数理解析研究所講究録
577巻 1985年 164-194

D. Gabai による，knot complement 上の foliation の構成

阪大 理　小林 毅

§1.

1984年の暮，結び目理論の懸案であった Property R 予想及び Poenaru 予想が D. Gabai により肯定的に解決された。その際，本質的な役割を果たしたのが次の knot complement 上の foliation の存在定理である：

定理（Gabai）　K を S^3 内の非自明な結び目，S を K の minimal genus Seifert 膜とする。この時，K の complement $S^3-\mathring{N}(K)$ 上の taut, finite depth foliation $\mathcal{F}$ で次のようなものが存在する：

- S は $\mathcal{F}$ の leaf.
- $\mathcal{F}$ は $\partial N(K)$ に transverse に交わる．また $\mathcal{F}|_{\partial N(K)}$ は，foliation by circles.

本稿では，上の定理の証明の概略を述べる事にする。尚，Gabai 自身の論文［G2］も存在するので詳しくは，そちらを参照されたい。

§1. 準備.

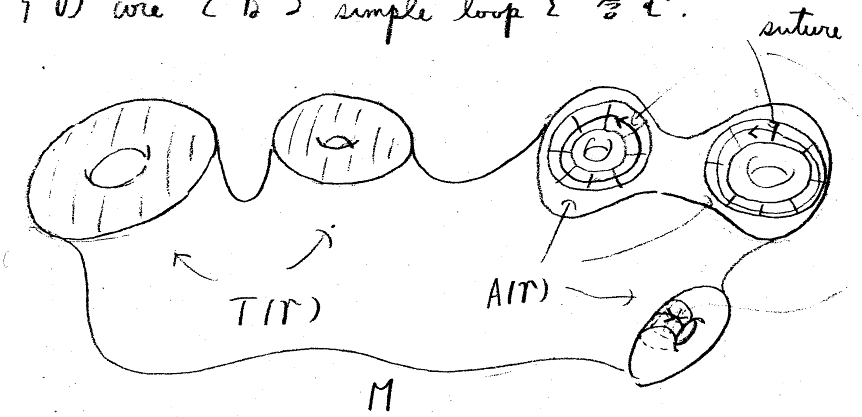
この節では, [G1] の結果のうち後で必要となるものを紹介しておく。用語等については Hempel [H], Gabai [G1] を参照されたい。

以下, M を compact, oriented 3-manifold とする。

定義. 組 (M, γ) が <u>sutured manifold</u> とは,

(1) γ : a set of pairwise disjoint annuli $A(\gamma)$, and tori $T(\gamma)$

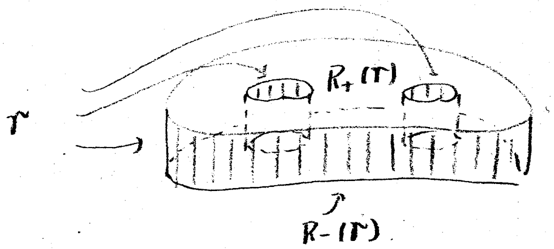
(2) $A(\gamma)$ の各成分は, <u>suture</u> と呼ばれる, 向きのついた, γ の core となる simple loop を含む.



(3) $R(\gamma) = \partial M - \mathring{\gamma}$ の各成分には, 向きが入っている。特にそれらのうちで normal vector が外向き (内向き resp.) のもの全体の和を $R_+(\gamma)$ ($R_-(\gamma)$ resp.) と書く.

例. (product sutured mfd.). S を compact surface で $\partial S \neq \phi$ なるものとする。この時, $M = S \times [0,1]$, $\gamma = \partial S \times [0,1]$,

$R_+(\gamma) = S\times\{1\}$, $R_-(\gamma) = S\times\{0\}$ とすれば sutured mfd. (M,γ) を得る。



定義．$\mathcal{F}$: a codimension 1 foliation of M. L: a leaf of $\mathcal{F}$ とする。
この時．L及び$\mathcal{F}$の <u>depth</u> を次のように定める。

L: depth 0 $\Leftrightarrow$ L: compact

depth $j\ (\leq k)$ leaf が定まったとする。 この時

L: depth $k+1$ $\Leftrightarrow$ $\bar{L}-L$: a union of depth $j\ (\leq k)$ leaves, $\bar{L}-L$ は, depth k leaf を含む。

また，$\mathcal{F}$: depth k $\Leftrightarrow$ $k = \max\{\text{depth } L \mid L: \text{a leaf of } \mathcal{F}\}$.

注意． leaf 及び foliation の depth は．一般に定義出来るとは，限らない。

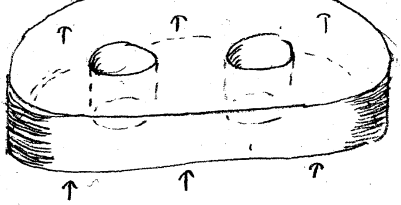
定義．(M,γ): a sutured mfd. とする． この時:
(M,γ): <u>taut</u> とは，・M: irreducible，及び・$R(\gamma)$: norm minimizing in $H_2(M,\gamma)$ なる事．
($H_2(M,\gamma)$ の norm については，Gabai [G1], or Thurston [T] 参照)

定義．$\mathcal{F}$: a transversely oriented codim. 1 fol. of a sutured mfd. (M,γ). とする。 この時，$\mathcal{F}$が <u>taut</u> とは，次を満たす事とする。

1) $\mathcal{F}$は，γに対して横断的，

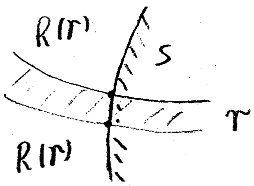
2) $\mathcal{F}$は，$R(\gamma)$に tangent． $\mathcal{F}$の normal direction $R_+(\gamma)$ ($R_-(\gamma)$ resp.) で外向き（内向き resp.）．

例．Product sutured mfd. 上の product foliation は，taut



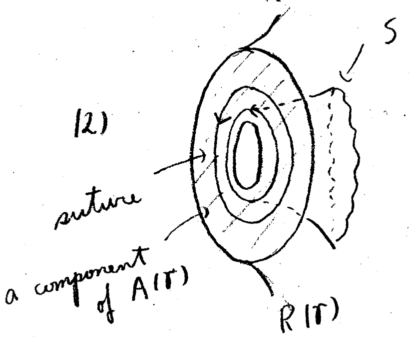
以下 sutured mfd. decomposition 及び sutured mfd. hierarchy を定義する． まず，(M,γ)を a sutured mfd. Sを a properly embedded oriented surface in M で $S\cap\gamma$の各 component は，次のいずれかであるようなものとする．

(1)



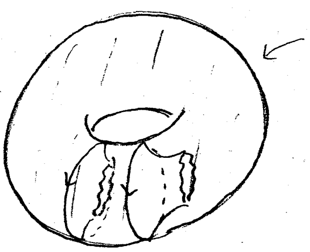
: an essential arc in $A(\gamma)$，

(2)



suture と向きまで込めて parallel な simple loop.（但し ∂Sの各成分には Sの向きから induce された向きが入っているとする）

(3)



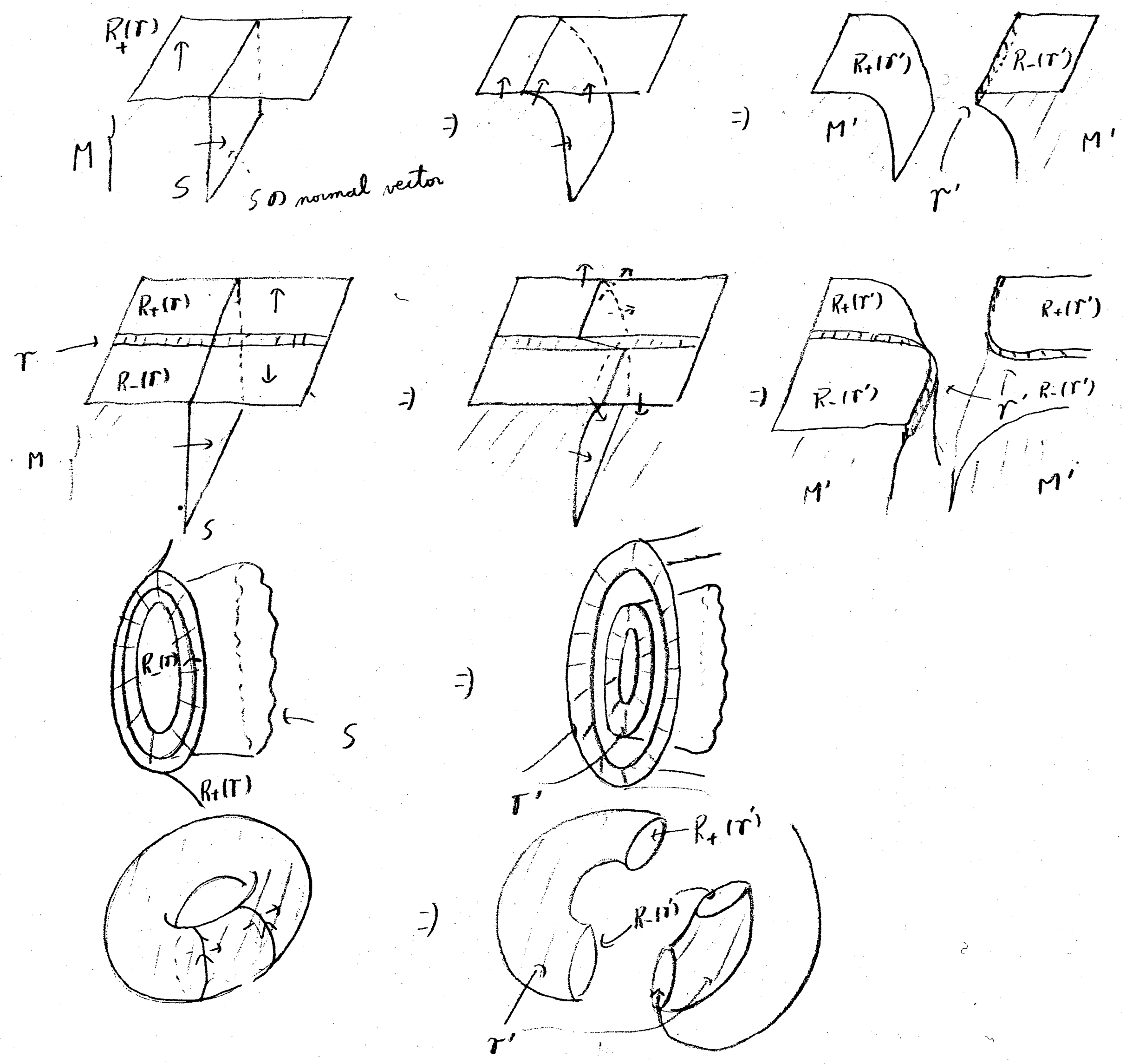
T: a component of $T(\gamma)$

$T\cap S$は 向きまで込めて parallel な essential loops 又は an essential loop

この時. sutured mfd. decomposition $(M,\gamma) \overset{S}{\rightsquigarrow} (M',\gamma')$ を次で定める。

・$M' = M - \mathring{N}(S)$

・γ'は, 次のように定める.



定義. sutured mfd. (M,γ) が <u>decomposable</u> とは, sutured mfd. decomposition の sequence:

S

$$(M,\gamma) \overset{S_1}{\rightsquigarrow} (M_1,\gamma_1) \overset{S_2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{S_m}{\rightsquigarrow} (M_m,\gamma_m)$$

で (M_m, γ_m) が a product sutured mfd. となるようなものが存在する事とする。 またこの sequence のことを <u>a sutured mfd. hierarchy</u> と呼ぶ。

sutured mfd. hierarchy の存在に関しては，次の結果がある。

定理（[G1]） (M,γ) を connected taut sutured mfd. とする。 また M が rational homology sphere の時は，essential torus を含むとする。 この時 (M,γ) の sutured mfd. hierarchy $(M,\gamma) \overset{S_1}{\rightsquigarrow} (M_1,\gamma_1) \overset{S_2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{S_m}{\rightsquigarrow} (M_m,\gamma_m)$ で "V: a component of $R(\gamma_i)$ とすると $S_{i+1} \cap V$ は，向きまで込めて parallel な $k (\geq 0)$ 本の non-separating simple closed curves, or arcs." となるものが存在する。

以下 §1. で述べた定理の証明の概略を述べる事にする． 尚，各定義，Lemma の後についている番号は，全て Gabai の論文に合わせたもので所々に欠番がある事を予めお断りしておく。

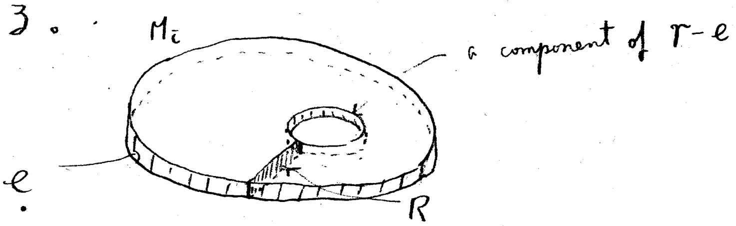
§3.

以下 M を knot K の exterior $S^3 - \mathring{N}(K)$ とする。

定義 3.2. $(M, \partial M) \overset{S_1}{\rightsquigarrow} (M_1, \gamma_1) \overset{S_2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{S_m}{\rightsquigarrow} (M_m, \gamma_m)$: a sutured mfd. hierarchy とする。 この時 <u>boundary suture</u> $E_i \subset \partial M_i$ を次のように定める。

$$\begin{cases} E_0 = \partial M \\ E_i : \text{the union of those components of } E_i - \mathring{N}(S_i) \text{ which are annuli and tori} \end{cases}$$

いま e : a component of boundary suture とする。 この時，e が <u>boundary parallel</u> とは，次のような rectangle R が存在する事とする。



Notation 3.3. (M, γ) : a sutured mfd.

E : a distinguished set of annular component of γ とする。 この時 sutured mfd. $(\hat{M}, \hat{\gamma})$ を次のように定める。

$\hat{M}$: mfd. obtained by attaching 2-handles to M along each comp. of E

$\hat{\gamma} = \gamma - E$

次の Lemma の証明は，[G1] の中で定義された sutured mfd. complexity を用いた議論を要するのでここでは，省略する。

Lemma 3.6. $(M, \partial M)$ に対して sutured mfd. decomposition の sequence

$(M,\partial M)=(M_0,\gamma_0)\overset{S_1}{\rightsquigarrow}(M_1,\gamma_1)\overset{S_2}{\rightsquigarrow}\cdots\overset{S_m}{\rightsquigarrow}(M_m,\gamma_m)$

で次のようなものが存在する。

1) S_i : connected, $[S_i]\neq 0\in H_2(M_{i-1},\partial M_{i-1})$,

2) V : a component of $R(\gamma_{i-1})$ とすると $S_i\cap V$ は，向きまで込めて parallel な non separating simple closed curves, or arcs.

3) $E_{i-1}\cap S_i$: a union of simple closed curves,

4) $\partial\hat{M}_m$: a union of 2-spheres.

(↳ distinguished suture として E_m をとる.)

Remark: 結果的には. 上の decomp. は（少し変形して）sutured mfd. hierarchy になる事が示される.

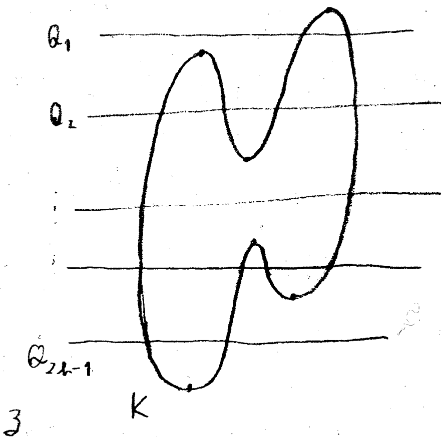
§4.

K : a knot in S^3 とする。

Convention 4.1. S^3 内の2点 x, y を fix する. この時 $S^3-\{x,y\}$ は，$S^2\times\underline{\mathbb{R}}$ と同相. また S^2 内の1点 z を fix すると $(S^2-\{z\})\times\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ いま この第2成分への射影 h を考え これを height function とする. また Q_α ($\alpha\in\mathbb{R}$) を（この height での）level α-sphere (or plane) を表す。また level planes による $S^3-\{x,y\}$ or $(S^2-\{z\})\times\mathbb{R}$ の foliation を $\mathcal{H}$ と表わす.

定義 4.2. $f:S^1\to S^3$: a presentation of K (i.e. f は embedding, Image$(f)=K$) で $h\circ f$ が Morse function であるものとする。いま $h\circ f$ の critical point は，$2n$個 あるとし，それらは，

全て異なる level にあるとする。$Q_1, \cdots, Q_{2k-1}$ を各 critical point の間にある level planes とする。



この時、K の width, $w(K)$ を次で定める。

$$w(K) = \min\left\{\frac{1}{2}\sum_i |Q_i \cap f(S^1)|\right\}$$

また、f が $w(K)$ を実現している時、f は、thin presentation であると言う。

定義 4.4. M' を n-mfd. とする　M' 上の p-dim. lamination $\mathcal{L}$ とは、M' 内の closed subset N の分割 $N = \bigcup_\alpha L_\alpha$ (L_α: connected) で次の条件をみたすもの。

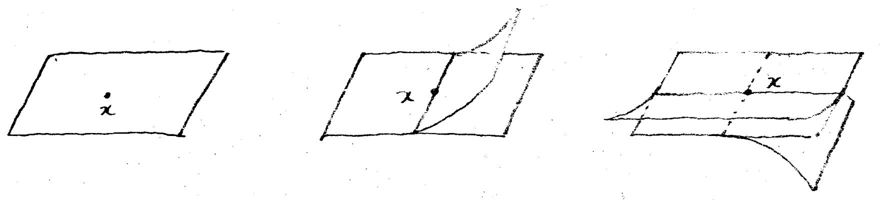
$\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$

$^\forall x \in M'$, $^\exists (U, \varphi)$: local coordinate of x s.t. 各 L_α に対して $U \cap L_\alpha$ の各 component は、$\{y \in U : \varphi_1(y) = \text{const}, \cdots, \varphi_{n-p}(y) = \text{const}\}$ の形.

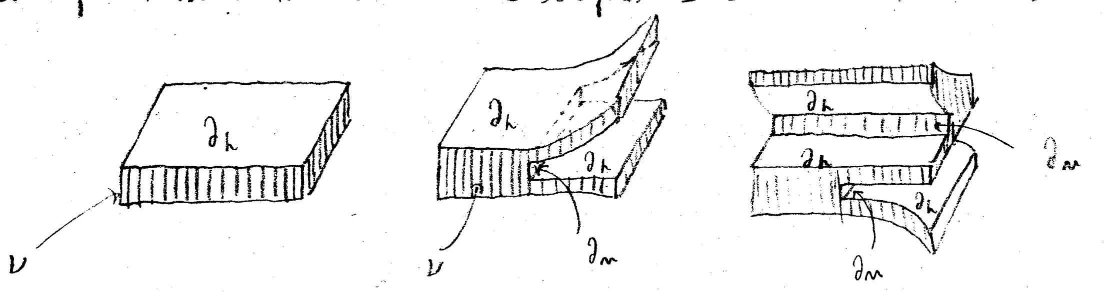
(各 L_α に対して)

また上の $U \cap L_\alpha$ の各 component を basis とする topology が入るが これを L_α の leaf topology と呼ぶ。

定義 4.7. 3-mfd. M 内の branched surface (with generic branched locus) B とは、各点 $x \in B$ が次のような local model をもつ M の subspace



また B は，次のように表わす事も出来る． M 内の 3-dim. submfd. $N(B)$ で次のように各 leaf が $I=[0,1]$ であるような foliation



ν をもつものを考える。 この時，ν の各 leaf を1点につぶす操作を $\sim$ で表わすと $M/\sim \cong M$，この $M/\sim$ 内での $N(B)$ の image が B である。 又，$\partial N(B)$ は ν と transverse な部分と tangent な部分に分れるので，それらを $\partial_h N(B)$, $\partial_v N(B)$ と表わす事にする。 この $N(B)$ を B の fibered nbhd. と呼ぶ。

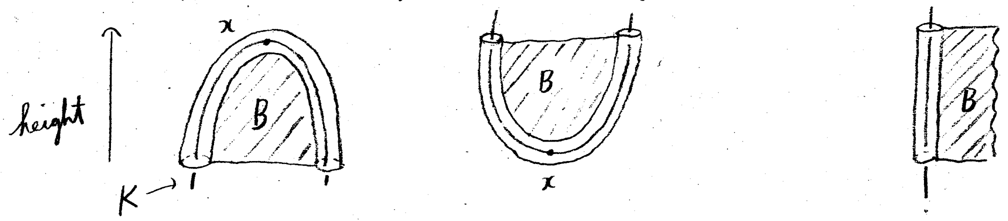
また，M 内の lamination $\mathcal{L}$ が B によって carry されるとは，B の fibered nbhd. $N(B)$ で，"$\mathcal{L} \subset N(B)$" かつ "$\mathcal{L}$ は ν に transverse" なるものが存在する事とする。 $\mathcal{L}$ が B によって fully carried とは "$\mathcal{L}$ が B によって carry され" かつ "ν の各 leaf は $\mathcal{L}$ と交わる" 事とする。

定義4.8. $M=S^3-\mathring{N}(K)$ 内の branched surface B が normal form にあるとは，次の条件 1)〜6) の条件をみたす事とする。

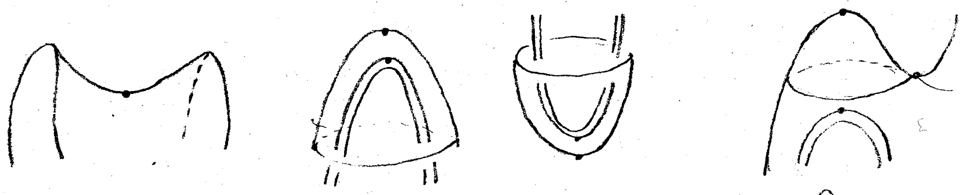
1) K は，thin presentation.

2) B は $N(K)$ の近くで次の状況：

・$x \in K$ が local max. or min. の時　　・それ以外の時

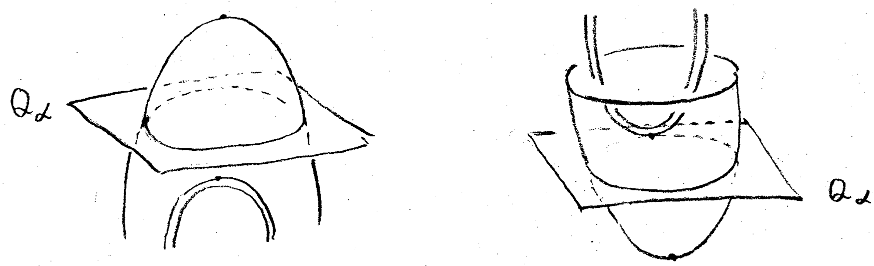


3) B は, isolated な 'saddle' 又は 'knot K の local max, or min. を含む center' を除いて $\mathcal{H}$ に transverse



これは normal form でない

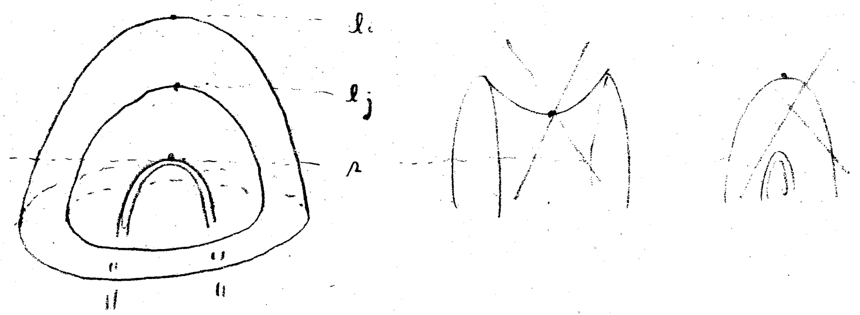
4) horizontal plane Q_α で "$Q_\alpha \cap B$ の a component C で $Q - B$ の disk component を bound する" 様なものが存在したとするとこれは 3) の center の状況の一部。即ち Q_α を上げ (or 下げ) てゆくと center にぶつかり, Q_α を下げ (or 上げ) てゆくと knot の local max. (or min.) にぶつかる。



5) $z_1, \cdots, z_r$: points of tangency of B with $\mathcal{H}$ とする。

また z_i の height を l_i とする。この時 $l_1, \cdots, l_r$ は, K の local max, or min. とは異なる, 互いに相異なる level で生じる。

また Σ_i を height s の K の local max. (or min.) を含む center とする。 この時 "$s < {}^{\exists}l_j < l_i$ (or $l_i < {}^{\exists}l_j < s$) $\Rightarrow$ Σ_j は l_i と同じ K の local max. (or min.) を含む center.



6) height fun.$\big|_{\text{branched locus of } B}$ は、Morse function で、その critical point は、K の critical points と異なる discrete level で生じる。

定義 4.9. $M = S^3 - \mathring{N}(K)$ 内の lamination $\mathcal{L}$ が normal form にあるとは、次の条件 1)~5) をみたす事とする

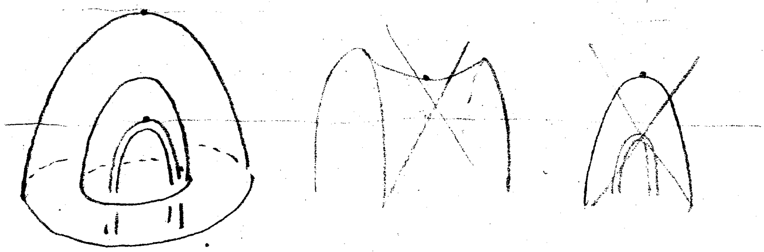
1) K は、thin presentation,

2) $\mathcal{L}$ の $N(K)$ の近くで 4.8 2) と同じ状況

3) L を a leaf of $\mathcal{L}$ とする。 L は (leaf topology で) isolated な 'saddle' 又は、'K の local max. or min. を含む center' を除いて $\mathcal{H}$ に transverse

4) horizontal plane Q_α で "$Q_\alpha \cap \mathcal{L}$ の a comp. C で $Q - \mathcal{L}$ の disk component を bound する" 様なものが存在したとすると、これは 3) の状況の一部.

5) (4.8 5) に対応する条件)



次の Proposition は，定義 4.8，4.9 より直ちに従う.

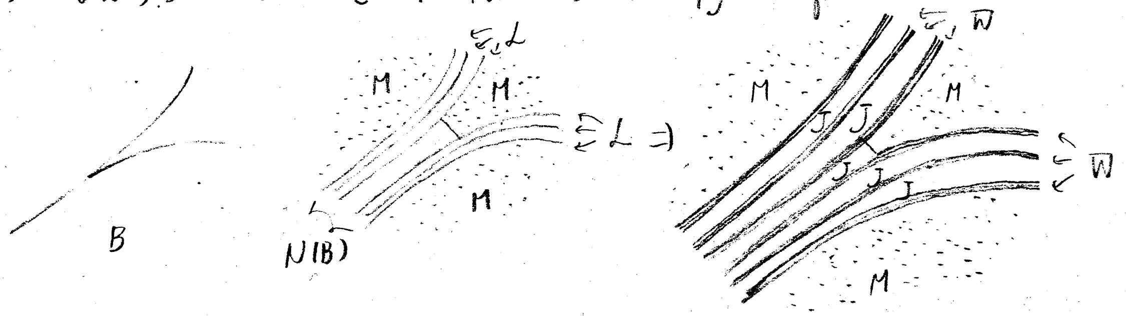
Proposition 4.10. いま，'lamination $\mathcal{L} \subset M$ は，normal form にある branched surface B によって carry される' とする。この時 $\mathcal{L}$ は，normal form にある lamination に isotopic.

定義 4.13. B を oriented 3-mfd. P 内の transversely oriented branched surface とする。この時 $S(B)=(M,\gamma)$: sutured mfd. defined by B を次で定める。

- $M = P - \mathring{N}(B)$
- $\gamma = \partial_v N(B)$
- $R(\gamma)=\partial_h N(B)$，$R_+(\gamma)$，$R_-(\gamma)$ は，B の orientation から自然に定まる。

$N(B)$ は，I による fibration ν をもつ事と B に carry される lamination の定義及び定義 4.13 より次の Proposition は，容易に証明出来る。

Proposition 4.14. B : a branched surface in P, $\mathcal{L}$: a (finite depth) lamination fully carried by B. $\overline{W}$: a lamination obtained by thickening $\mathcal{L}$ とする。
この時 $S(B)$ は $\overline{W}$ の complement に natural に埋め込める（特に $R(\gamma)\subset\partial\overline{W}$）。 また $J=P-(\overline{W}\cup M)$ は $\nu|_J$ を fibration とする



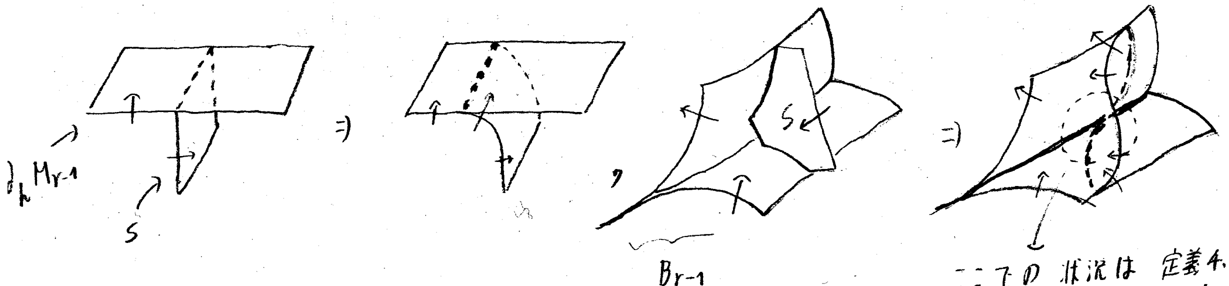
4.15. sutured mfd. decomp. seq. からの branched surface の構成

$(N,\partial N)=(M_0,\gamma_0)\overset{S_1}{\rightsquigarrow}(M_1,\gamma_1)\overset{S_2}{\rightsquigarrow}\cdots\overset{S_m}{\rightsquigarrow}(M_m,\gamma_m)$: a seq. of sutured mfd. decomp. とする。 この時，N に proper に埋め込まれた branched surface (with generic branched locus) B_i で $S(B_i)=(M_i,\gamma_i)$ となるような ($i=1,\dots,m$) ものを次のように帰納的に構成する

・$B_1=S_1$

・$B_1,\dots,B_{r-1}$ s.t. $S(B_i)=(M_i,\gamma_i)$ が定まったとする。

$S(B_{r-1})=(M_{r-1},\gamma_{r-1})$ より S_r は $N-\mathring{N}(B_{r-1})$ に proper に埋め込まれた surface. 従って B_r を次のように決めればよい。

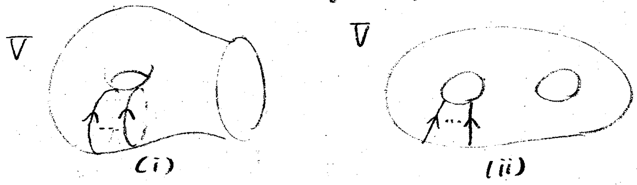


ここでの状況は 定義4.7
10p. の一番右の絵になっている。

4.16 Constructing finite depth lamination from sutured mfd. decomp.

$(N,\partial N) = (M_0,\gamma_0) \overset{S_1}{\rightsquigarrow} (M_1,\gamma_1) \overset{S_2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{S_n}{\rightsquigarrow} (M_n,\gamma_n)$: a seq. of sutured mfd. decomp.

Suppose : ∇ : a comp. of $R(\gamma_i)$ とすると $\nabla \cap S_i$ は，向きまで込めて parallel to non-separating simple closed curves, or arcs.

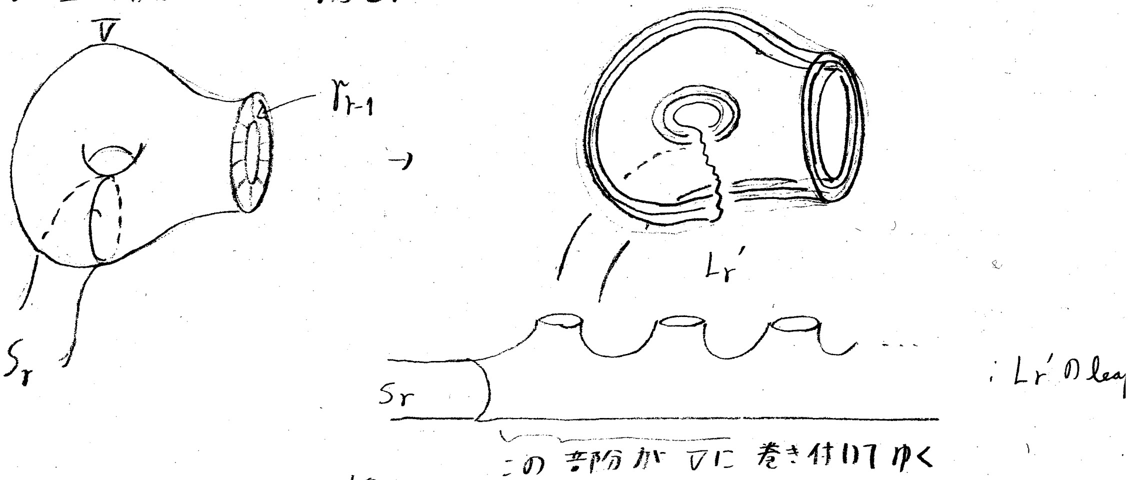


この時， L_i : finite depth lamination fully carried by B_i $(i=1,\dots,n)$ を次のように帰納的に構成する。

・$L_1 = S_1$

・$L_1,\dots,L_{r-1}$ が構成されたとする。 この時 L_r を次のように構成する。まず 4.15 で得られる branched surface B_{r-1} から定まる N の分解 $M_{r-1} \cup W_{r-1} \cup J_{r-1}$ を考える。この時 $L_{r-1} \subset J_{r-1}$. 今 $S_r \subset M_{r-1}$ と考えて S_r の boundary を $R(M_{r-1})$ の component (で S_r と交わるもの) に (向きを考えながら) 巻き付けてゆく事により (M_{r-1}の) lamination L_r' で γ_{r-1} と横断的であるようなものを得る。

例えば 上の絵の (i) の場合.



J_rの部分は，(non-compact な) product sutured mfd. ($\because$ 4.14) だから，L_r' は容易に N の lamination L_r に拡張される。また構成より明らかに L_r は finite depth で fully carried by B_r.

Lemma 4.20. K : a knot in a thin presentation $M = S^3 - \mathring{N}(K)$

$(M, \partial M) = (M_0, \gamma_0) \overset{S_1}{\rightsquigarrow} (M_1, \gamma_1) \overset{S_2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{S_m}{\rightsquigarrow} (M_m, \gamma_m)$: a seq. of sutured mfd. decomp.

s.t.
- (M_i, γ_i) : taut
- $S_i \cap E_i$: 向きまで込めて parallel な simple closed curves. (E_i see 3.2)
- V : a component of $R(\gamma_{i-1})$ とすると $S_i \cap V$ は，向きまで込めて parallel な simple closed curves or arcs.

L : 上の seq. より 4.16 のようにして定まる lamination とする。この時，新しい a seq. of sutured mfd. decomp.

$(M, \partial M) = (N_0, \delta_0) \overset{T_1}{\rightsquigarrow} (N_1, \delta_1) \overset{T_2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{T_m}{\rightsquigarrow} (N_m, \delta_m)$ で次をみたすものがある。

1. $B_1, \cdots, B_m$: (N, δ)-seq. から定まる branched surface (see 4.15) とすると L は fully carried by B_m

(2. (N_m, δ_m) を product disk, or annulus に沿って切り開く事により (M_m, γ_m) と product sutured mfd. を得る (product disk, annulus の定義は [G2] を参照))

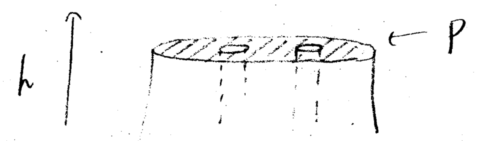
3. $B_1, \cdots, B_m$ は，normal form (see 4.8) 従って，4.10 より，L は，normal form にもってゆける。

Proof. <u>Step 1.</u> ($B_1 = T_1$ ($= S_1$) を normal form にもってゆく)

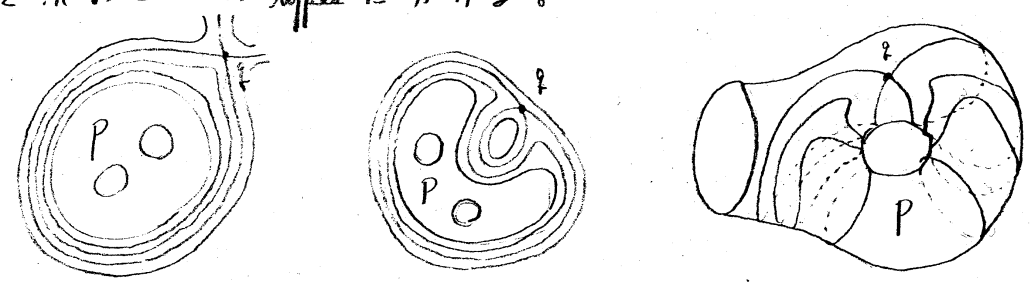
$(N_0, \delta_0) = (M, \partial M)$, $T_1 = S_1$ とする。 まず general position の議論により S_1 ($= S$) を次のような位置にもってゆける。

- S は、K の近くで normal form (i.e. S_1 は、4.8.1) 2) をみたす)
- S は、次の3つの状況を除いて $\mathcal{H}$ に横断的

saddle
center in normal form (see 4.8.4))
plateau P (i.e. P は S に embed された surface で P 上で h は const., または h は、P で local max., or min.)



さて、plateau P ($\subset S$) の近くでの $S \cap \mathcal{H}$ の状況をみる。 ∂P の少し外では、foliation $S \cap \mathcal{H}$ は、product $\partial P \times I$ (leaf は $\partial P \times pt.$) の形になっているが この条件により leaf を外側にたどってゆけば必ず saddle q にぶつかる事がわかる。 これに注意して P を次の3つの types に分ける。

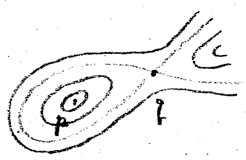


type I
∂P 上の1点が pinch する

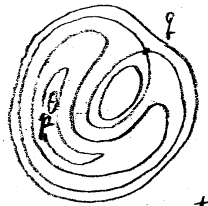
type II
∂P の a comp. 上の2点が squeeze する

type III
∂P の互いに異なる comp. 上の2点が squeeze する.

同様に各 center も次のように type I, II に分ける。

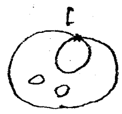
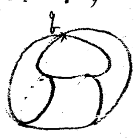


type I

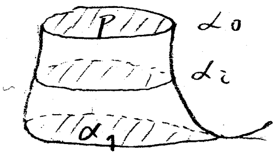


type II

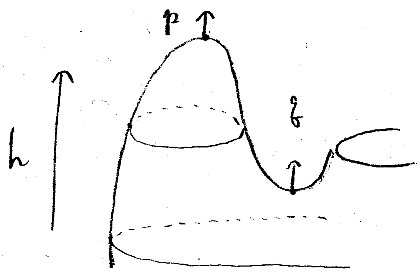
この時、map $F : P \times I \to S^3$ で $F(P\times\{0\}) = P$, $F|_{P\times[0,1)}$: embedding,

$F(P\times\{1\}) =$  ,  , or  となるものが存在する。

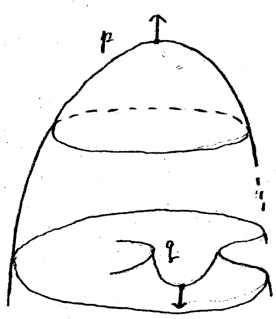
また $\alpha_i = F(P\times\{i\})$ とする（従って $\alpha_0 = P$）。



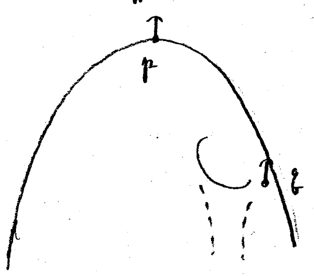
また type I, II を P (or p) と q での normal direction が一致するかどうかでさらに a型, b型に分ける。即ち：



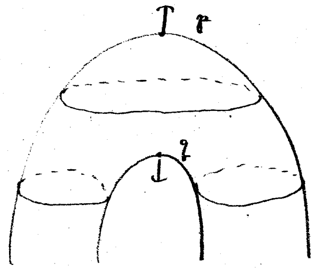
type I a



type I b



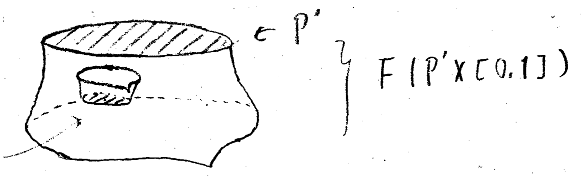
type II a



type II b

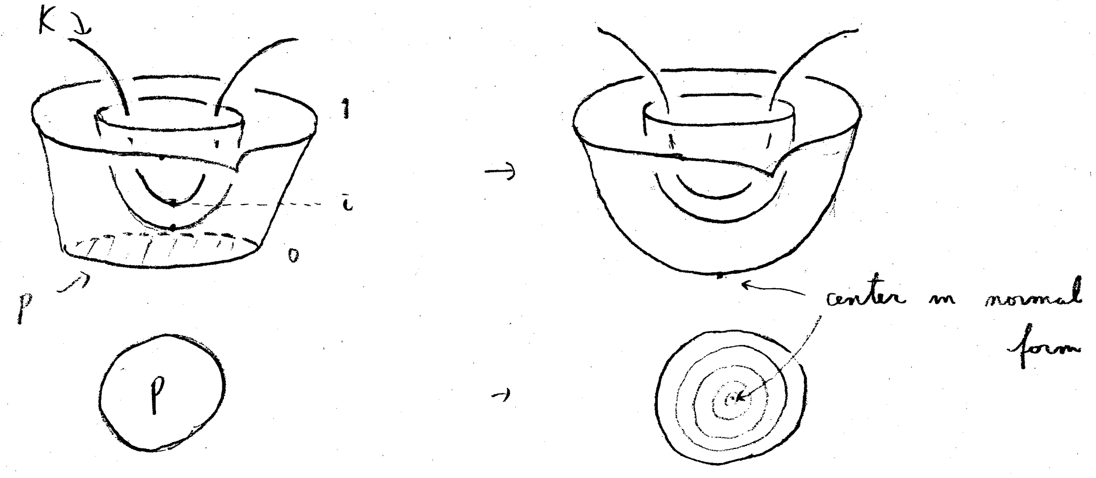
以上の状況のもと S の complexity c(S) を 3(plateaus の個数) + 2(centers の個数) で定める。また P′ を local max.

である plateaus のうち最も高さの低いもの，P を $F(P'\times[0,1])$ に含まれる plateaus のうち最も高さの高いものとする。（注：もし P' が存在しなければ P を local min. である plateau で最も高さの高いものとする。P' も P も存在しない時は，下の Case.7へ行く）

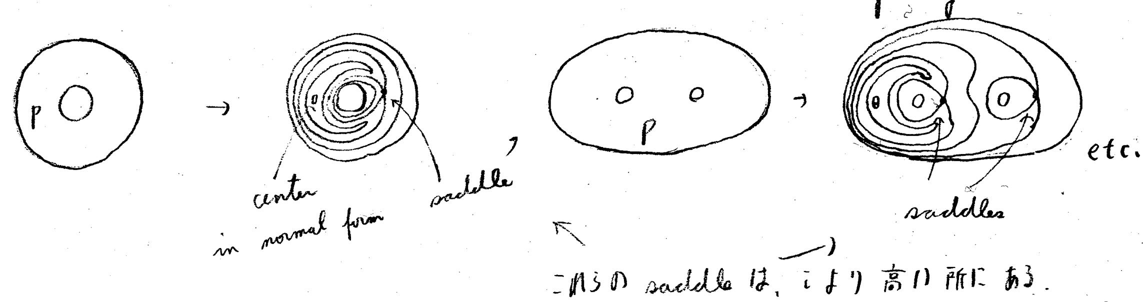


Case 1.　$K\cap F(P\times[0,1])\neq\phi$

$i=\min\{j\mid F(P\times[0,j])\cap K\neq\phi\}$ とする。即ち $F(P\times[0,i))\cap K=\phi$，$F(P\times\{i\})$ は a local min. point of K.　P が disk の時，S



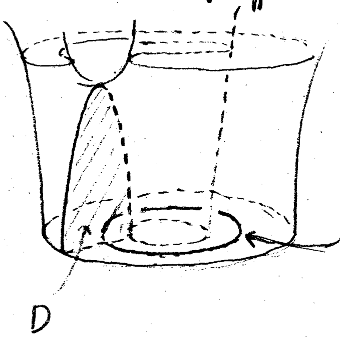
を上の図のように P の nbhd. で変形して complexity を下げられる。P が disk でない時も次のように S を変形して complexity を下げる。



これらの saddle は，i より高い所にある．
（そうでないと新しい center は，normal form でない）

以下，$K \cap F(P\times[0,1]) = \phi$ とする。

Case 2　P is of type III

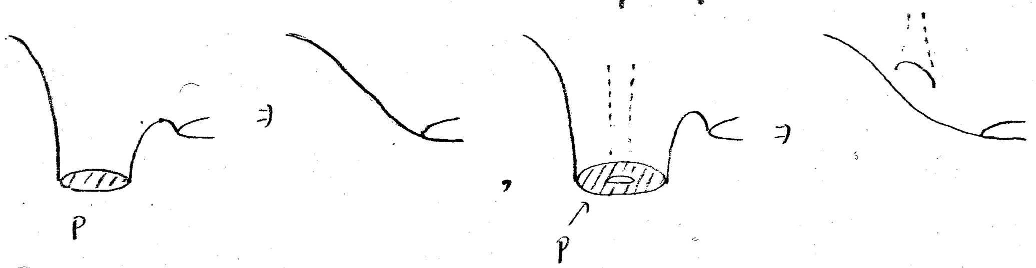


この時，左の様に $D \cap S = \partial D$ となる disk D がとれる。いま S 上の loop で ∂D と transverse に1点で交わるものが存在するから ∂D は，S 上の essential loop.

これは，S が min. genus に矛盾。

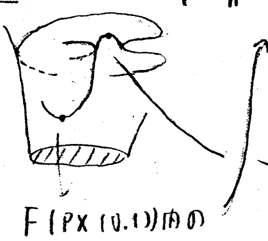
Case 3　P is of type Ia

この場合，次のようにして complexity を下げられる。



etc.

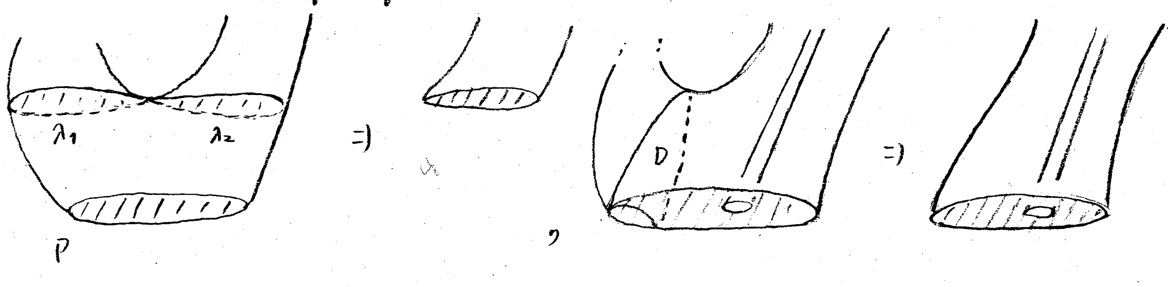
Case 4.　P is of type Ib

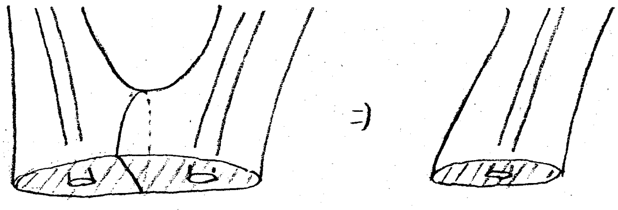


local min. とすると，P の取り方よりこれは center でなければならない。他方，この saddle の存在と $K \cap F(P\times[0,1]) = \phi$ より上の center は，normal form でない事がわかる：矛盾.

Case 5.　P is of type IIb

次のようにして complexity が下げられる。

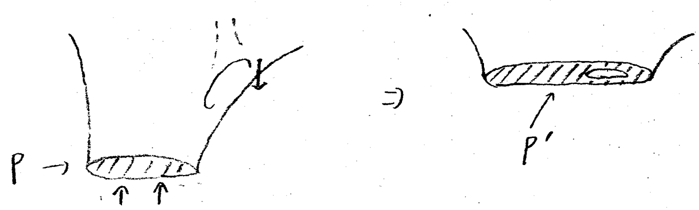




etc.

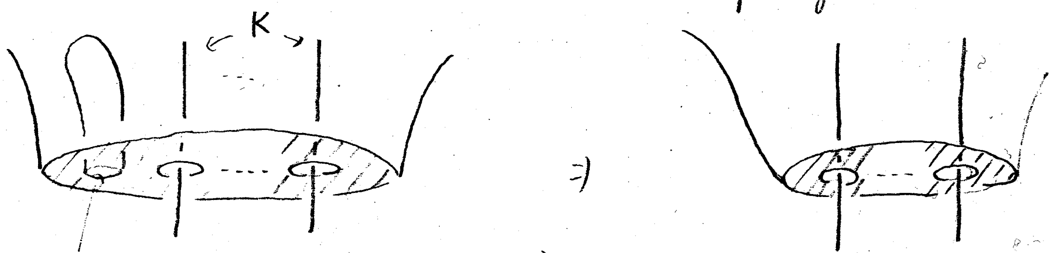
<u>Case 6.</u> P is of type IIb

この時，Pを次のように押し上げていって新しいplateau (P') を作る。



注：この時 $|\chi(P')| = |\chi(P)-1|$，また新しく得られたsurfaceは，Sと同じcomplexityをもつ。

この新しいsurfaceにCase 1~5の議論が適用出来ればcomplexityが下がる。もし適用出来ないなら上と同様surface上のa plateauを押し上げて新しいplateauを作る。この方法でいつまでもcomplexityが下がらなかったとする。この時，a surface上のa plateau P_r で $|\chi(P_r)| > m(K)$ なるものが存在する。
see 4.2
この時 ∂P_r のcomponentでsurface上のdiskをboundするものがとれるからこれを用いて次のようにcomplexityを下げられる。



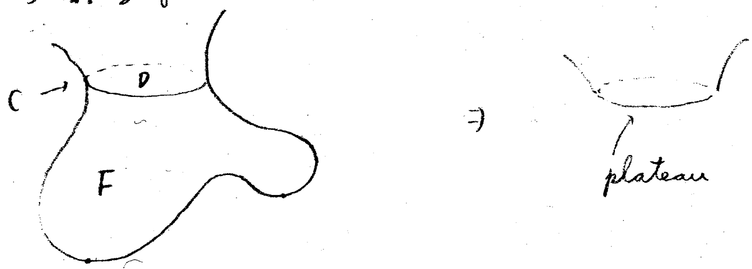
この中をKは通らない (∵ def. of $m(K)$)

以上の考察によりSをmin. complexityにとればS上に

plateau は存在しない事がわかる。従って，この S が normal form にある事を見る為には，あと 4.8 4) の条件をみたす事を確かめればよい。

Case ア　$\exists Q$: level plane，$\exists C$: a component of $Q \cap S$ s.t. C bounds a disk D in $Q - S$，C bounds a disk F in S s.t. F : not normal form.

この時　次のように S_1 を取り変える事により complexity を下げられる。



（注：Gabai は，論文の中で Case ア を上のように取り扱っているが，実際には，Case ア は起り得ないと思われる。）

Step. 2

Lemma 4.21.　B : a branched surface in normal form w.r.t. K s.t.

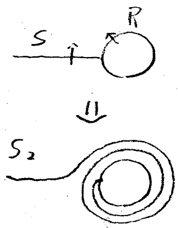
$S(B)$: taut，

$S(B) = (M, \gamma) \overset{S}{\rightsquigarrow} (M', \gamma')$: a sutured mfd. decomp. s.t.

- $\overline{V}$: a comp. of $R(\gamma) \Rightarrow S \cap \overline{V}$: 向きまで込めて parallel な simple closed curves or arcs.
- (M', γ') : taut

R : the components of $R(\gamma)$ which intersects S，

S_r : the properly embedded surface in M obtained by oriented cut and paste surgery with S and r parallel copies of R.



$(M, \gamma) \overset{S_r}{\rightsquigarrow} (M_r', \gamma_r')$: sutured mfd. decomp. これで得られる branched surface を B_r とする。(以上が Lemma の仮定)

$\Rightarrow$ $\exists r$ s.t. B_r は rel ∂ isotopy で branched surface in normal form に isotopic.

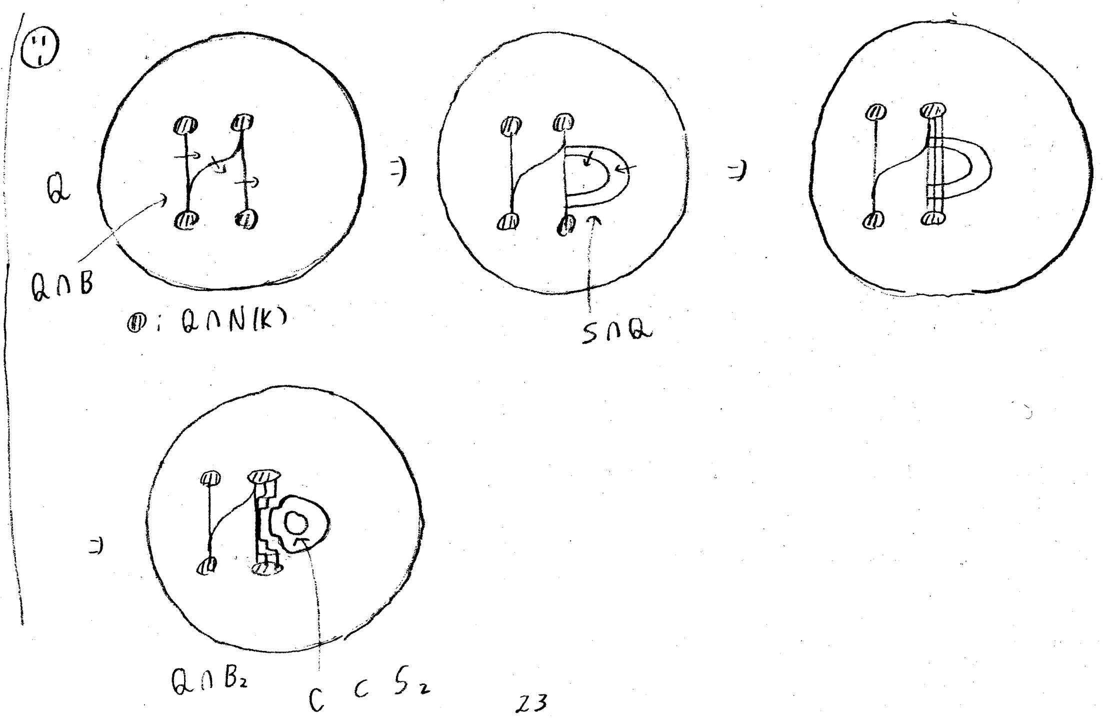
Proof. S_1 を次のように isotopy で動かす。

- ∂S は、B の saddle, center の nbhd. と disjoint.
- $h|_{\partial S}$ は、Morse fun.
- S は、isolated saddle, plateaus, centers in normal form 以外で $\mathcal{F}$ と横断的.
- B の branched locus は、Def. 4.8 (i) をみたす。

ここで "m を十分大きくとれば、次のように出来る：

$s > m$ とすると $Q \cap B_s$ が smooth circle C で $Q - (B_s \cup N(K))$ の disk component (Q: a level plane) を bound するようなものを含む $\Rightarrow$ $C \subset S_s$, or C は、B_s 内の disk で center in normal form を含むようなものを bound する"

(∵)



m': the number of plateaus and centers of S_m とし $r = m + m'$ とする。
この時，$\Omega = \{$ centers and plateaus in B_r which are contained in $S_m \}$ とし Ω の complexity を $C(\Omega) = 3\,|$plateaus の個数$| + 2\,|$centers の個数$|$ で定めれば，後は Step 1 と同様に議論が進行して Lemma が証明出来る。

Step 3. (Proof of Lemma 4.19)

まず S_1 に Step. 1 を apply して normal form S_1^1 に持ってゆく。次に S_2 に Step. 2 を apply し新しい sutured mfd. の seq.：

$$(M_0, \gamma_0) \overset{S_1^1}{\rightsquigarrow} (M_1, \gamma_1) \overset{S_2^2}{\rightsquigarrow} (M_2^2, \gamma_2^2) \overset{S_3^2}{\rightsquigarrow} (M_3^2, \gamma_3^2) \overset{S_4^2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{S_n^2}{\rightsquigarrow} (M_n^2, \gamma_n^2)$$

を得る。(S_1^1 と S_2^2 から定まる branched surface は normal form にもってゆける)
次に S_3^2 に Step 2 を apply する …… 以下これをくり返してゆけば，Lemma 4.19 の，sutured mfd. decomp. の seq. を得る。

Lemma 4.22. $L\ (\subset S^3 - \mathring{N}(K))$; a finite depth lamination with incompressible leaves, $\overline{W}$: a lamination obtained by thickening L, (M, γ): a taut sutured mfd. embedded in $S^3 - (N(K) \cup \mathring{\overline{W}})$ $\Rightarrow$ (M, γ), $\overline{W}$ を isotopy で動かして次のような level plane Q を見つけられる.

0) $Q \cap K \neq \phi$

1) Q は $\mathring{\overline{W}}$ 内の有限個の saddles, centers を除いて Q と横断的.

2) $\overline{W} \cap Q$ の component のうち $Q - (\overline{W} \cup \mathring{N}(K))$ で disk を bound するようなものは高々 1 個.

3) Q は，M に横断的. $Q \cap \gamma$ の各 arc component は，γ の

essential arc.

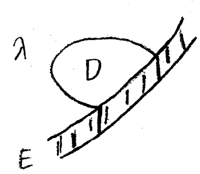
4) $Q\cap(\partial M-\mathring{E})$ の各 arc component は，$\partial M-\mathring{E}$ で essential.

Proof. M を isotopy で動かして次のようにする。

- ∂M は，有限個の saddles, centers を除いて level 2-spheres と横断的.
- $\partial\Gamma$ は，有限個の critical points を除いて level 2-spheres と横断的.
- 全ての tangency は，相異なる level にある。

h を K の local min. で最も高い所にあるものの高さ，ℓ を K の local max. で h より高い所にあるもののうち最も低いものの高さとする。

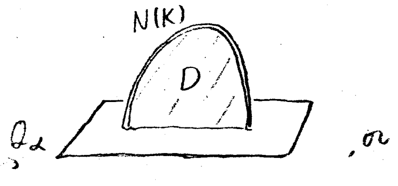
$h<\alpha<\ell$ とし $Q=Q_\alpha$ とする。 この時 $Q\cap E$ の各 component は，
← boundary suture
E 内の essential arc.



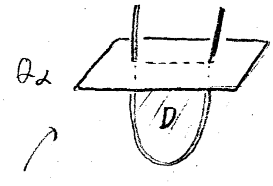
λ: an arc component of $(\partial M\cap Q)-E$ とする

いま，λ は $\partial M-E$ で inessential とし D をその compressing disk とする。

この Q_α, λ, D を S^3 の中で見ると次の状況:



, or



このような Q_α を low plane　　このような Q_α を high plane と呼ぶ。

H (S resp.) $=\{\alpha\in[h,\ell]\mid Q_\alpha$ is a high (low resp.) plane$\}$ とおく。

Claim $[h,\ell]\neq\bar{H}\cup\bar{S}$

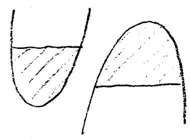
($[h,\ell]=\bar{H}\cup\bar{S}$ とせよ.)

Proof of Claim. まず次の事実に注意する

"I: an open interval of $[h,\ell]$ s.t. $\partial M\pitchfork Q_\alpha$ ($\forall\alpha\in I$) $\Rightarrow$ '$I\subset H$ or $I\cap H=\phi$' &

'$I \subset S$ or $I \cap S = \phi$' また '$h \in \bar{H}$, $s \in \bar{S}$''

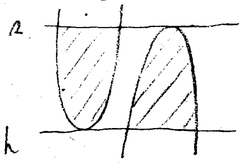
いま Claim が成立しないとする。 即ち,



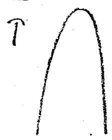
この時 "$\exists \alpha \in [h, s]$ s.t. Q_α は ∂M に tangent"

(∵) $\forall \alpha$, $Q_\alpha \pitchfork \partial M$ とする 上の注意より $\bar{H} = \bar{S} = [h, s]$.

即ち



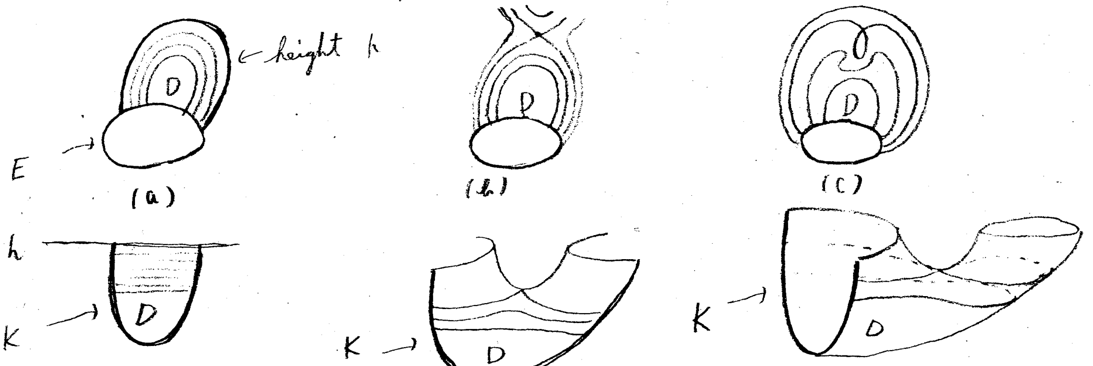
⇒



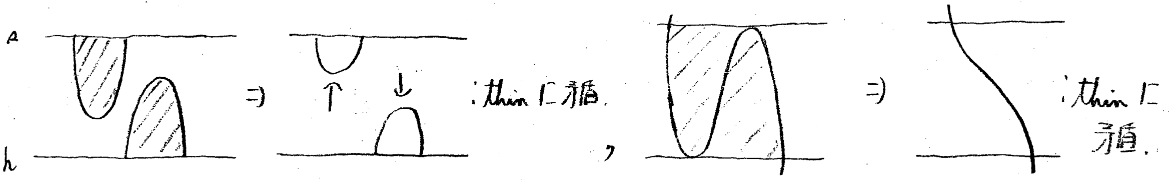
: K が thin presentation に矛盾.

この時, $a \in (\alpha-\varepsilon, \alpha) \Rightarrow a \in H$, $a \in (\alpha, \alpha+\varepsilon) \Rightarrow a \in S$

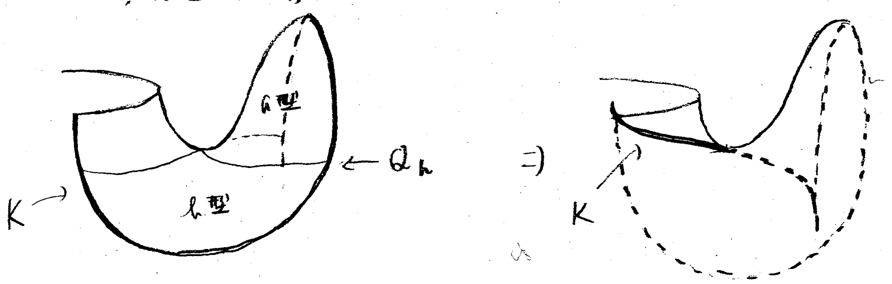
いま Q_α によって ∂M 上に induce される foliation を考え それに沿って D を外側にたどってゆく事により次の3つの cases を得る。



・Q_α の上に a型, 下に a型の dish がある時. 次の2つの状況を得る。

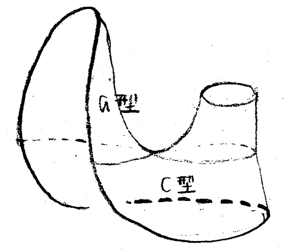


・a型, b型の時.



: thin に矛盾.

・a型, c型の時.



即ち．この時 K は，unknot：矛盾．

Q_αの取り方より h型，C型の組み合わせはない事がわかる．

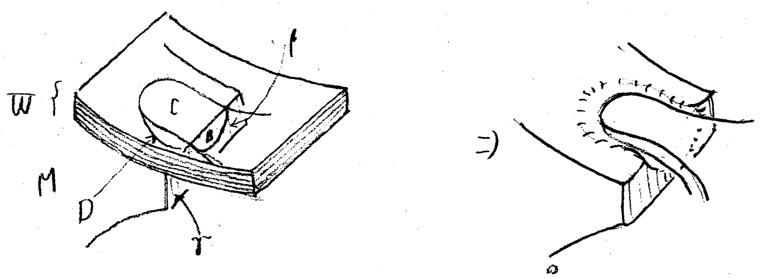
以上，Claim の証明終り。

Claim. より $\exists\alpha\ (h<\alpha<\ell)$ s.t. $Q_\alpha \neq$ high, low plane また $Q \pitchfork L$, $Q \pitchfork M$ としてよい．　以下このQ_αがLemmaの条件をみたす事をみる。

まずLがnormal formより(1)はO.K．h, ℓの取り方より(2)もO.K，αの取り方より(4)もO.K、従って，あと(3)をみたすようにMを変形する。

○$\exists\beta$: a comp. of $Q\cap\Gamma$, $\exists D(\subset Q)$: a disk s.t. $\partial D\subset\beta\cup\overline{W}$, $\mathring{D}\cap(\overline{W}\cup\Gamma)=\phi$ とする。

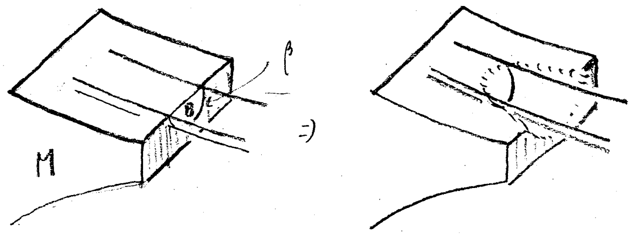
この時，次のようにMをisotopyで動かしてβをはずしてしまう。



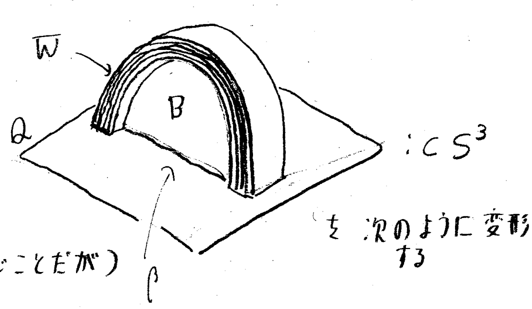
従って $Q\cap\gamma$の各comp.は，$Q-\mathring{\overline{W}}$でessentialとしてよい。

○β : a comp. of $Q\cap\gamma$, inessential in γ, essential in $Q-\mathring{\overline{W}}$ とする。

この時，次のように$\overline{W}$, Mを動かしてβをはずしてしまう。

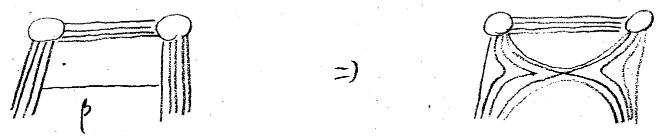


，又は（同じことだが）



を次のように変形する

この時，$Q\cap\bar W$ の pattern は次のように変化する。

Q 

以上より $Q\cap\gamma$ の comp. で inessential なものは全て消せる。

Lemma 4.24. $(S^3-\mathring{N}(K), \partial N(K)) \overset{S_1}{\rightsquigarrow} (M_1,\gamma_1) \overset{S_2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{S_m}{\rightsquigarrow} (M_m,\gamma_m)$: a seq. of sutured mfd. decomp. s.t. ・(M_i,γ_i) : taut ・$S_i\cap\partial N(K)$: a union of simple closed curves

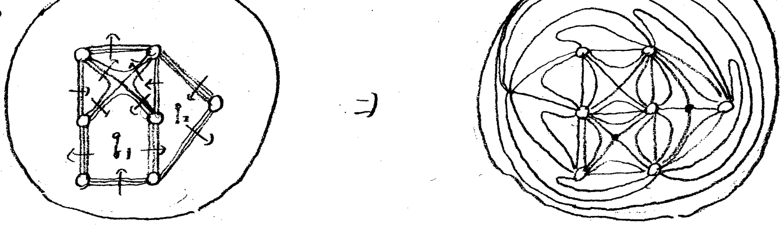
・$\bar V$: a comp. of $R(\gamma_{i-1})$ とすると $S_i\cap\bar V$ は，向きまで込めて parallel な non-sep. simple closed curves, or arcs.

⇒ $\exists Q$: level 2-sphere s.t. ・$Q\cap K\neq\phi$，・$Q\pitchfork M$，

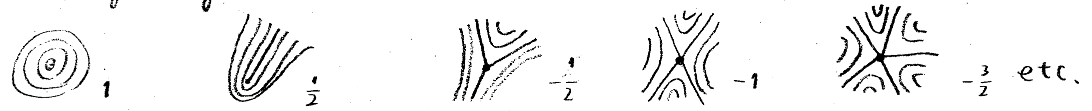
・$Q\cap\gamma$ ($Q\cap(\partial M-\mathring{E})$ resp.) の各 comp. は，γ ($\partial M-\mathring{E}$ resp.) で essential

・$Q\cap M=\{q_1,\cdots,q_r\}\cup D$，$D=\phi$, or a disk，$\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\frac{|\partial q_i\cap\partial\gamma|}{4}-\chi(q_i)\le|Q\cap K|-1$.

Proof. 4.16 より，$S^3-\mathring{N}(K)$ 上の finite depth lamination $\mathcal{L}$ が定まる。
(M_i,γ_i) : taut より $\mathcal{L}$ の各 leaf は，incompressible． 4.19, 4.10 より $\mathcal{L}$ は，normal form にあるとしてよい。 Q を 4.22 で得られた level 2-sphere とする。 この時，$Q-\mathring{N}(K)$ 上の lamination $Q\cap\mathcal{L}$ を次のように singular foliation に拡張する。



ここで各 singularity 上の index を次のように定める。



この時、$\underbrace{\chi(Q - \mathring{N}(K))}_{2-|Q\cap K|} = \sum$ (index of singularities) (Poincaré-Hopf index formula

従って $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \chi(q_i) - \frac{|\partial q_i \cap \partial \Gamma|}{4} = \sum_{i=1}^{r}$ index (q_i 内の sing.)

$\displaystyle\le \sum_{i=1,\ i\neq j,\ q_j = D}^{r}$ index (q_i 内の sing.) $= 1 - |Q \cap K|$

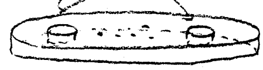
§5

Lemma 5.1. K: a knot, $(S^3 - \mathring{N}(K), \partial N(K)) \overset{S_1}{\rightsquigarrow} (M_1, \gamma_1) \overset{S_2}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{S_m}{\rightsquigarrow} (M_m, \gamma_m)$: a seq. of sutured mfd. decomp. s.t. • $(M, \gamma) = (M_m, \gamma_m)$: taut

• $\partial \hat{M}$: a union of 2-spheres, • S_i: not a compressible torus, • $S_i \cap \partial N(K)$: union of circles,

• V: a comp. of $R(\gamma_{i-1})$ とすると, $S_i \cap V$ は、向きまで込めて parallel な simple closed curves or arcs ⇒ 次のいずれかが成立.

これらは boundary sutures

1) (M, γ): a product sutured mfd. 特にその形は 

2) $\exists P\ (\subset S^3 - \mathring{N}(K))$: a planar surface, $\exists Q\ (\subset S^3)$: a sphere s.t.

• $|K \cap Q| = \mu > 0$, • $P \cap \partial N(K)$: a union of $\nu (>0)$ coherently oriented longitudes,

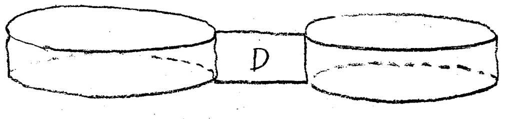
• $\lambda = \partial P - \partial N(K)$: a simple closed curve s.t. $|\lambda \cap Q| \le \mu - 2$

• no component of $P - Q$ is a disk F with $\bar{F} \cap Q$: connected

Q を Lemma 4.24 のようにとる

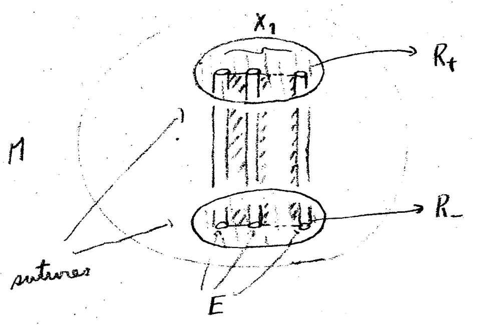
Proof (of very special case.) $E = \{A_1, \cdots, A_w\}$: boundary sutures

E の元の間に次の relation $\sim$ で生成される equivalence relation を入れる: $A_i \sim A_j \iff \exists D$: a rectangle of $Q \cap M$ s.t. $D \cap A_i \neq \phi,\ D \cap A_j \neq \phi$



$X_1, \cdots, X_t$ を上の equivalence class. いま $t=1$ の時に Lemma を証明する事にする。 結論1)が成立しないとすると

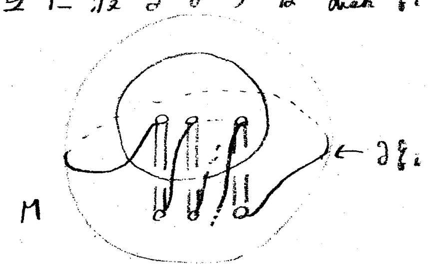
" $|\xi_i \cap \gamma| = 2 \Rightarrow \xi_i \cap (\gamma - E) = \phi$, or $\xi_i \neq D^2$ " (注: $\xi_i \cap E \neq \phi$) となる。
See 4.24.



$R_\pm$: component of $R(\gamma)$ を左のように定める。

いま K を 0-framed surgery した mfd. が lens space 成分を含まない事より $\partial \xi_i$ が E と γ-E を交互に渡るような disk ξ_i は存在しない。 即ち、

$\nexists\ \xi_i$: disk s.t.



$D_\pm$: the disk $\hat{R}_\pm$ reduced in size to eliminate trivial intersections with Q (?)

とすると、従って、 $|\xi_i \cap \partial D_+| + |\xi_i \cap \partial D_-| \le 2\left(|\partial \xi_i \cap \partial \gamma|/4 - \chi(\xi_i)\right)$

従って Lemma 4.24 より $\sum |\xi_i \cap \partial D_+| + \sum |\xi_i \cap \partial D_-| \le 2\sum\left(|\partial \xi_i \cap \partial \gamma|/4 - \chi(\xi_i)\right)$

$\le 2|Q \cap K| - 2 = 2(\mu - 1)$ 故に $D_+ \cap M$ 又は $D_- \cap M$ が求める P.

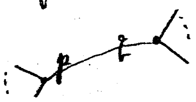
一般の場合については、Gabai [G2] 参照.

§6.

Lemma 6.1. S^2 上には、次の(条件を全てみたす)ような(label付)グラフは存在しない。: 1) G は $\nu+1$ vertices をもつ。 そのうち ν 個は、μ ($\neq 0$, even) 個の edges が集まる、残りの vertex w は m ($0 \le m \le \mu - 2$) 個の edges が集まる

2) valency μ vertex から出る edges は、時計方向に $1, 2, \cdots, \mu$ とい

う labeling がなされている。

3)  一つの edge の両端に label がついている時，その一方は偶数で他方は奇数.

4) D: the closure of a comp. of S^2-G which is a disk, $D\cap \mathcal{M}=\phi$ この時 ∂D に沿って edge の label を読んでゆくとそれは $(j, j-1, j, j-1, \cdots, j, j-1) \bmod \mu$ という形ではない。

証明略.

§7. Proof of Theorem

<u>Step. 1.</u> 3.6 より $(S^3-\mathring{N}(K), \partial N(K))$ から始まる sutured mfd. decomp. の seq. を得る。

<u>Step 2.</u> 4.20, Step 1 より $S^3-\mathring{N}(K)$ 内の finite depth lamination $\mathcal{L}$ を得る。$\mathcal{L}$ が $S^3-\mathring{N}(K)$ の foliation $\mathcal{F}$ に拡張しないとする。この時 5.1 の結論 2) が成立して P, Q が存在する。ところが 6.1 よりそのような P, Q は存在しない事がわかる。従って $\mathcal{L}$ は常に foliation $\mathcal{F}$ に拡張する。

References.

[G 1] D. Gabai "Foliations and the topology of 3-mfds", J. Diff. Geom. 18 (1983), 445 ~ 503

[G 2] ——— "Foliations and the topology of 3-mfds II", preprint.

[H] J. Hemple, 3-mfds., Ann. Math. Studies 86.

[T] W. Thurston, "Norm on the homology of 3-mfds" preprint