数理解析研究所講究録
578巻 1985年 1-20

無限階微分方程式の局所可解性

九大 理　石村隆一

ISHIMURA, Ryuichi

0. 序

X を $\mathbb{C}^n$ の開集合，x_0 を X の点とし，x_0 における正則函数の芽の全体を $\mathcal{O}_{x_0}$，X 上の正則函数の層を $\mathcal{O}_X$ と書く．層準同型 $P : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ のうちで《連続》なものは局所作用素として特徴づけられる（[5]）：
P は無限階微分作用素 $P(x, D_x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_\alpha(x) D_x^\alpha$，$a_\alpha(x) \in \mathcal{O}(X)$ の形であって，表象 $p(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ は $X \times \mathbb{C}^n$ で正則かつ，$x \in X$ について一様に，ξ についての整函数として指数型 0 である i.e. X の任意のコンパクト集合 K に対し，$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, r^{-1} \ln \sup_{x \in K, |\xi| = 1} |p(x, r\xi)| = 0$．

ここでは先ずもう少し一般的に，連続な線型写像 $P : \mathcal{O}_{x_0} \to \mathcal{O}_{x_0}$ とは何か，ということを考えることから始め，それがやはり無限階の微分作用素の形になることを見る．さて，一方無限階の微分方程式

(0)　$P(x, D_x) u = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha u = f$　$(u, f \in \mathcal{O}_{x_0})$

について，その重要性と歴史については青木[1]に記されているが，そこにあるように，何れの場合も従来は定数係数の場合が殆んどであった．

しかし，変数係数の場合についてごく最近になって，[6] で扱ったようないくつかの型の方程式や，代数的に特殊な型で，かつ有限指数をもつ（青木-柏原-河合 [3]）作用素で定義された方程式については，(0)の局所可解性が証明されるようになってきた。ここでは，前記のような拡張された無限階微分作用素について，微分方程式 (0) の局所可解性を考える．以下では $x=0$ として考えることにする．

1. 一点における微分作用素

先ず記号を準備する：$\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$ に対し，次のように書く．

$$\xi\cdot\eta := (\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \cdots, \xi_n\eta_n) \quad ,$$

$$\vec{\xi}^{-1} := (\xi_1^{-1}, \xi_2^{-1}, \cdots, \xi_n^{-1}) \qquad 但し \quad \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \neq 0 ,$$

$$\overrightarrow{|\xi|} := (|\xi_1|, |\xi_2|, \cdots, |\xi_n|) \quad . \quad ここで \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \text{ etc.}$$

また，$r, \rho \in \mathbb{R}_+^n$ に対し，$r \leq \rho$ とは $r_1 \leq \rho_1, r_2 \leq \rho_2, \cdots, r_n \leq \rho_n$ ということであり，$r \ll \rho$ と書いたら $r_1 < \rho_1, r_2 < \rho_2, \cdots, r_n < \rho_n$ を意味する．$\vec{e} := (1, 1, \cdots, 1)$ とおく．$r \gg 0$ に対し，原点中心の多重円板 $\Delta_r := \{x \in \mathbb{C}^n \mid |x_1| < r_1, |x_2| < r_2, \cdots, |x_n| < r_n\}$ と書き，$\|f\|_r := \sup_{x\in\Delta_r} |f(x)|$ として $H_r^\infty := \{f \in \mathcal{O}(\Delta_r) \mid \|f\|_r < +\infty\}$ とおけば，これはノルム $\|\cdot\|_r$ で Banach 空間になる．すると (DFS) 空間として $\mathcal{O}_0 = \varinjlim_r H_r^\infty$ である．さて，$P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ を連続な線型写像として $\forall \mu \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し，

(1) $$b_\mu(x) = P\left(\frac{x^\mu}{\mu!}\right)$$

とおく．以下 $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ は連続線型写像とする．

補題 1. 増加函数 $\rho : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ があって，任意の $r \in \mathbb{R}_+^n$ に対し，P は連続線型写像（P と書く）$: H_r^\infty \to H_{\rho(r)}^\infty$ を定める．

（証明）．H_r^∞ での単位球を B_r で表わすと，B_r は $\mathcal{O}_0 = \varinjlim_t H_t^\infty$ の有界集合．従って任意の $r >> 0$ に対し $\rho = \rho(r) \in \mathbb{R}_+^n$ があって，PB_r は $H_{\rho(r)}^\infty$ の中に含まれてそこで有界（小松［9］，定理（IV.3.28））：定数 $C_r > 0$ があって，

(2) $$PB_r \subset C_r B_{\rho(r)} \quad .$$

B_r は H_r^∞ で吸収的だから，結局 $P : H_r^\infty \to H_{\rho(r)}^\infty$ で P は連続．かつ明らかに ρ は増加函数としてよい．（証終）．

特に，ある $\rho_0 \in \overline{\mathbb{R}_+}^n$ があって，各 $b_\mu(x) \in H_{\rho_0}^\infty \subset \mathcal{O}(\Delta_{\rho_0})$．但し，$\overline{\mathbb{R}_+} :=]0, \infty]$．また明らかに $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ は $f \mapsto \sum_\mu b_\mu(x) D_x^\mu f(0)$：$H_r^\infty \to H_{\rho(r)}^\infty$ で定義されるとしてよい：実際 $f \in H_r^\infty$ に対し，その Taylor 展開 $f(x) = \sum_\mu \frac{x^\mu}{\mu!} D_x^\mu f(0)$ を考えればよい．

(2)より，$\|Pf\|_{\rho(r)} \leq C_r \|f\|_r$ であるから，特に各 μ に対し，

(3) $$\|b_\mu\|_{\rho(r)} \leq C_r \frac{r^\mu}{\mu!} \qquad (\forall r >> 0) \quad .$$

さて，そこで $x \in \Delta_{\rho_0}$ と $\zeta \in \mathbb{C}^n$ に対し，形式的に $Q(x, \zeta) := \sum_\mu b_\mu(x) \zeta^\mu$ とおこう．この時，

補題 2. $Q(x, \zeta)$ は $\Delta_{\rho_0} \times \mathbb{C}^n$ で正則で，各 $x \in \Delta_{\rho_0}$ に対して，ζ の整函数として階数 ≤ 1 である．更に associated order ρ と associated type σ の組で $\rho \leq \vec{e}$，$\sigma << (+\infty, +\infty, \cdots, +\infty)$ となるものがある．即ち $Q(x, \cdot)$ は指数型である．

注意. associated order ρ と associated type σ の組 (ρ, σ) を associated category と呼ぶ. 以上の用語については Ронкин [13] 参照.

(証明) 実際, (3) より, $x \in \Delta_{\rho(r)}$ とくて,

$$|Q(x,\zeta)| \leq \sum_\mu \|b_\mu\|_{\rho(r)} |\vec{\zeta}|^\mu \leq C_r \sum_\mu \frac{r^\mu}{\mu!} |\vec{\zeta}|^\mu$$

$$= C_r \exp\langle r, |\vec{\zeta}|\rangle \leq C_r \exp |r|\cdot|\zeta| \qquad \text{(証終)}$$

この補題を念頭に, 今 $Q(x,\zeta) = \sum_\mu b_\mu(x)\zeta^\mu$ は 各 $x \in \Delta_{\rho_0}$ に対し associated category $\leq (\vec{e}, \sigma(x))$ をもつとしよう. 但し, $\sigma(x) = (\sigma_j(x)) \gg 0$. 即ち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $A_\varepsilon > 0$ があって,

$$|\sum_\mu b_\mu(x)\zeta^\mu| = |Q(x,\zeta)| \leq A_\varepsilon \exp\langle \varepsilon\vec{e} + \sigma(x), |\vec{\zeta}|\rangle .$$

従って任意の $R >> 0$ に対し, Cauchy の評価式から

$$|b_\mu(x)| \leq A_\varepsilon e^{\langle \varepsilon\vec{e}+\sigma(x), R\rangle} R^{-\mu},$$

ここで $R := (\varepsilon e + \sigma(x))^{-1}\cdot\mu$ とおけば,

$$|b_\mu(x)| \leq A_\varepsilon \frac{e^{|\mu|}}{\mu_1^{\mu_1}\mu_2^{\mu_2}\cdots\mu_n^{\mu_n}} (\varepsilon\vec{e} + \sigma(x))^\mu$$

となる. 従って

$$\sup_\mu |b_\mu(x)|\,\mu!\, s^\mu < +\infty \qquad \text{for every } s << (\varepsilon\vec{e} + \sigma(x))$$

であり, $\varepsilon > 0$ は任意だから, 結局 for $s << \sigma(x)$ で成立つ. 従って

$$\rho : H_r^\infty \to \mathcal{O}(\{x \in \Delta_{\rho_0} \mid \sigma(x) << r\}) \quad \text{連続}$$

で また任意の $r >> \sigma(x)$ に対し 定数 $C_r > 0$ があって

(3)' $$|b_\mu(x)| \leq C_r \frac{r^\mu}{\mu!} \qquad (\forall \mu).$$

ここで我々は 正則パラメータ $x \in \Delta_{\rho_0}$ をもつ ζ の整函数 $P = \sum_\alpha a_\alpha(x)\zeta^\alpha$ を

(4) $$P(x,\zeta) := Q(x,\zeta)\exp(-\langle x,\zeta\rangle)$$

と定義する．これは各 α に対し，

(4)' $$a_\alpha(x) = \sum_{\mu\le\alpha} \frac{b_\mu(x)}{(\alpha-\mu)!}(-x)^{\alpha-\mu}$$

と云ってもよい．$P(x,\xi)$ は ξ について指数型である．

注意．逆に各 μ に対し次の逆公式を得る：

(4)'' $$b_\mu(x) = \sum_{\alpha\le\mu}\frac{a_\alpha(x)}{(\mu-\alpha)!}x^{\mu-\alpha} .$$

以上のことより，次の定理を得る：

定理1．連続線型写像 $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ に対し，$b_\mu(x) := P(\frac{x^\mu}{\mu!})$ とおくと，$\rho_0 >> 0$ があって $Q(x,\xi) = \sum_\mu b_\mu(x)\xi^\mu$ は $x\in\Delta_{\rho_0}$ と $\xi\in\mathbb{C}^n$ の正則函数で，各 $x\in\Delta_{\rho_0}$ に対し，ξ の整函数として指数型である．そこでその associated category $\le(\vec{e},\sigma(x))$ なるものがあって，$\sigma(x) = (\sigma_j(x))_{1\le j\le n}$ として各 $\sigma_j(x)$ は x について上半連続とする．この時 P は任意の $r>>0$ に対し，$P : \mathcal{O}(\Delta_r)\to\mathcal{O}(\{x\in\Delta_{\rho_0} \mid \sigma(x) << r\})$ なる連続写像であり，かつ作用素：$\mathcal{O}(\Delta_r)\to\mathcal{O}(\{x\in\Delta_{\rho_0}\mid\sigma(x)+2|\vec{x}| << r\})$ として微分作用素 $P(x,D_x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ の形である．

(証明)．まず各 $\sigma_j(x)$ は上半連続として構わないことは，かわりに $\lim_{\eta\to 0}\sup_{|x-y|<\eta}\sigma_j(y)$ なる函数を考えればよいから明らか．そこで，各 α に対し (4)' 及び (3)' から，任意の $\rho >> \sigma(x)$ に対し，

$$|a_\alpha(x)| \le \sum_{\mu\le\alpha}\frac{|\vec{x}|^{\alpha-\mu}}{(\alpha-\mu)!}|b_\mu(x)| \le C_\rho\sum_{\mu\le\alpha}\frac{|\vec{x}|^{\alpha-\mu}}{(\alpha-\mu)!}\cdot\frac{\rho^\mu}{\mu!}$$
$$= C_\rho\frac{1}{\alpha!}(\rho+|\vec{x}|)^\alpha .$$

次に，各 $f\in H_r^\infty$ と各 $x\in\Delta_{\rho_0}$ で $\sigma(x)+2|\vec{x}| << r$ なるものに対し，

$$|D_x^\alpha f(x)| \leq \|f\|_r \, (r-|\vec{x}|)^{-\alpha}\, \alpha!$$

だから，結局

$$\sum_\alpha |a_\alpha(x) D_x^\alpha f(x)| \leq C_\rho \|f\|_r \sum_\alpha \frac{(\rho+|\vec{x}|)^\alpha}{(r-|\vec{x}|)^\alpha} < +\infty$$

が $\rho+|\vec{x}| << r-|\vec{x}|$ の時，従って $\sigma(x)+2|\vec{x}| << r$ の時成立つ．

次に，$\bar{P} := \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha$ とおけば，それはすぐわかるように連続写像 $: \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ となる．特に $f := 1$ と取れば，$\bar{P}f = a_0 = b_0 = Pf$．

また $f := x^m/m!$ と取れば帰納法で

$$\bar{P}\left(\frac{x^m}{m!}\right) = \frac{1}{m!}\sum_{\alpha\leq m} a_\alpha(x) \frac{m!\,x^{m-\alpha}}{(m-\alpha)!} = b_m(x) = P\left(\frac{x^m}{m!}\right).$$

従って連続性から $P=\bar{P}$ 即ち $P = \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha$ である．（証終）．

<u>系</u>．$Q(x,\xi)$ はある $\sigma >> 0$ に対し，associated category $\leq (\vec{e}, \sigma|\vec{x}|)$ をもつとしよう．すると，$P : \mathcal{O}(\Delta_r) \to \mathcal{O}(\Delta_{\sigma^{-1}\cdot r})$ (for every $r >> 0$) であり，かつ P は作用素 $: \mathcal{O}(\Delta_r) \longrightarrow \mathcal{O}(\Delta_{(2\vec{e}+\sigma)^{-1}\cdot r})$ として微分作用素 $P(x, D_x) = \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha$ の形である．

<u>注意</u>．以上より，結局，層準同型を与えないような無限階微分作用素の表象は，簡単の為 $n=1$ として，階数 1，正規型ということになる．

<u>2. 例</u>

ここでは，$r >> 0$ に対し，$r^{\frac{1}{2}} = (r_1^{\frac{1}{2}}, r_2^{\frac{1}{2}}, \cdots, r_n^{\frac{1}{2}})$ と書く．

1° $\sigma(x) = \sigma\cdot|\vec{x}|^{\frac{1}{2}}$ with $\sigma >> 0$．

この場合，

$$P : f(x) \mapsto \sum_{m} b_m(x) D_x^m f(0) : \mathcal{O}(\Delta_r) \to \mathcal{O}(\Delta_{r^2}) \quad (r>>0)$$

かつ，

$$\sum_{\alpha} a_\alpha(x) D_x^\alpha : \mathcal{O}(\Delta_r) \to \mathcal{O}(\Delta_{\frac{-\sigma+\sqrt{\sigma^2+8r}}{4}}) \ .$$

2° $\sigma(x) = \sigma \cdot |\vec{x}|^{\frac{1}{2}} - 2|\vec{x}| \quad (\sigma>>0)$.

この時，

$$P : \mathcal{O}(\Delta_r) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C}^n) \qquad \text{if } r << \frac{\sigma}{\sqrt{8}}$$

$$P : \mathcal{O}(\Delta_r) \longrightarrow \mathcal{O}(\Delta_{\frac{\sigma-\sqrt{\sigma^2-8r}}{4}}) \qquad \text{if } r \geqq \frac{\sigma}{\sqrt{8}}$$

かつ

$$\sum_{\alpha} a_\alpha(x) D_x^\alpha : \mathcal{O}(\Delta_r) \to \mathcal{O}(\Delta_{\sigma-2r^2}) \ .$$

3° $\sigma(x) \equiv 0$.

この時，$Q(x,\xi) \equiv \text{const.}$; $\equiv 1$ としよう．すると，$P(x,\xi) = \exp(-\langle x,\xi \rangle)$，

$$P : f(x) \longmapsto f(0) \ ; \mathcal{O}(\Delta_r) \longrightarrow \mathbb{C}$$

となる．また実際

$$\sum_{\alpha} a_\alpha(x) D_x^\alpha f(x) = \sum_{\alpha} \frac{(-x)^\alpha}{\alpha!} D_x^\alpha f(x) = f(0) \ .$$

4° $P(x,\xi)$ が ξ について指数型 0 の時．

この時，$Q(x,\xi) = e^{\langle x,\xi \rangle} P(x,\xi)$ は associated category $(\vec{e}, |\vec{x}|)$ をもつ．

3. 無限階微分方程式

さて，以下では $Pu = f$ の $x=0$ での局所可解性，即ち，$P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ の全射性を考えることにする．これからは，ρ, R, r などはスカラーを表わすとする．

さて，$\mathbb{C}^n$上の$\{0\}$に関する正則超函数の全体（S.K.K.［14］）

$$\mathcal{B}^{\infty}_{\{0\}|\mathbb{C}^n} = \mathcal{H}^n_{\{0\}}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = \Big\{u=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} u_\alpha \delta^{(\alpha)}(x) \;\Big|\; \sum_\alpha u_\alpha z^\alpha \text{ は指数型}0\text{の整函数}\Big\}$$

は（FS）空間であるが，ここでは次のことにだけ注意しておく：

$$(5)\qquad x^\beta \delta^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} (-1)^{|\beta|}\dfrac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}\,\delta^{(\alpha-\beta)}(x) & (\beta\leq\alpha) \\ 0 & (\beta\not\leq\alpha) \end{cases}.$$

更にそれは次の内積によって（DFS）空間$\mathcal{O}_0$に双対な（FS）空間と同一視される：任意の$f=\sum_\gamma f_\gamma x^\gamma\in\mathcal{O}_0$と$u=\sum u_\alpha\delta^{(\alpha)}(x)\in\mathcal{B}^{\infty}_{\{0\}|\mathbb{C}^n}$に対し，

$$(6)\qquad \langle f,u\rangle = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|}\alpha!\, f_\alpha u_\alpha \qquad (\text{K.K. [7]}).$$

さて，$\mathcal{O}_0$を更にその各元のTaylor展開の係数の成す空間

$$E := \Big\{\varphi=(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}_+^n} \;\Big|\; \sum_m \varphi_m \frac{x^m}{m!}\in\mathcal{O}_0\Big\}$$

と同一視する i.e. $f\mapsto (D^m f(0))_m : \mathcal{O}_0 \xrightarrow{\sim} E$．その位相を一応書いておこう：$\varphi=(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}_+^n}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+^n}$に対し，norm

$$\|\varphi\|_\rho := \sup_m |\varphi_m|\,\rho^{-|m|}(m!)^{-1} \qquad (\rho>0)$$

とおき Banach 空間 $E_\rho := \{\varphi=(\varphi_m) \mid \|\varphi\|_\rho<+\infty\}$ と定義して

$$E \simeq \varinjlim E_\rho = \{\varphi=(\varphi_m) \mid \rho>0\text{が存在して } \|\varphi\|_\rho<+\infty\}.$$

（DFS）空間として $\mathcal{B}^{\infty}_{\{0\}|\mathbb{C}^n} \simeq E' = \{\psi=(\psi_m) \mid \text{任意の}\rho>0\text{に対し，}\|\psi\|'^{\rho} := \sup_m |\psi_m|\,\rho^{|m|} m! < +\infty\}$ となり，E'の位相は semi-norm の系$(\|\cdot\|^\rho)_{\rho>0}$で与えられる．そして，$E$と$E'$の双対性は $\langle\varphi,\psi\rangle := \sum\varphi_m\psi_m$ で与えられる．同一視 $\mathcal{B}^{\infty}_{\{0\}|\mathbb{C}^n} \xrightarrow{\sim} E'$ は Fourier-Borel 変換であり，それを$\mathfrak{F}$と書けば，$\mathfrak{F}$は次のように表わされる．但し，ここでE'は

指数型0の整函数の空間 $\{\sum_\mu \varphi_\mu z^\mu \mid \varphi=(\varphi_\mu)\in E'\}$ と同一視する:

(7) $$\mathcal{F}(u)(z) = \langle e^{\theta\cdot z}, u(\theta)\rangle \qquad (z\in\mathbb{C}^n).$$

そこで転置写像 ${}^tP : \mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n} \longrightarrow \mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n}$ は

$${}^tPu = {}^tP(x,D_x)u = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_\alpha(x)u(x)) = \sum_\mu (-1)^{|\mu|}\langle b_\mu, u\rangle \delta^{(\mu)}(x)$$

で与えられるから, ${}^tP : E'\longrightarrow E'$ と思ってみれば,

(7)' $$\mathcal{F}({}^tPu) = P(D_z, z)(\mathcal{F}u)(z) := \sum_\alpha z^\alpha a_\alpha(D_z)(\mathcal{F}u)(z).$$

さて, 同一視 $\mathcal{O}_0 \simeq E$ によって $P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ はどうなるか見る: 各 α に対し, $a_\alpha(x)=\sum_\beta a_\alpha^\beta x^\beta$ と展開する. 任意の $f=\sum_\alpha f_\alpha x^\alpha\in\mathcal{O}_0$ に対し,

$$Pf(x) = \sum_\mu b_\mu(x) D^\mu f(0) = \sum_\mu \Big(\sum_{\alpha\le\mu} \frac{x^\alpha}{\alpha!}\sum_\beta a^\beta_{\mu-\alpha}x^\beta\Big) D^\mu f(0)$$
$$= \sum_\gamma \Big(\sum_\mu \gamma! \sum_{\alpha\le\gamma,\mu} \frac{a^{\gamma-\alpha}_{\mu-\alpha}}{\alpha!} D^\mu f(0)\Big)\frac{x^\gamma}{\gamma!}$$

ここで $C^\gamma_\mu := \gamma!\sum_{\alpha\le\gamma,\mu}\dfrac{a^{\gamma-\alpha}_{\mu-\alpha}}{\alpha!}$ とおけば

$$= \sum_\gamma \Big(\sum_\mu C^\gamma_\mu\, D^\mu f(0)\Big)\frac{x^\gamma}{\gamma!}.$$

即ち, P に対し, その特性《行列》 $C_P := (C^\gamma_\mu)_{(\mu,\gamma)\in\mathbb{Z}_+^n\times\mathbb{Z}_+^n}$ とおけば, $\mathcal{O}_0\simeq E$ の下 P は C_P と同一視される:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_0 & \xrightarrow{P} & \mathcal{O}_0 \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ E & \xrightarrow{C_P} & E \\ \cup\!\!\!\! & & \cup\!\!\!\! \\ (\varphi_\mu) & \longmapsto & (\sum_\mu C^\gamma_\mu \varphi_\mu)_\gamma \end{array} \qquad \text{また} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n} & \xrightarrow{{}^tP} & \mathcal{B}^\infty_{\{0\}|\mathbb{C}^n} \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ E' & \xrightarrow{{}^tC_P} & E' \\ \cup\!\!\!\! & & \cup\!\!\!\! \\ (\psi_\gamma) & \longmapsto & (\sum_\gamma C^\gamma_\mu \psi_\gamma)_\mu \end{array}.$$

さて, $P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ が全射である為の必要十分条件は次の2つが同時に成立つことである:

(i) ${}^tC_P : E'\longrightarrow E'$ は単射.

(ii) 像 $C_P(E)$ は E で閉である.

(DFS)空間と(FS)空間の双対性においては閉値域の定理が成立つ(小松[9])から，(i)は更に次と同値である：

(i)′　像 ${}^tC_P(E')$ は E' で閉である.

そこで，まず(i)が成立たねばならないから《行列》C_P は，その形の見易いものを扱うことになる. C_P の形次第で (i) 又は (i)′ を考える：

例 I. C_P が《上三角行列》になる：

$P = P(x, D_x) = \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha$ は係数 $a_\alpha(x)$ が α《階》以下の多項式である時，Коровейник型と云おう. これは Коровейник [10] がこの型の作用素を最初に扱ったことによる： $a_\alpha(x) = \sum_{\beta \le \alpha} a_\alpha^\beta x^\beta$.

注意. 但し，[10] では $n=1$，$a_0 \equiv 1$，$a_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} a_\alpha^\beta x^\beta$ を扱っており，かつ考える方程式 $Pu = f$ で u と f は整函数.

さて，この時には，

$$C_m^\gamma = \begin{cases} \gamma! \displaystyle\sum_{\alpha \le \gamma} \frac{a_{m-\alpha}^{\gamma-\alpha}}{\alpha!} & (\gamma \le m) \\ 0 & (\gamma \not\le m) \end{cases}$$

と C_P は《上三角行列》. 従って各対角成分 $C_m^m \neq 0$ とすれば，${}^tC_P : E' \to E'$ は単射である. 特に，P が定数係数 $\sum_\alpha a_\alpha D_x^\alpha$ の時は，

$$C_P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ & & a_0 & a_1 & \cdots \\ & 0 & & a_0 & \cdots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

例 II. C_P が《下三角行列》になる：

$P = P(x, D_x) = \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha$ は各係数 $a_\alpha(x)$ が $= x^\alpha \tilde{a}_\alpha(x)$ の形の

時，<u>確定特異型</u> であるという．この場合，

$$C^{\gamma}_{m} = \begin{cases} 0 & (\gamma \neq m) \\ \gamma! \displaystyle\sum_{\alpha\le m} \frac{a^{\gamma-\alpha}_{m-\alpha}}{\alpha!} & (\gamma \geq m) \end{cases}$$

と C_P は《下三角行列》．従って対角成分 $C^{m}_{m} \neq 0$ $(\forall m)$ とすれば，

$\psi\in E$ に対し，$C_P(\varphi_m)=\psi$ は一意な形式解 $\varphi=(\varphi_m)$ を持つ．

特に，$P=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha$ の形の時，P は <u>Euler型</u> であるという．この時，

$$C_P = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ & 1!\left(\frac{a_0}{1!}+a_1\right) & & \text{\Large 0} & \\ & & 2!\left(\frac{a_0}{2!}+\frac{a_1}{1!}+a_2\right) & & \\ & \text{\Large 0} & & 3!\left(\frac{a_0}{3!}+\frac{a_1}{2!}+\frac{a_2}{1!}+a_3\right) & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

例えば定数係数 $P=\sum a_\alpha D_x^\alpha$ の場合を振返ってみよう（cf. 河合[8]，Martineau [12]）．$\chi=(\chi_m)\in E'$，$\psi=(\psi_m)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ として，

${}^{t}C_P\,\psi=\chi$ が形式的に成立つとすると， $\chi_m=\sum_{\gamma\le m} a_{m-\gamma}\psi_\gamma$ $(\forall m)$

となるが，これは，$X(\zeta):=\sum_m \chi_m\zeta^m$， $\Psi(\zeta):=\sum_m \psi_m\zeta^m\in\mathbb{C}[[\zeta]]$ と

おいて（但し，$X(\zeta)$ は指数型0の整函数）， $X(\zeta)=P(\zeta)\Psi(\zeta)$ ということ．

従って，$P\neq 0$ なら ${}^{t}C_P$ は単射である．さて，$P(\zeta)$ は指数型0としよう．次の Harnack 型の補題は基本的である：

<u>補題</u> 3．(Hörmander [4])． $A, B, R>0$ とし，$F(z), G(z)$，$F(z)/G(z)$ を $B_R:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<R\}$ 上の(一変数)正則函数で，$|G(0)|\neq 0$ かつ $|F(z)|$ と $|G(z)|$ は B_R 上で夫々 A, B で上からおさえ

られるとする： $\sup_{B_R}|F(z)|\le A$，$\sup_{B_R}|G(z)|\le B$.

この時，B_R 上で

$$\left|\frac{F(z)}{G(z)}\right|\le A\cdot B^{\frac{2|z|}{R-|z|}}\,|G(0)|^{-\frac{R+|z|}{R-|z|}}.$$

そこで，E' の列 (φ^R) と (χ^R) で E' で $\chi_R\to\chi$ $(R\to\infty)$ なるものに対し，${}^tC_P\varphi^R=\chi^R$ であるとすると，この補題から，$(\Phi^R(\zeta))$ は $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ での正規列となり，ある部分列 $(\Phi^{R_k}(\zeta))$ があって ある $\Phi(\zeta)$ に $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ 内で収束する．そこでもう一度この補題を使って $\Phi(\zeta)\in E'$ がいえる．i.e. 対応する $\varphi=(\varphi_\alpha)\in E'$ で 結局 (5)' がいえる．

4. Коровейник 型作用素の全射性.

$P=\sum_\alpha a_\alpha(x)D_x^\alpha=\sum_\alpha\sum_{\beta\le\alpha}a_\alpha^\beta x^\beta D_x^\alpha$ を Коровейник 型とすれば，例I より C_P は上三角行列である．そこで次の定理を証明する：

<u>定理</u> 2. 次の条件 (7), (8) の下 $P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ は全射である：

(7) $A_0>0$ 及び $r_0\in]0,1[$ が存在して，各 μ に対し，

$$|C_\mu^\mu|\ge A_0 r_0^{|\mu|}.$$

(8) $r\in]0,r_0[$ が存在し，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$A>0$ があって，

$$|C_\mu^\lambda|\le A\frac{\lambda!}{\mu!}\varepsilon^{|\mu-\lambda|}r^{|\lambda|}\qquad(\text{for }\lambda<\mu).$$

また

<u>定理</u> 3. 次の条件 (9), (10) の下 $P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ は全射である：

(9) 任意の $A_0>0$ に対し，$m_0>0$ があって，$|\mu|\ge m$ ならば

$$|C_\mu^\mu|\ge A_0.$$

(10) 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $A_\varepsilon>0$ があって,

$$|C_\mu^\lambda| \leq A_\varepsilon \frac{\lambda!}{\mu!} \varepsilon^{|\mu-\lambda|} \qquad (\text{for } \lambda<\mu).$$

(定理2の証明). (7)より 各 $C_\mu^\mu \neq 0$ であるから(i) は O.K. 次に,

$(\psi^k), (\chi^k) \subset E'$, $\chi^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \chi$ in E' かつ

(11) $${}^tC_p \psi^k = \chi^k \qquad (\text{for every } k)$$

とする. ここで簡単の為 $\psi^{kk'} := \psi^k - \psi^{k'}$, $\chi^{kk'} := \chi^k - \chi^{k'}$ とおくと, (11)は,

(12) $$\begin{cases} \psi_0^{kk'} = \dfrac{\chi_0^{kk'}}{C_0^0} \\ \psi_\mu^{kk'} = \dfrac{1}{C_\mu^\mu}\left(\chi_\mu^{kk'} - \sum_{\lambda<\mu} C_\mu^\lambda \psi_\lambda^{kk'}\right) \qquad (\mu>0) \end{cases}$$

となる. 帰納法で 任意の $R>0$ に対し, $B^{kk'}(R)>0$ で $k,k'\to\infty$ の時 0に収束するものがあって, $\sup_\mu |\psi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu! < B^{kk'}(R)$ となるものがあることを示そう: (12)と条件(7),(8)より, $|\mu|$ 十分大として

$$|\psi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu!$$

$$\leq \left(|\chi_\mu^{kk'}| R^{|\mu|} \mu! + A \sum_{\lambda<\mu} \lambda!\, r_0^{-|\mu|} \varepsilon^{|\mu-\lambda|} r^{|\lambda|} R^{|\mu|} |\psi_\lambda^{kk'}|\right) A_0^{-1}$$

ここで $X^{kk'}(R) := A_0^{-1} \sup_\lambda |\chi_\lambda^{kk'}| R^{|\lambda|} \lambda!$ とおけば $X^{kk'}(R) \to 0$ $(k,k'\to\infty)$.

$B^{kk'}(R) > 2X^{kk'}(R)$ ととっておけば, 更に, $\varepsilon < rR^{-1}$ ととっておいて,

$$\leq X^{kk'}(R) + \frac{A}{A_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|\mu|} \sum_{\lambda<\mu} \left(\frac{\varepsilon R}{r}\right)^{|\mu-\lambda|} |\psi_\lambda^{kk'}| R^{|\lambda|} \lambda!$$

$$\leq X^{kk'}(R) + \frac{A}{A_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{|\mu|} \frac{\frac{\varepsilon R}{r}}{\left(1-\frac{\varepsilon R}{r}\right)^n} B^{kk'}(R)$$

$|\mu|$ 十分大とすれば

$$\leq X^{kk'}(R) + \frac{1}{2} B^{kk'}(R) < B^{kk'}(R).$$

かくして (ψ^k) は E' の Cauchy列 となり 結局 ある $\psi\in E'$ に収束する.

よって (ii) が証明された. (証終)

（定理3の証明）．定理2の証明と同様にして，まず $\varepsilon < R^{-1}$ に対し，

$A_0 > A e \dfrac{2\varepsilon R}{(1-\varepsilon R)^n}$ ととって，対応する m に対し $|\mu| \geq m$ とすれば，

$$|\psi_\mu^{RR'}| R^{|\mu|} \mu! \leq X^{RR'}(R) + \frac{A}{A_0} \sum_{\lambda < \mu} \lambda! \, \varepsilon^{|\mu-\lambda|} R^{|\mu|} |\psi_\lambda^{RR'}|$$

$$= X^{RR'}(R) + \frac{A}{A_0} \sum_{\lambda < \mu} (\varepsilon R)^{|\mu-\lambda|} |\psi_\lambda^{RR'}| R^{|\lambda|} \lambda!$$

$$\leq X^{RR'}(R) + \frac{A}{A_0} \frac{\varepsilon R}{(1-\varepsilon R)^n} B^{RR'}(R)$$

$$\leq X^{RR'}(R) + \frac{1}{2} B^{RR'}(R) < B^{RR'}(R)$$

となり，定理2と同様にして証明が終わる．（証終）．

5. 確定特異型作用素の全射性．

確定特異型の微分作用素 $P = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha = \sum x^\alpha \hat{a}_\alpha(x) D_x^\alpha$ に対しては，

定理 4．次の条件 (13)，(14) の下 $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ は全（単）射：

(13) $r \in]0,1[$ 及び $C > 0$ があって，任意の μ に対し，

$$|C_\mu^\mu| \geq C r^{|\mu|}$$

(14) $\varepsilon_0 > 0$ が存在し，任意の $\delta > 0$ に対し $N > 0$ があって

$$|C_\mu^\gamma| \leq N \delta^{|\mu|} \varepsilon_0^{-|\gamma|} \frac{\gamma!}{\mu!} \qquad (\gamma > \mu).$$

（証明）．ここでは，任意の $f = \sum_\gamma f_\gamma x^\gamma \in \mathcal{O}_0$ に対し，$g = \sum_\gamma g_\gamma x^\gamma \in \mathcal{O}_0$ で $Pg = f$ なるものを見付けよう．即ち $\sum_{\mu \leq \gamma} C_\mu^\gamma \frac{\mu!}{\gamma!} g_\mu = f_\gamma$ i.e.

$$(15) \qquad \begin{cases} g_0 = \dfrac{f_0}{C_0^0} \\[2ex] g_\gamma = \dfrac{1}{C_\gamma^\gamma} \left(f_\gamma - \displaystyle\sum_{\mu < \gamma} C_\mu^\gamma \frac{\mu!}{\gamma!} g_\mu \right) & (\gamma > 0) \end{cases}$$

でなければならない．ここである $R > 0$ があって $|g_\gamma| \leq R^{|\gamma|}$ (for every γ) となることを帰納法で示そう：$M_\varepsilon := \sup_{\Delta_\varepsilon} |f(x)|$ とおくと．

$|f_\gamma| \le M_\varepsilon \varepsilon^{-|\gamma|}$. そこで (15) より.

$$|g_\gamma| \le r^{-|\gamma|}\Big[M_\varepsilon \varepsilon^{-|\gamma|} + N\sum_{\mu<\gamma} \delta^{|\mu|}\varepsilon_0^{-|\gamma|} R^{|\mu|}\Big]$$

$$= \Big[M_\varepsilon (r\varepsilon R)^{-|\gamma|} + N\sum_{\mu<\gamma} (r\varepsilon_0 R)^{-|\gamma-\varepsilon|}\Big(\frac{\delta}{r\varepsilon_0}\Big)^{|\mu|}\Big] R^{|\gamma|}$$

$\delta < r\varepsilon_0$ (<1) かつ $R > \max[\delta^{-1}, 2\varepsilon^{-1}M_\varepsilon, (r\varepsilon_0)^{-1}]$ ととれば,

$\dfrac{\delta}{r\varepsilon_0} < 1$, $r\varepsilon_0 R < 1$ だから 結局.

$$\le \Big[\frac{1}{2} + N\sum_{\mu<\gamma}(r\varepsilon_0 R)^{-|\gamma-\mu|}\Big] R^{|\gamma|}$$

$$\le \Big(\frac{1}{2} + N(r\varepsilon R)^{-1}\Big(\frac{1}{1-(r\varepsilon R)^{-1}}\Big)^{n}\Big) R^{|\gamma|}$$

が十分大きい $|\gamma|$ に対して成立つ. R 十分大 >0 なら 結局

$$\le \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big) R^{|\gamma|} = R^{|\gamma|}$$ となる. (証終)

6. Euler 型の方程式

Euler 型の微分作用素 $P = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha$ を考えよう. 先ず.

<u>命題</u> 1. $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ が全射である為には, 次の条件が成立つことが必要十分である :

(16) $\quad r \in]0,1[$ と $C > 0$ が存在して,

$$|C_m^m| \ge C\, r^{|m|} \qquad (\text{for every } m).$$

(証明). $g = \sum_\gamma g_\gamma x^\gamma$, $f = \sum_\gamma f_\gamma x^\gamma \in \mathcal{O}_0$ に対し, $Pg = f$ とは

(17) $\quad C_m^m g_m = f_m \qquad (\text{for every } m)$

ということであるから 何れにしても $C_m^m \neq 0$ である. 先ず (16) を仮定すれば, 任意の $\rho \gg 0$ と $f \in \mathcal{O}(\Delta_\rho)$ に対し, $g_m := f_m / C_m^m$ とおけば $g = \sum_m g_m x^m \in \mathcal{O}(\Delta_{r\rho})$ となり かつ $Pg = f$ である. 逆に, $P : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_0$ が

全射なる。例えば $f=\sum x^\mu \in \mathcal{O}(\Delta_{2})$ に対し，$\exists g=\sum g_\mu x^\mu \in \mathcal{O}_0$ s.t. $Pg=f$ であるから，(17) より $g_\mu = C_\mu^{\mu\,-1}$．そこで $g\in\mathcal{O}(\Delta_{\vec{r}_1})$（但し，$\vec{r}_1 := (r_1, r_1, \cdots, r_1)$ $(r_1>0)$）とすれば任意の $r\in]0, r_1[$ に対し，$C_r>0$ があって，$|C_\mu^\mu|^{-1} = |g_\mu| \leq C_r^{-1} r^{-|\mu|}$．従って $|C_\mu^\mu| \geq C_r r^{|\mu|}$．（証終）．

<u>注意</u>．この時，$P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ は全単射である．

<u>系</u>．$a_0\neq 0$ かつ各 $a_\alpha \geq 0$ とする時，Euler の微分作用素 $P=\sum a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha$ は (16) を満たす．従って $P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ は全単射である．

（証明）実際 $C_\mu^\mu = \mu! \sum_{\alpha\leq\mu} \dfrac{a_\alpha}{(\mu-\alpha)!} \geq a_0 > 0$ である．

以下では $P=\sum a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ は Euler 型の連続層準同型とする．上のことより $x=0$ においては $P:\mathcal{O}_0\to\mathcal{O}_0$ の全射性はわかった．また $x^0\in\mathbb{C}_\times^n$（但し $\mathbb{C}_\times := \mathbb{C}\setminus\{0\}$）なる点においては変数変換

$$(18)\qquad x_1 = e^{t_1},\ x_2 = e^{t_2},\ \cdots,\ x_n = e^{t_n}$$

を行えば

$$(19)\qquad x^\alpha D_x^\alpha = \prod_{j=1}^{n} D_{t_j}(D_{t_j}-1)\cdots(D_{t_j}-(\alpha_j-1))$$

であるから定数係数の場合の結果（Martineau [12] cf. Kawai [8]）より，$P:\mathcal{O}_{x^0}\to\mathcal{O}_{x^0}$ は全射である．また，更に次の定理がわかる：

<u>定理</u> 5．$P=\sum a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha$ を Euler 型の局所作用素とすれば，$P:\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ は全射な線型写像である．

（証明）実際 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，$\varepsilon_j=\pm 1$ として，

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{x\in\mathbb{C}^n \mid \varepsilon_j \operatorname{Im} x_j > 0 \quad (j=1,2,\cdots,n)\}$$

とおくと，$P : \mathcal{O}(\mathcal{U}_\varepsilon) \to \mathcal{O}(\mathcal{U}_\varepsilon)$ は全射である．それは実際，$\mathcal{U}_\varepsilon$ において

$t_j = \log x_j \quad (1\le j\le n)$ と変数変換して，P は定数係数の微分作用素

に変換されるが，この時 $\mathcal{U}_\varepsilon$ は開凸領域

$$\prod_{j=1}^{n}\{t_j\in\mathbb{C} \mid \tfrac{\pi}{2}(\varepsilon_j-1) < \operatorname{Im} t_j < \tfrac{\pi}{2}(\varepsilon_j+1)\}$$

に写ることからわかる．そこで任意の $u\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対し，u は $f_\varepsilon\in\mathcal{O}(\mathcal{U}_\varepsilon)$

でもって $u=\sum_\varepsilon b_{\mathcal{U}_\varepsilon}(f_\varepsilon)$ と書かれるが，$g_\varepsilon\in\mathcal{O}(\mathcal{U}_\varepsilon)$ があって $Pg_\varepsilon = f_\varepsilon$

となるのだから，$v := \sum_\varepsilon b_{\mathcal{U}_\varepsilon}(g_\varepsilon)$ とおけば $Pv = u$ となる．(証終)

従って特に，$P : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \to \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ は全射な層準同型を与える．

さて，次に $x^0\in\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{C}^n_x \setminus \{0\}$ における状態を調べよう．即ち，

例えば，$x_1^0, \cdots, x_m^0 = 0$，$x_{m+1}^0, \cdots, x_n^0 \neq 0$ なる点で考え

たい．そこで簡単の為記号を変えて，

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n), \quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$$

とし (x,y) 変数の Euler 型の局所微分作用素

$$P = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, x^\alpha y^\beta D_x^\alpha D_y^\beta : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m}$$

を考えよう．以下，条件 (16) を仮定し，点 $(x,y)=(0,\eta)$，$\eta_1,\cdots,$

$\eta_m \neq 0$ で考える．変数変換

(18)′ $\quad (x,y)\mapsto(x,t)$; $y_1=\eta_1 e^{t_1}, y_2=\eta_2 e^{t_2}, \cdots, y_m=\eta_m e^{t_m}$

によって，$\tilde{P} = \sum_{\alpha\beta} \tilde{a}_{\alpha\beta}\, x^\alpha D_x^\alpha D_t^\beta : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+m}}$ を $(x,t)=(0,0)$

で考えることになる：任意の $u(x,t)\in\mathcal{B}_{\{0\}|\mathbb{C}^{n+m}}$ に対し，

$$\mathcal{F}_1({}^tPu)(\xi,\tau) = P(D_\xi,\xi,\tau)(\mathcal{F}_1 u)(\xi,\tau)$$

$$:= \sum_{\alpha,\beta} \tilde{a}_{\alpha\beta}\, \zeta^{\alpha} \tau^{\beta} D_{\zeta}^{\alpha} (\mathcal{F}u)(\zeta,\tau)$$

となる．そこで $\tilde{b}_{\mu\beta} := \sum_{\alpha\le\mu} \frac{\tilde{a}_{\alpha\beta}}{(\mu-\alpha)!}$ $(\forall\mu,\beta)$ (c.f. (4)") とおけば，

$(\mathcal{F}u)(\zeta,\tau) = \sum_{\mu,\lambda} u_{\mu\lambda}\zeta^{\mu}\tau^{\lambda} \in E'$ に対し，

$$\mathcal{F}({}^tPu)(\zeta,\tau) = \sum_{\mu,\lambda,\beta} \mu!\,\tilde{b}_{\mu\beta}\, u_{\mu\lambda}\zeta^{\mu}\tau^{\lambda+\beta}$$
$$= \sum_{\mu}\Big(\sum_{\beta} \mu!\,\tilde{b}_{\mu\beta}\tau^{\beta}\Big)\Big(\sum_{\lambda} u_{\mu\lambda}\tau^{\lambda}\Big)\zeta^{\mu}$$

そこでこれを $= v \equiv \sum_{\mu,\nu} v_{\mu\nu}\zeta^{\mu}\tau^{\nu}$ $(\in E')$ とおくと，これは，

(20) $$\Big(\sum_{\beta} \mu!\,\tilde{b}_{\mu\beta}\tau^{\beta}\Big)\Big(\sum_{\lambda} u_{\mu\lambda}\tau^{\lambda}\Big) = \sum_{\nu} v_{\mu\nu}\tau^{\nu} \quad (\text{for } \forall\mu)$$

を意味する．かつ，$\tilde{a}_{\alpha 0} = a_{\alpha 0}$ $(\forall\alpha)$ ということに注意すれば，

$$\tilde{b}_{\mu 0} = \sum_{\alpha\le\mu}\frac{\tilde{a}_{\alpha 0}}{(\mu-\alpha)!} = \sum_{\alpha\le\mu}\frac{a_{\alpha 0}}{(\mu-\alpha)!}$$

であるから，条件 (16) より，$|\tilde{b}_{\mu 0}| \ge C r^{|\mu|}/\mu!$ となるので，まず (20) より ${}^tP : B_{\{0\}|\mathbb{C}^{n+m}} \to B_{\{0\}|\mathbb{C}^{n+m}}$ は単射になる．次に，列 $v^{k} = {}^tP u^{k}$ $(u^{k}, v^{k} \in E')$ が $B_{\{0\}|\mathbb{C}^{n+m}}$ 内で v に収束するとすれば，(20) より補題 3 を用いて，各 μ に対し，

$$\Big|\sum_{\lambda}(u^{k}_{\mu\lambda}-u^{k'}_{\mu\lambda})\tau^{\lambda}\Big|$$
$$\le \sum_{\nu} |v^{k}_{\mu\nu}-v^{k'}_{\mu\nu}|R^{|\nu|}\Big[\sum_{\beta}|\tilde{b}_{\mu\beta}|\mu!R^{|\beta|}\Big]^{\frac{2|\tau|}{R-|\tau|}}|\tilde{b}_{\mu 0}\mu!|^{-\frac{R+|\tau|}{R-|\tau|}}.$$

従って，$C_1 > 1$ として，

$$|u^{k}(\zeta,\tau)-u^{k'}(\zeta,\tau)| = \Big|\sum_{\mu,\lambda}(u^{k}_{\mu\lambda}-u^{k'}_{\mu\lambda})\tau^{\lambda}\zeta^{\mu}\Big|$$
$$\le \sum_{\mu,\nu} |v^{k}_{\mu\nu}-v^{k'}_{\mu\nu}|R^{|\nu|}|C_1\zeta|^{|\mu|}\sup_{\mu}\Big[\Big(\sum_{\beta}|\tilde{b}_{\mu\beta}|\mu!R^{|\beta|}\Big)^{\frac{2|\tau|}{R-|\tau|}}|\tilde{b}_{\mu 0}|\mu!C_1^{-|\mu|}\Big].$$

$\sum_{\mu,\nu}|v^{k}_{\mu\nu}-v^{k'}_{\mu\nu}|R^{|\nu|}|C_1\zeta|^{|\mu|}$ は $|\zeta|<R/2$ 内で一様に 0 に収束するが，$\sup_{\mu}[\ \ ]$ は $C_1>1$ を r と R に依存して十分大きく取れば有界．

従って $|u^{k}(\zeta,\tau)-u^{k'}(\zeta,\tau)|$ は $|\zeta|, |\tau| < R/2$ に対して一様に

0に収束、 $R>0$ は任意だから結局 $u^{\alpha}(z,\tau)$ は $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m)$ 内で
ある $u(z,\tau)$ に収束する。勿論形式的には $\Phi u = v$ である。以上の
ことを $u^{\alpha}-u^{\alpha'}$ の代わりに u に対して行って $u\in E'$ がわかる。従って、
$v=\Phi u\in \mathrm{Im}\,\Phi$ となり、$\mathrm{Im}\,\Phi$ は閉である。よって、

<u>定理</u> 6. 条件 (16) の下, Euler型の局所微分作用素 $P=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha D_x^\alpha : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ は全射である。

文　献

[1] Aoki T., 無限階擬微分作用素の表象理論, 数理研講究録 468.

[2] Aoki T., Calcul exponentiel des opérateurs micro-différentiels II, (à paraître).

[3] Aoki T., Kashiwara M. & Kawai T., On a class of linear differential operators of infinite order with finite index (to appear).

[4] Hörmander L., On the range of convolution operators, Ann. Math. 76 (1962), 148–170.

[5] Ishimura R., Homomorphisme du faisceau des germes de fonction holomorphe dans lui-même et opérateurs différentiels, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 32 (1978), 301–312.

[6] Ishimura R., Existence locale de solutions holomorphes pour les équations différentielles d'ordre infini, à paraître dans Ann. Inst. Fourier Grenoble 35 (1985).

[7] Kashiwara M. & Kawai T., On holonomic systems of microdifferential equations III, Publ RIMS Kyoto Univ. 17(1981), 831–979.

[8] Kawai T., On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 17 (1970), 467–517.

[9] Komatsu H. 佐藤の超函数と定数係数線形偏微分方程式，東大セミナリー・ノート 22, 1968.

[10] Коробейник Ю.Ф. Исследование дифференциальных уравнений бесконечного порядка с полиномиальными коэффициентами с помощью операторных уравнений интегрального типа, Мат. Сб 49 (1959), 191–206

[11] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций, Госуд. Изд. Москва, 1956.

[12] Martineau A. Equations différentielles d'ordre infini, Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 109–154.

[13] Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных, Наука Москва, 1971.

[14] Sato M. Kawai T. & Kashiwara M., Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math., No. 287, Springer (1973), 265–529.