

無限階作用素の可逆性と可解性

近畿大理工 青木 貴史 (AOKI Takashi)

微分方程式論において可解性すなわち解が存在するかどうかはもととも基本的な問題である。以下では正則関数を係数とする無限階の微分方程式についてこの問題を考察する。有限階の作用素の場合正則関数における局所可解性は作用素が非退化の場合 Cauchy-Kowalevsky の定理により保証される。しかし同じ論法は無限階の場合に拡張できない。そもそも無限階方程式に対する Cauchy-Kowalevsky の定理が、少くとも有限階の形式的な拡張という形では存在し得ない。実際、無限個の初期条件は方程式とは無関係にそれを満たす関数を高々ひとつに限定してしまう。従って無限階方程式の局所可解性を論じるには別のアプローチを捜す必要がある。今のところこれには二つの路が考えられる。まず一つは定数係数の場合の論法を拡張することである。定数係数無限階の方程式についてはその可解性が知られている([I1], [M] 等参照)がそこで用いられる論法は値域が閉じていることと dual map

が単射であることから全射性を出すという函数解析的なものである。この論法を変数係数に拡張したものに [I₂, I₃] がある。才二の路は次の点に注目する。すなわち、有限階の場合 Cauchy-Kowalevsky の定理は考えている作用素の擬微分作用素としての逆を構成することと密接に関係している。ところが逆の構成に関しては無限階の作用素に対しても有限階と同様の結果が得られている [A₂, A₃]。そこで擬微分作用素としての逆を何らかの形で用いて解を構成することにより可解性を示すことはできないかを考える——これが才二の路である。この小論では才二の路から局所可解性にアプローチし、可解性のひとつの十分条件を与えることが目標である。簡単な為すべて一変数の場合に述べるが多変数の場合も同様の結果が成り立つ。これについてはまだ結果が整理できていないので別の機会に譲ることにする。

1. 無限階微分作用素の形式逆

まず記号を定めておこう。C の原点の近傍 X で定義された (有限階または無限階の) 微分作用素

$$P(x, D) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x) D^j$$

$$\left(D = \frac{d}{dx}, \quad a_j \in \mathcal{O}(X), \quad j = 0, 1, 2, \dots \right)$$

を考える。これが微分作用素であるということは a_j に対する

る評価 $\lim_{j \rightarrow \infty} j \sqrt{|a_j(x)|} = 0$ (X 上 局所一様) が成り立つことでありこれはまた P の全表象 $P(x, \xi)$ に対する評価: $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon > 0 \quad |P(x, \xi)| \leq C e^{\varepsilon|\xi|}$ と同値であることを思い出しておこう.

無限階作用素に対する可逆性定理 [A2, A3, AKK] から次の定理が得られる. 用語については [A_i] (V_i) 参照.

定理 1 原点の近傍 $U \subset X$, 開錐 $\Omega \subset \mathbb{C}$, 定数 $R > 0$ が存在して $U \times (\Omega \cap \{|\xi| > R\}) \subset T^*X = X \times \mathbb{C}$ において $P(x, \xi) \neq 0$ とする. このとき $U \times \Omega$ で定義された形式表象 $Q(t; x, \xi)$ が存在して

$$P(x, \xi) \circ Q(t; x, \xi) = 1$$

が成り立つ. ただし \circ は形式表象の結合

$$P(x, \xi) \circ Q(t; x, \xi) = \exp(t \partial_{\xi} \partial_y) P(x, \xi) Q(t; y, \eta) \Big|_{\substack{y=x \\ \eta=\xi}}$$

を表わす.

2. 楔における解の構成

P は前節と同様とする. $f \in \mathcal{O}(X)$ を与えられた函数として微分方程式

$$(1) \quad P(x, D) u(x) = f(x)$$

を考えよう. これが解を持つための十分条件を見出したい.

形式的には (1) から $u(x) = P(x, D)^{-1} f(x)$ とし解 u を得たいのであるが、これをいかに意味付けするか問題となる。このことには次に与えられる。

定理 2 原点の近傍 $U \subset X$, proper な閉錐 $\Gamma \subset \mathbb{C}$ および定数 $R > 0$ が存在して $x \in U$ のとき $P(x, \xi) = 0$ ならば $\xi \in \Gamma \cup \{|\xi| \leq R\}$ であったとする。このとき開錐 Γ' , 定数 δ が存在して (1) は各 $f \in \mathcal{O}(X)$ について解 $u \in \mathcal{O}(\Gamma' \cap \{x \mid |x| < \delta\})$ を持つ。

ここで言えば「全表象 $P(x, \xi)$ の零点が有界な所をのぞき半空間より少し狭い所に集中していれば」楔形の領域で可解ということになるが、以下の証明からわかるように Γ' は Γ の双対錐と思ってもよい。仮定は座標に依らないことも注意しておく。

定理 2 の証明 f の原点中心の Taylor 展開 ε

$$(2) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$$

とし、簡単のため f_k は評価 $|f_k| \leq B \rho^{-k}$ (B, ρ は正の定数) をみたすとする。この時 f の Taylor 展開の収束半径は少くとも ρ である。仮定および定理 1 より $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ とおくとき $U \times \Omega$ で定義された形式表象 $Q(t; x, \xi) z$

(3) $P(x, \xi) \circ Q(t; x, \xi) = 1$

となるものが存在する。形式表象の定義から任意の $K \subset U$, $\Omega' \subset \subset \Omega$ (部分錐) に対して定数 $A \in]0, 1[$, $d > 0$, および $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \Lambda(\xi)/|\xi| = 0$ なる函数 $\Lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ が存在して各 $j = 0, 1, 2, \dots$ に対して $(x, \xi) \in K \times (\Omega' \cap \{|\xi| \geq (j+1)d\})$ に対して評価

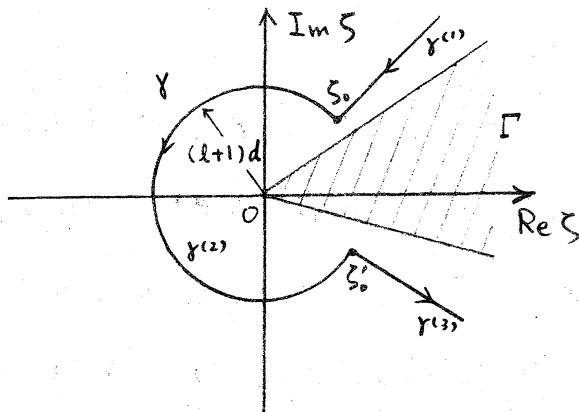
(4) $|Q_j(x, \xi)| \leq A^j \exp(\Lambda(\xi))$

が成り立つ。こゝに Q_j は $Q(t; x, \xi)$ における t^j の係数を表わす。

さて f に対して (1) の解 u を

(5) $u(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\gamma} \sum_{j+k=l} Q_j(x, \zeta) k! f_k \zeta^{-k-1} e^{x\zeta} d\zeta$

という形で求める。形式的には f の Fourier 変換に P の逆の表象をかけた逆 Fourier 変換したものが意味付けができていけば "解" になっていることは見易い。積分路 γ は l を固定したとき下図の如くとする。 $\gamma = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} + \gamma^{(3)}$ とわけ



る。 $T = T' \cup \gamma^{(1)}$, $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(3)}$ は図の様に半直線部分, $\gamma^{(2)}$ は半径が $(l+1)d$ の円弧である。各 $\gamma^{(i)}$ 上の積分を評価してゆく。

(i) $\gamma^{(2)}$ 上の積分

まず任意の $\epsilon > 0$ に対し $\Lambda(\zeta) \leq h|\zeta| + H$ なる H が存在
 することに注意する. (2), (4) と $\gamma^{(2)}$ 上 $|\zeta^{-1}| = (\ell+1)^{-1} d^{-1} \epsilon$

あわせて

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma^{(2)}} \sum_{j+k=\ell} Q_j(x, \zeta) k! f_k \zeta^{-k} e^{x \cdot \zeta} d\zeta \right| \\ & \leq \sum_{j+k=\ell} A^j \exp(h(\ell+1)d + H) \cdot k! B \rho^{-k} (\ell+1)^{-k} d^{-k} \times \\ & \quad \times \exp(|x|(\ell+1)d) \cdot 2\pi \\ & \leq 2\pi e^H B \sum_{j+k=\ell} A^j \cdot (\rho d)^{-k} \exp((h+|x|)(\ell+1)d) \\ & \leq C_R A^\ell \exp((h+|x|)(\ell+1)d) \end{aligned}$$

$T=T_\ell$, d は十分大とすれば $\rho d > A$, 且 C_R は $h, \rho,$
 d に依存する定数である. この評価から $\gamma^{(2)}$ 上の積分は
 $\ell \rightarrow \infty$ と $\epsilon \rightarrow 0$ のとき $|x| < -\frac{\log A}{d}$ ($0 < A < 1$, かつ
 ϵ は $\epsilon > 0$ は任意であることに注意.) まで収束する.

(ii) $\gamma^{(1)}$ 上の積分

$\zeta = (\ell+1)\zeta_0 r$, $|\zeta_0| = d$ と変数

変換すると

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma^{(1)}} \sum_{j+k=\ell} Q_j(x, \zeta) k! f_k \zeta^{-k} e^{x \cdot \zeta} d\zeta \right| \\ & \leq \int_1^\infty \sum_1^\infty A^j \exp((h + \operatorname{Re} x \cdot \zeta_0)(\ell+1)r \cdot d + H) k! B \rho^{-k} (\ell+1)^{-k} d^{-k} r^{-k-1} dr \end{aligned}$$

$$\leq e^{HB} \sum_{j+k=l} A^j (pd)^{-k} \int_1^{\infty} \exp((h + \operatorname{Re} x \cdot \zeta_0)(l+1)r \cdot d) dr$$

指数函数の積分は $h + \operatorname{Re} x \cdot \zeta_0 < 0$ ならば x については収束して
上式は

$$\leq C_R A^l \cdot (|h + \operatorname{Re} x \cdot \zeta_0| (l+1)d)^{-1} \exp((h + \operatorname{Re} x \cdot \zeta_0)(l+1)d)$$

と評価される。 h は任意だから結局 $\gamma^{(1)}$ 上の積分は l につ
いて和をとるとき $\operatorname{Re} x \cdot \zeta_0 < 0$ であるコンパクト一様収束する。

同様に $\gamma^{(3)}$ 上の積分は $\zeta'_0 \in \gamma^{(3)}$ の起点として $\operatorname{Re} x \cdot \zeta'_0 < 0$ である
コンパクト一様収束する。

(i), (ii) より $\Gamma' = \{x \mid \operatorname{Re} x \cdot \zeta_0 < 0, \operatorname{Re} x \cdot \zeta'_0 < 0\}$ と
おくと (5) は $\Gamma' \cap \{|x| < -\log A/d\}$ であるコンパクト一
様収束する。 u が「実際解」であることを見よう。(5) における積
分路 γ は評価を導くために l に依存して選んだが「実際」には
積分の値は被積分函数の正則域で「変形可能」だから一定に取
れる。従って (5) は

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j,k} \int_{\gamma} Q_j(x, \zeta) k! f_k \zeta^{-k-1} e^{x \cdot \zeta} d\zeta$$

とかいえる。この両辺に $P(x, D)$ を作用させると

$$P(x, D)u(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j,k} \int_{\gamma} k! f_k \zeta^{-k-1} P(x, D)(Q_j(x, \zeta) e^{x \cdot \zeta}) d\zeta$$

$P(x, D) (Q_j(x, \zeta) e^{x\zeta})$ を作用素としての結合 $P(x, D) Q(x, \zeta)$
 (ζ は $1/\alpha x - \eta$ とおくと) を $e^{x\zeta}$ に作用したものとみなすと Leibniz
 則より

$$\begin{aligned} & P(x, D) (Q_j(x, \zeta) e^{x\zeta}) \\ &= \quad \therefore \sum_m \frac{1}{m!} \partial_\zeta^m P(x, \zeta) \partial_x^m Q_j(x, \zeta) : e^{x\zeta} \\ &= \sum_m \frac{1}{m!} \partial_\zeta^m P(x, \zeta) \cdot \partial_x^m Q_j(x, \zeta) e^{x\zeta} \end{aligned}$$

ただし ζ は形式表象の束縛変数, \therefore は正規積を表わす
 ([A.1] 4: 参照) また, P が微分作用素であることから
 この和は収束している. よって

$$\begin{aligned} & P(x, D) u(x) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j,k} \int_\gamma \sum_m \frac{1}{m!} \partial_\zeta^m P(x, \zeta) \cdot \partial_x^m Q_j(x, \zeta) k! f_k \zeta^{-k-1} e^{x\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_k \sum_{j,m} \int_\gamma \frac{1}{m!} \partial_\zeta^m P(x, \zeta) \cdot \partial_x^m Q_j(x, \zeta) k! f_k \zeta^{-k-1} e^{x\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_k \sum_l \int_\gamma \sum_{j+m=l} \frac{1}{m!} \partial_\zeta^m P(x, \zeta) \partial_x^m Q_j(x, \zeta) k! f_k \zeta^{-k-1} e^{x\zeta} d\zeta \end{aligned}$$

$$(3) \text{より} \quad \sum_{j+m=l} \frac{1}{m!} \partial_\zeta^m P(x, \zeta) \partial_x^m Q_j(x, \zeta) = \begin{cases} 1 & l=0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases}$$

であるから結局

$$\begin{aligned}
 P(x, D)u(x) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma} k! f_k \zeta^{-k-1} e^{x\zeta} d\zeta \\
 &= \sum_k f_k x^k \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって定理 2 が示された。

3. 局所可解性

定理 2 およびその証明からただちに次の定理が得られる。

定理 3. 定理 2 と同じ仮定のもとに $P: \mathcal{O}_0 \rightarrow \mathcal{O}_0$ は全射である。即ち方程式 (1) は局所的に可解である。

証明 $v_0 \in -v_0 \in \Gamma'$, $|v_0| < \varepsilon$ (ε 十分小) に選ぶ。
 v_0 を原点にとり直して定理 2 を適用する。定理の仮定は微小な平行移動だけだから問題ない。この時 f の新しい原点における Taylor 展開の収束半径は少なくとも $\rho - \varepsilon$ 。従って定理 2 を適用して構成される解は $(P' + v_0) \cap \{|x - v_0| < -\log A/d\}$ で収束。これが (もとの) 原点を含んでいるならば、それは ε を十分小さく ($\varepsilon < \rho |\log A| / (1 + |\log A|)$ と十分) とれば可能である。よって定理が示された。

参考文献

- [A₁] Aoki, T., Symbols and formal symbols of pseudo-differential operators, *Adv. Studies in Pure Math.*, 4 (1984), 181-208
- [A₂] —, Calcul exponentiel des opérateurs micro-différentiels d'ordre infini, I, II. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, I : 33-4 (1983), 227-250, II : à paraître.
- [A₃] —, 無限階擬微分作用素の逆の構成について.
RIMS 講究録「偏微分方程式系の局所・非局所変換理論」
1=42 録予定.
- [A-K-K] Aoki - Kashiwara - Kawai, On a class of linear differential operators of infinite order with finite index, RIMS-499 (to appear in *Adv. in Math.*)
- [I₁] Ishimura, R. Théorèmes d'existence et d'approximation pour les équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre infini, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 16 (1980), 393-415
- [I₂] —, Existence locale de solutions holomorphes pour les équations différentiels d'ordre infini, à paraître dans *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*.

[I₃] —, 無限階微分方程式の局所可解性, 当講究録
1 = 収録

[M] Martineau, A. Equations différentiels d'ordre
infini, Bull. Soc. math. France, 95 (1967),
109 - 154.

(1985年8月記)
