数理解析研究所講究録
577巻 1985年 50-61

Diff $\mathbb{R}$ の G.V. コサイクルについて

埼玉大 理 水谷忠良(Tadayoshi Mizutani)

1° 序　余次元1葉層構造の Godbillon-Vey 類(G.V.類)は、$H^3(B\overline{\Gamma}_1;\mathbb{R})$ の元と考えられるが、$H_3(B\overline{\Gamma}_1;\mathbb{Z})\cong H_3(B\mathrm{Diff}_+\mathbb{R};\mathbb{Z})\cong H_2(B\mathrm{Diff}_K\mathbb{R};\mathbb{Z})$ なる同型が知られているので(Mather, Segal 等) G.V.類は, $H^2(\mathrm{Diff}_K\mathbb{R};\mathbb{R})$ の元とも $H^2(\mathrm{Diff}_+S^1;\mathbb{R})$ の元とも考えることができる。ここでは Diff は抽象群あるいは離散位相をもった微分同相の群を考えており, 添え字Kはコンパクトな台をもつ同相写像を考えていることを示す。$H^2(\mathrm{Diff}_+S^1;\mathbb{R})$ および $H^2(\mathrm{Diff}_K\mathbb{R};\mathbb{R})$ における元は具体的に以下のように書き表わされ, Thurston cocycle と呼ばれている。

$$\alpha(g_1,g_2)=\int_{\mathbb{R}\text{ or }S^1} D(g_1,g_2)\,dt$$

ただし $D(g_1,g_2)$　($g_i\in\mathrm{Diff}_K\mathbb{R}$ 又は Diff_+S^1)は

$$\begin{vmatrix} \log g_2' & \log(g_1\circ g_2)' \\ (\log g_2')' & (\log(g_1\circ g_2)')' \end{vmatrix}$$ なる3関数である。(g'は導関数)

一方，$H^3(\mathrm{Diff}_+\mathbb{R};\mathbb{R})$にある3次元のコサイクルの具体的な形は，森田－坪井（Topology, '80）および水谷－坪井（Sci. Rep. Saitama J. '79）で用いられたが，これは$\overline{\mathrm{Diff}_+S^1}$の場合であった。$\overline{\mathrm{Diff}_+S^1}$は$\mathrm{Diff}_p\mathbb{R}=\{f\in\mathrm{Diff}_+\mathbb{R}\mid f(x+1)=f(x)+1\}$と同一視されるので，$\mathrm{Diff}_+\mathbb{R}$の部分群であるとみてよい。そのコサイクルの具体的な形の1つは次の式で与えられている。

$$\int_{S^1}\begin{vmatrix} h-id & g\circ h-id & f\circ g\circ h-id \\ \log h' & \log(g\circ h)' & \log(f\circ g\circ h)' \\ (\log h')' & (\log(g\circ h)')' & (\log(f\circ g\circ h)')' \end{vmatrix}dt$$

$$f,\ g,\ h\in\mathrm{Diff}_pS^1 .$$

$\mathrm{Diff}_+\mathbb{R}$のコサイクルについては具体的に書き表わした文献がないので以下にその式を与え，以上に述べた公式を得るための簡単なやり方を述べたい。

これらのコサイクルを扱うひとつの動機に，Thurston cocycleによって定義される$G=\mathrm{Diff}_+S^1$（or $\mathrm{Diff}_K\mathbb{R}$）の加群$\mathbb{R}$による中心拡大の群$\widetilde{G}$；$0\longrightarrow\mathbb{R}\longrightarrow\widetilde{G}\longrightarrow G\to 1$がどのような幾何学的な意味をもつのかを知りたいという願

望がある。H^2におけるコサイクルももともとはH^3のコサイクルから派生しており、3次元コサイクルの方がより根源的であると考えられる。ただし以下で与える3次元コサイクルは対称性に欠けるところがあるので、もっと良いコサイクルの形が見つけられる可能性がある。

2° 結果。　我々の結果は次のように述べられる:

G.V. 類より定義される $\mathrm{Diff}_+\mathbb{R}$ の(より正確には $\overline{\mathrm{Diff}_+\mathbb{R}}$ の)3次元のコサイクルは次の式で与えられる。

$$T_a(g_1, g_2, g_3) = \int_a^{g_3(a)} D(g_1, g_2)\, dt, \quad a \in \mathbb{R}$$

また、T_a と T_b $(a, b \in \mathbb{R})$ は cohomologous なコサイクルである。(simplex $\langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ における積は $\cdot \xrightarrow{g_3} \cdot \xrightarrow{g_2} \cdot \xrightarrow{g_1} \cdot$ の様に行い、$\partial\langle g_1, g_2, g_3\rangle = \langle g_2, g_3\rangle - \langle g_1 g_2, g_3\rangle + \langle g_1, g_2 g_3\rangle - \langle g_1, g_2\rangle$ とする)。

まず最初に、上のコサイクルから1°で述べたコサイクルをどのように求めればよいか述べよう。それには、次の図式を考えれば十分である。

$$\begin{array}{ccc} & H_3(\mathrm{Diff}_p\mathbb{R};\mathbb{Z}) \xrightarrow{③} & H_3(\mathrm{Diff}_+\mathbb{R};\mathbb{Z}) \\ & \uparrow ② & \downarrow T_a \\ H_2(\mathrm{Diff}_K\mathbb{R};\mathbb{Z}) \xrightarrow{①} & H_2(\mathrm{Diff}_+S^1;\mathbb{Z}) & \mathbb{R} \end{array}$$

① は $\mathbb{R}$ を S^1 の開区間として見るみかたを１つ固定して定義される包含写像による。 ② は単体 $\langle f, g\rangle$ $f, g \in \mathrm{Diff}_+S^1$ に対し、f, g の $\mathrm{Diff}_p\mathbb{R}$ への lifts $\tilde{f}, \tilde{g}$ と１だけの translation T で $\langle \tilde{f}, \tilde{g}\rangle \times \langle T\rangle$ を対応させる写像。後者は単体で表わせば３つの単体の和。 ③ は自然な包含写像による。

①, ②, ③ および T_0 を用いると 1° で述べた Thurston のコサイクル等が簡単な計算で再現できる。ただし、定数倍の違いは気にしないこととする。

T_a, T_b $(a, b \in \mathbb{R})$ が互に cohomologous であることは次のようにして示される:

$$T_a(g_1, g_2, g_3) - T_b(g_1, g_2, g_3) = \int_a^b \frac{d}{dx} T_x(g_1, g_2, g_3)\,dx$$

$$= \int_a^b \{D(g_1, g_2)(g_3(x)) - D(g_1, g_2)(x)\}\,dx$$

$$\underset{(\text{計算})}{=\!=} \int_a^b D(\partial\langle g_1, g_2, g_3\rangle)(x)\,dx$$

$$= \left(\delta \int_a^b D\,dx\right)(\langle g_1, g_2, g_3\rangle).$$

即ち $T_a \backsim T_b$ (cohomologous) である。上の計算で D は単体 $\langle g_1, g_2\rangle$ に $D(g_1, g_2)$ を対応させるcochainと考えており，(計算) と書いたところは境界作用素∂と簡単な行列式の変形により得られる。

$\int_a^b D\,dx$ は多分に形式的な記号であるが，例えば $a=-\infty$, $b=+\infty$ ととれば $\mathrm{Diff}_K \mathbb{R}$ の Thurston cocycle を表わしている。この場合，$T_{-\infty} = T_{+\infty} \equiv 0$ であるので上の式は，Thurston cocycle が実際にコサイクルになっていることを確める式にもなっている。($\mathrm{Diff}_+ S^1$ の場合，$a=0$, $b=1$ とすればよい。)

3° 証明の手順。 ここでは Godbillon-Vey が最初に定義した多様体上の余次元1葉層構造の G.V. cocycle (3次元のド・ラーム・コホモロジー類) と 1° で述べた $\mathrm{Diff}_+ \mathbb{R}$ の群の3-コサイクルを関係づける手続きを述べる。

M を (C^∞) 多様体とし，$\{V_i\}_{i\in I}$ を M の十分細かい開被覆

とする。$E = M \times \mathbb{R}$ とし，$\mathcal{F}$ を E 上の余次元 1 の葉層構造(C^∞) で $\mathbb{R}$ を fiber とする葉層積(foliated product)となるものとする。$\pi : E \longrightarrow M$ を射影とすれば，$\mathfrak{U} = \{ \mathcal{U}_i = \pi^{-1}(U_i) \}_{i \in I}$ は E 上の開被覆であり，各 $\mathcal{U}_i$ に対して，$\mathcal{F}$ の local submersion $f_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在しているとしてよい。即ち $\{ \mathcal{U}_i, \mathcal{F}|\mathcal{U}_i \}$ は $f_i = const.$ により定義されていると考える。$\{U_i\}_{i \in I}$ を simple covering にとれば $\{ \mathcal{U}_i \}$ もそうである。また，すべては oriented な category で物事を考えることにしておく。特に，$\mathcal{F}$ は global にある 1-form ω により $\omega = 0$ という式で定義されているとする。

さて，$A^{p,q} = \{ \mathcal{U}_{i_0} \cap \cdots \cap \mathcal{U}_{i_p}$ 上の q-form，$\mathcal{U}_{i_j} \in \mathfrak{U} \}$ とおくと，Čech coboundary operator δ および外微分作用素 d をとって $\{ A^{p,q}, \delta, d \}_{0 \le p,q}$ を double complex とすることができる。従って，次の図式が得られる。ただし，$\Omega^i = \Omega^i(E)$ は E の上の微分形式の作る de Rham complex，$\check{C}^i(\mathfrak{U})$ は開被覆 $\mathfrak{U}$ に付随する Čech complex で，δ は次の式で定義される作用素である：

$$(\delta \varphi)_{i_0 i_1 \cdots i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \varphi_{i_0 \cdots \hat{i_j} \cdots i_{p+1}}$$

$$(\text{on } \mathcal{U}_{i_0} \cap \cdots \cap \mathcal{U}_{i_{p+1}}), \quad \varphi \in A^{p,*}。$$

$$
\begin{tikzcd}
{} & {} & & & & \\
\Omega^3 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\iota"] & A^{0,3} \arrow[u] \arrow[r] & {} & & & \\
\Omega^2 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\iota"] & A^{0,2} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & A^{1,2} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & {} & & \\
\Omega^1 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\iota"] & A^{0,1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & A^{1,1} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & A^{2,1} \arrow[u] \arrow[r] & {} & \\
\Omega^0 \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\iota"] & A^{0,0} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & A^{1,0} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & A^{2,0} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & A^{3,0} \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
 & \check{C}^0(\Phi) \arrow[u, "r"] \arrow[r, "\delta"] & \check{C}^1(\Phi) \arrow[u, "r"] \arrow[r, "\delta"] & \check{C}^2(\Phi) \arrow[u, "r"] \arrow[r, "\delta"] & \check{C}^3(\Phi) \arrow[u, "r"] \arrow[r, "\delta"] & {}
\end{tikzcd}
$$

$A^n = \sum_{p+q=n} A^{p,q}$ により $A^* = \{A^n\}_{n \geq 0}$ は chain complex になる。その differential は $A^{p,q}$ 上で $D = \delta + (-1)^p d$ によって定義されるものである。D を total differential, (A^*, D) を total complex と呼ぶ。

この double complex はいわゆる deRham の定理の証明にも用いうれるもので次の事実は良く知られた基本的な事実である。

(1) (Ω^*, d) と (A^*, D) は ι によりひきおこされる写像 ι によってコホモロジーにおいて同型となる。

(2) たての列は (Ω^*, d) を除き exact となる。これは simple covering を取ったことによるもので、いわゆる Poincaré lemma の言い換えである。

(3) $(\check{C}^*(\Phi), \delta)$ を除き、横列は exact.

上のような setting を用いて、G.V. 類を葉層積のホロノミー（⇔ $f_i = g_{ij} \circ f_j$ をみたす $g_{ij} \in \mathrm{Diff}_+ R$ 達）によって表わすことを試みる。Godbillon-Vey form は上の状況では $d\omega = \eta \wedge \omega$ なる 1-form を 1 つとり $\eta \wedge d\eta \in \Omega^3(E)$ として定義されるが、これを $A^{2,1}$ の元まで変形してもってゆく。

さて、U_i 上で $\omega = 0$ と $df_i = 0$ は同じ $\mathcal{F}|U_i$ を定義するので、$\omega = a_i\, df_i$ （U_i 上）とかける。ただし、a_i は U_i 上の正値関数である。以下、U_i 上で $\eta \wedge d\eta$ は次のように計算される:

$$d\omega = da_i \wedge df_i = (d\log a_i) \wedge \omega = \eta \wedge \omega$$

故に $\eta - d\log a_i$ は ω の（又は df_i の）関数倍であって

$$\eta = d\log a_i + \alpha_i\, df_i, \quad \exists \alpha_i ;\ U_i \text{ 上の関数}$$

従って $\eta \wedge d\eta = d\log a_i \wedge d\alpha_i \wedge df_i$ （U_i 上）.

この式の右辺が $\eta \wedge d\eta$ を τ で $A^{0,3}$ にうつした元を表わす式になっている。

一方、葉層積のホロノミー写像 $\{g_{ij}\}$ は $f_i = g_{ij}\circ f_j$ を満たすので、$U_i \cap U_j$ 上で次のように計算できる。

$df_i = g_{ij}'(f_j)\,df_j$, $\quad \omega = a_i df_i = a_j df_j$

故に $\boxed{a_i/a_j = g_{ji}'(f_i)}$。また $\eta = d\log a_i + \alpha_i df_i = d\log a_j + \alpha_j df_j$ によって $\boxed{\alpha_j df_j = \alpha_i df_i - d\log g_{ij}'(f_j)}$。

これが $\{a_i\}$, $\{\alpha_j\}$ と $\{g_{ij}\}$ を結びつける基本的な関係式である。下の計算では、この関係式を適宜用いている。

$\eta\wedge d\eta$ を τ でうつすと $(i \longmapsto d\log a_i\wedge d\alpha_i\wedge df_i)\in A^{0,3}$ が得られた。簡単のため $d\log a_i\wedge d\alpha_i\wedge df_i \in A^{0,3}$ とかく。$\log a_i\wedge d\alpha_i\wedge df_i \in A^{0,2}$ を d でうつすと上の元になるので、この元を δ を用いて $A^{1,2}$ にうつしたものは (A^*, D) において（少くとも符号を除いて、以下同じ）$d\log a_i\wedge d\alpha_i\wedge df_i$ と cohomologous になる。それは δ の計算により $\log g_{ij}'(f_j)\,d\alpha_i\wedge df_i$ $(=\log g_{ij}'(f_j)\,d\alpha_j\wedge df_j)$ となる。$d(\log g_{ij}'(f_j)\,\alpha_i df_i) = d(g_{ij}'(f_j)\,\alpha_j df_j) = \log g_{ij}'(f_j)\,d\alpha_i\wedge df_i$ に注意すると、$\delta(g_{ij}'(f_j)\,\alpha_i\wedge df_i)$, $\delta(g_{ij}'(f_j)\,\alpha_j\wedge df_j)$ を計算して、もとのコサイクルに cohomologous な $A^{2,1}$ の元

$$c(g_{ij}, g_{jk}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \log g_{ij}'(f_j) & \log g_{jk}'(f_k) \\ d\log g_{ij}'(f_j) & d\log g_{jk}'(f_k) \end{vmatrix}$$

を得る。

この $C(g_{ij}, g_{jk})$ はその形から本質的には1変数の閉1次形式で leaf ($f_k = const$ なる点集合)上で0となる。従って $U_i \cap U_j \cap U_k$ 内で $f_k = 0$ を満たす点と点 x を結ぶ曲線上積分したもの $h_{ijk}(x) = \int_{f_k=0}^{x} C(g_{ij}, g_{jk})$ は

leaf 上一定な関数を定義する。もちろん $dh_{ijk} = C(g_{ij}, g_{jk})$ が成り立つ。δh は次のように計算される。

$$(\delta h)_{ijk\ell}(x) = h_{jk\ell}(x) - h_{ik\ell}(x) + h_{ij\ell}(x) + h_{ijk}(x)$$

$$= \int_{f_\ell=0}^{x} C(g_{jk}, g_{k\ell}) - \int_{f_\ell=0}^{x} C(g_{ik}, g_{k\ell}) + \int_{f_\ell=0}^{x} C(g_{ij}, g_{j\ell}) + \int_{f_k=0}^{x} C(g_{ij}, g_{jk})$$

$$= \int_{f_k=0}^{f_\ell=0} C(g_{ij}, g_{jk}) = \int_{f_k=0}^{f_k=g_{k\ell}(0)} C(g_{ik}\, g_{jk})$$

f_k を変数 $t \in \mathbb{R}$ と考え $g_1 = g_{ij}$, $g_2 = g_{jk}$, $g_3 = g_{k\ell}$ とおくと $1°$ で述べた式(の符号を変えたもの)が得られる。

以上により、Godbillon-Vey 類が $A^{3,0}$ の元、実は $\check{C}^3(\Phi)$ の元として表わされた事になる。

一般に群 G ($\mathrm{Diff}\,\mathbb{R}$, $\mathrm{Diff}\,S^1$ 等) の離散群としてのサイクルは Eilenberg-MacLane space $K(G,1)$ のサイクルに対応し、singular cycle $K \longrightarrow K(G,1)$ (Kはある複体) には $\pi_1(K) \longrightarrow G$ なる homomorphism が対応する。(とくに2次元、3次元のサイクルのときには K を多様体にとることが可能である)。従ってコサイクルは $\pi_1(K)$の像の元から作られる chain、サイクル上の値により定まるわけであるが、上に導びいた式では g_{ij} 等は必ずしも π_1 の像の元という形になっていない。$\{g_{ij}\}$ をそのようなものに取るには次のように考えればよい。まず Mの被覆 $\{V_i\}$ を十分細かくとり、その Nerve (対応する simplicial complex) N を考える。Nの 2-skeleton の subcomplex K_0 で ① K_0は可縮, ②包含関係に関し極大, なるものをとる。K_0の頂点に対応する開集合 V_i達の上で、K_0のつながり方に応じて trivialization (f_iのこと) を拡張してゆく。このようにすれば K_0に属さない 1-simplex は $\pi_1(M)$ の generator に対応し、そのときに限って、ホロノミー g_{ij} が自明でないことがある。即ち g_{ij} はすべて $\pi_1(M)$ の元に対応するもの (total holonomy の元) になっている。

最後に Remark を2つ述べたい。

Remark 1. ここでは余次元1の場合を扱ったが、同様にして余次元2以上の場合もThurstonのコサイクルを得ることができる。例えば、余次元2の場合、$A^{3,2}$の元は$L(g_{k,l})\,dL(g_{ij})\wedge dL(g_{jk})$の形に求められる。ただし$g_{ij}$等は$\mathrm{Diff}\,\mathbb{R}^2$の元，$L$は微分$D$，det（行列式）logの合成；$L=\log\det D$で$\mathrm{Diff}\,\mathbb{R}^2$の元に関数を対応させる写像。これから$A^{5,0}$の元を得るには2回積分をしなければならない。Thurstonのコサイクルは、上の式をfiber上（この場合は$\mathrm{Diff}_K\mathbb{R}^2$又は$\mathrm{Diff}_+S^2$等で考える）積分すればよい。

Remark 2. Diff_+S^1又は$\mathrm{Diff}_K\mathbb{R}$の2次元のsimplex $\langle g_1, g_2\rangle$は斉次なsimplex $[f_1, f_2, f_3]$でも表わされる。$f_1^{-1}f_2=g_1$, $f_2^{-1}f_3=g_2$のときに両者は同じsimplexを表わすが、Thurston cocycleは斉次なsimplexを用いると、次の関数の積分になる。

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log(f_1^{-1})' & \log(f_2^{-1})' & \log(f_3^{-1})' \\ (\log(f_1^{-1})')' & (\log(f_2^{-1})')' & (\log(f_3^{-1})')' \end{vmatrix}.$$

文献 Cantwell-Conlon, The dynamics of open, foliated manifolds and a vanishing theorem for the Godbillon-Vey class, Advances in Math, 1984.

1985年9月.