0}x}{\sin^2\frac{x}{l}} \cos^{m_1}x\,dx + \sin^2\!\left(\frac{\pi}{2l}-\theta_0\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}-l\theta_0} \frac{\sin^{m_1}x}{\sin^2\frac{x}{l}}\cos^{m_0}x\,dx}$$

定理B. M^{n-1} を $S^n(1)$ 内の閉じた超小等径超曲面で、次のどれかをみたすとする。(ただし、$k \geqq 1$)

- $g=3$: $(m_0, m_1) = (4,4), (8,8)$
- $g=4$: $(m_0, m_1) = (3,4)^*, (3,8), \ldots, (3,4k), \ldots$
  $(4,5)^*$,
  $(4,3)^*, (4,7)^*, \ldots, (4,4k-1)^*, \cdots$
  $(6,9)^*$
  $(7,8), (7,16), \ldots, (7,8k), \ldots$

この時、Mは、第一固有関数で埋め込まれている。即ち、

$$\lambda_1(M^{n-1}) = n-1 \quad .$$

注意1. $g=4$の上の場合、それぞれに対して、非等質なものが存在する。(Ferus-Karcher-Münzner [2])。

注意2. $(3,4k)$, $(7,8k)$は、尾関-竹内[11]による例に対応する。$*$は、等質、非等質、共に存在。

2. 球面内の等径超曲面

ここでは、Münzner [5], [6]の結果について述べる。

$f : M^{n-1} \longrightarrow S^n(1)$ $(\subset \mathbb{R}^{n+1})$を球面内の等径超曲面とする。

$f_\theta : M \longrightarrow S^n(1)$ $(-\pi < \theta < \pi)$を $\forall p \in M$に対して、

$$f_\theta(p) = \exp_{f(p)} \theta\nu \quad .$$
$$/\!/ \ \sin\theta \cdot \nu + \cos\theta \cdot f(p)$$

と定義する。ここで、$x /\!/ y$は、xとyが$\mathbb{R}^{n+1}$のベクトルとして平行なことを意味する。

<u>定理1</u> (Münzner [5], [6]) M^{n-1}を$S^n(1)$内の閉じた等径超曲面とする。この時、次の(1)-(5)が成立する。

(1) $\theta_\alpha = \theta_0 + \dfrac{\alpha\pi}{g}$ $(\alpha = 0, \cdots, g-1)$

(2) $m_\alpha = m_{\alpha+2}$ (indices mod 2)

(3) $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $2g = \dim_{\mathbb{R}} H^*(M : \mathbb{R})$

(4) $M_+ = f_{\theta_0}(M)$ (resp. $M_- = f_{-\pi+\theta_{g-1}}(M) = f_{-\frac{\pi}{g}+\theta_0}(M)$) とおく。この時、$M_+$ (resp. M_-) は、$(n-m_0-1)$-dim. (resp. $(n-m_1-1)$-dim.) の smooth embedded closed submanifold になる。又、$\tilde{M}_+ = \bigcup_{\theta\in[0,\theta_0]} f_\theta(M)$ (resp. $\tilde{M}_- = \bigcup_{\theta\in[\theta_0-\frac{\pi}{g},0]} f_\theta(M)$) とおくと、$\tilde{M}_+$ (resp. $\tilde{M}_-$) は、M_+ (resp. M_-) 上の normal disk bundle になり、$\tilde{M}_+ \cup \tilde{M}_- = S^n(1)$。

(5) $f_\theta(M)$ $\quad(\theta\in(-\frac{\pi}{g}+\theta_0, \theta_0))$ は、M に diffeo. な等径超曲面である。

後述のために、2つの式を用意しておく。

$E^\alpha = \{$第2基本形式の固有値 $\cot\theta_\alpha$ の固有 vector$\}$ とすると、

(2.1) $$f_{\theta *}X = \frac{\sin(\theta_\alpha-\theta)}{\sin\theta_\alpha}\tilde{X}, \quad \forall X\in E^\alpha$$

h を M^{n-1} の ν に関する mean curvature とすると、

(2.2)
$$(n-1)h = \begin{cases} m_0 g\cot g\theta_0 & (m_0=m_1) \\ \dfrac{m_0 g}{2}\cot\dfrac{g\theta_0}{2} - \dfrac{m_1 g}{2}\tan\dfrac{g\theta_0}{2} & (m_0\neq m_1) \end{cases}$$

3. Volume elements and eigenvalues

$M_\theta = f_\theta(M)$, $(\theta\in(-\frac{\pi}{g}+\theta_0, \theta_0))$ とおく。$S^n(1)$ から induce される M_θ 上の Riemannian metric を g_θ, 体積要素を dM_θ と記

す。

<u>Lemma 1.</u> M^{n-1}を$S^n(1)$内の閉じた等径超曲面で $g \geq 2$ をみたすとする。$l = g/2$ とおくと，$\forall \theta \in (-\frac{\pi}{g}+\theta_0, \theta_0)$に対して，

$$f_\theta^* dM_\theta = F(\theta)\, dM_0$$

ここで，

$$F(\theta) = \frac{\sin^{m_0} l(\theta_0-\theta)\ \cos^{m_1} l(\theta_0-\theta)}{\sin^{m_0} l\theta_0\ \cos^{m_1} l\theta_0}$$

証明は，(2.1)を用いるだけである。

<u>Remark 1.</u> M上の領域Dに対して，f_θによって作られる，$S^n(1)$上の領域を$\tilde{D}$とすると，$vol(D)/vol(M) = vol(\tilde{D})/vol(S^n(1))$なので，M上のCheegerの等周的定数を，$S^n(1)$上の等周的定数で下から評価できる。

<u>Remark 2.</u> 又，Lemma 1.を用いると，Mがtightであることが，Th.1(3)から導びける。

<u>定理Aの証明</u> $\forall \varepsilon > 0$：十分小に対して，

$$M(\varepsilon) = \bigcup_{\theta \in [-\frac{\pi}{g}+\theta_0+\varepsilon,\ \theta_0-\varepsilon]} f_\theta(M)$$

とおくと，Th.1.より，$M(\varepsilon)$は，$S^n(1)$から，M_+, M_-のε-近傍を除いて得られる，$S^n(1)$内の領域になる。したがって，$M(\varepsilon)$上の，Dirichlet条件下でのLaplacianの固有値を$\{0 < \lambda_1^D(M(\varepsilon)) < \lambda_2^D(M(\varepsilon)) \leq \cdots \leq \lambda_k^D(M(\varepsilon)) \leq \cdots\}$とすると，min-max原理か

ら. $\lambda^D_{k+1}(M(\varepsilon)) \geq \lambda_k\ (S^n(1))\quad (k=0,1,\cdots)$。Lemma 1 より.
$M(\varepsilon)$ の vol. element $dM(\varepsilon)$ は.

$$dM(\varepsilon) = \frac{\sin^{m_0} l(\theta_0-\theta)\cos^{m_1} l(\theta_0-\theta)}{\sin^{m_0} l\theta_0 \cos^{m_1} l\theta_0}\, d\theta\, dM$$

f_k を $\lambda_k(M)$ に対応する eigenfct. on M とし. $L_k = \mathrm{span}\{f_0,\cdots,f_k\}$ とする。

Ψ : a smooth function on $[0,\infty)$, ≥ 0, non-decreasing

$\Psi \equiv 1$ on $[2,\infty)$, $\Psi \equiv 0$ on $[0,1]$

とする。十分小なる $\eta > 0$ に対して.

Ψ_η : a smooth function on $[\eta, \frac{\pi}{2}-\eta]$ で次をみたすとする.

(1) $\Psi_\eta(\eta) = \Psi_\eta(\frac{\pi}{2}-\eta)$ (2) $x=\frac{\pi}{4}$ で対称

(3) $\Psi_\eta(x) = \Psi(\frac{x}{\eta})$ on $[\eta, \frac{\pi}{4}]$

この時. $\forall \varphi \in L_k$ に対して.

$$\Phi_\varepsilon(x,\theta) = \Psi_{l\varepsilon}(l(\theta_0-\theta))\varphi(x)\ ,\quad \forall x \in M,\ \forall \theta \in (-\tfrac{\pi}{8}+\theta_0+\varepsilon, \theta_0-\varepsilon)$$

と定義すると. Th 1. より. $M(\varepsilon)$ 上の Dirichet 条件をみたす fct. になる。したがって. (2.1) から.

$$\frac{\|d\Phi_\varepsilon\|_2^2}{\|\Phi_\varepsilon\|_2^2} \leq l^2\, \frac{\int_{l\varepsilon}^{\pi/2-l\varepsilon} \Psi_{l\varepsilon}'(x)^2 \sin^{m_0}x \cos^{m_1}x\,dx}{\int_{l\varepsilon}^{\pi/2-l\varepsilon} \Psi_{l\varepsilon}(x)^2 \sin^{m_0}x \cos^{m_1}x\,dx}$$

$$+\frac{1}{\displaystyle\int_{l\varepsilon}^{\pi/2-l\varepsilon}\psi_{l\varepsilon}(x)^2\sin^{m_0}x\cos^{m_1}x\,dx}\times\frac{\|d\varphi\|_2^2}{\|\varphi\|_2^2}$$

$$\times\left\{\sin^2\theta_0\int_{l\varepsilon}^{l\theta_0}\psi_{l\varepsilon}^2(x)\frac{\sin^{m_0}x}{\sin^2\frac{x}{l}}\cos^{m_1}x\,dx\right.$$

$$\left.+\sin^2\left(\frac{\pi}{2l}-\theta_0\right)\int_{l\theta_0}^{\pi/2-l\varepsilon}\psi_{l\varepsilon}^2(x)\sin^{m_0}x\frac{\sin^{m_1}x}{\sin^2\frac{1}{l}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx\right\}.$$

ここで. $\min(m_0, m_1)\geqq 2$ より. (右辺の第一項) $\to 0$ (as $\varepsilon\to 0$).

よって. min-max 原理より.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda_{k+1}(M(\varepsilon))\leqq\lim_{\varepsilon\to 0}(\text{上式の右辺})$$ //

4. 定理B

定理Bの証明の概略

定理Bは. 定理Aを用いて示す. (2.2)により $l\theta_0=\cot^{-1}\sqrt{\frac{m_1}{m_0}}$ となるMが. minimalであるから. これをGに代入することにより. $\lambda_{n+2}(M)>n-1\ (=\dim M)$ を示す。$S^{n-1}(1)$ 以外の等径超曲面は. fullに埋め込まれるから. M^{n-1} 上の $\mathbb{R}^{n+1}$ でのcoord. functionsは. 一次独立である。ここで. 高橋の定理より. これら $(n+1)$ コのM上の関数は. Laplacianの固有値 $n-1$ の固有関数となるから. $\lambda_{n+2}>n-1$ が示されることにより. $\lambda_1(M)=\cdots=\lambda_{n+1}(M)=n-1$ となる。

さて、(2.2) と Th.A を用いて、$\lambda_{n+2} > n-1$ を示す。
$l\theta_0 = \cot^{-1}\sqrt{\frac{m_1}{m_0}}$ とする。たとえば、$(m_0, m_1) = (4, m)$ に対して考えるとき、まず、$m \geqq 34$ に対して、$G > \frac{1}{2}$ を示す。ここで、$\lambda_{n+2}(S^n(1)) = 2(n+1)$ だから、$\lambda_{n+2} > n-1$ が Th.A から示される。
又、同じく、$m \leqq 33$ に対しては、G の値を十分小さな error term のもとで、計算機により求めることができ、これにより、$G \times \lambda_{n+2}(S^n(1)) > n-1$ を示す。ここでのプログラムは、FORTRAN による double exponential formula を用いた subroutine を用いた。(see Mori [7]). //

References

[1] E. Cartan, Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques, Math. Z., 45 (1939), 335-367.

[2] D. Ferus, H. Karcher, and H.F. Münzner, Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen, Math. Z., 177 (1981), 479-502

[3] W. Y. Hsiang and H. B. Lawson Jr., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, J. Diff. Geom., 5 (1971), 1-36.

[4] M. Kotani, The first eigenvalue of homogeneous minimal hypersurfaces in a unit sphere $S^{n+1}(1)$, preprint.

[5] H. F. Münzner, Isoparametrische Hyperflächen in Sphären, Math. Ann., 256 (1981), 57-71.

[6] H. F. Münzner, Isoparametrische Hyperflächen in Sphären, II, Math. Ann., 256 (1981), 215-232.

[7] M. Mori, "曲線と曲面", 教育出版 (1984).

[8] H. Muto, Y. Ohnita, and H. Urakawa, Homogeneous minimal hypersurfaces in the unit sphere and the first eigenvalue of the Laplacian, Tôhoku Math. J., 36 (1984), 253-267.

[9] H. Muto, The first eigenvalue of the Laplacian of an isoparametric minimal hypersurface in a unit sphere, preprint.

[10] K. Ogiue, Open Problems, Geometry of the Laplace Operator, ed. T. Ochiai, 1980/81.

[11] H. Ozeki and M. Takeuchi, On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres, I, Tôhoku Math. J., 27 (1975), 515-559

[12] R. Takagi and T. Takahashi, On the principal curvatures of homogeneous hypersurfaces in a unit sphere, Differential Geometry, Kinokuniya, Tokyo, 1972, 469-481.

[13] T. Takahashi, Minimal immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 380-385.