

SUR LES SOLUTIONS A SUPPORT COMPACT D'EQUATION D'EULER
COMPRESSIBLE

大阪産大教養 牧野 哲 (Tetu Makino)

大阪市大工 鵜飼 正二 (Seiji Ukai)

0. Introduction

Dans cette article, on étudie les solutions classiques de
l'équation d'Euler:

$$(1-0) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \rho = 0,$$

$$(1-i) \quad \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,3),$$

$$(1-4) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} = 0,$$

$$(2) \quad p = \rho^\gamma e^s,$$

$$(3) \quad \rho|_{t=0} = \rho^0(x) \geq 0, \quad v_i|_{t=0} = v_i^0(x) \quad (i=1,2,3),$$

$$s|_{t=0} = s^0(x),$$

où γ est une constante positive telle que $\gamma > 1$. Les inconnues sont les fonctions $\rho = \rho(t, x)$, $v = {}^t(v_1, v_2, v_3) = v(t, x)$ et $s = s(t, x)$ de $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^3$.

D'abord il s'agit de l'existence d'une solution locale pour le cas où $\inf \rho^0 = 0$ qui a lieu surtout quand le support de ρ^0 est compact. En cas où $\inf \rho^0 > 0$ l'existence a été bien établi par Lax [3], Kato [1], Majda [4] et Klainerman et Majda [2] en appliquant la théorie des systèmes hyperboliques symétriques quasi-linéaires. Mais leur symétrisation n'est pas utile si $\inf \rho^0 = 0$. Dans le paragraph 1 nous allons proposer une autre symétrisation, qu'on peut appliquer aux solutions à support compact.

Ensuite nous considérons le problème: Existe-t-il des C^1 -solutions globales? Récemment Sideris [7] a donné une condition suffisante sur les données initiales pour la non-existence des C^1 -solutions globales au cas où $\inf \rho^0 > 0$. Nous voulons chercher une condition semblable pour $\rho^0(x)$ à support compact.

Or, comme dans [6], cet étude a besoin d'estimation de l'évolution du support. Dans notre cas le support de la solution $(\rho(t), v(t))$ n'étend pas autant qu'elle est régulière, dont la justification est donnée dans le paragraph 2.

A l'aide de cela nous donnons une condition générale pour la non-existence des solutions globales à support compact dans le paragraph 3.

1. Existence et unicité des solutions classiques

Nous allons chercher une solution (ρ, v, s) classique, c'est-à-dire, de class $C^1([0, T) \times R^3)$, où T peut être assez petit, et à support compact, du problème de Cauchy (1)(2) (3). Pour cela on veut appliquer le théorème II de [1] sur l'équation d'évolution associée au système hyperbolique quasi-linéaire. Alors il faut transformer les équations (1)(2) au système symétrique. La transformation de [4] est

$$(4) \quad B_0(V) \frac{\partial V}{\partial t} + \sum B_j(V) \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0,$$

où $V = {}^t(p, v_1, v_2, v_3, s)$,

$$B_0(V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma p} & 0 & 0 \\ 0 & \rho I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_j(V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma p} v_j & e_j & 0 \\ {}^t e_j & \rho v_j I_3 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \end{pmatrix},$$

I_3 la matrice unitaire de R^3 , $e_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j})$.

Mais les coefficients sont divergents où ρ ou p s'annule.

Pour surmonter cette difficulté il faut chercher une autre

transformation.

Maintenant nous introduisons, comme dans [5],

$$(5) \quad w = p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}s}.$$

Alors le problème (1)(2)(3) se ramène au problème

$$(6) \quad A_0(U) \frac{\partial U}{\partial t} + \sum A_j(U) \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0,$$

$$(7) \quad U|_{t=0} = U^0,$$

où $U = {}^t(w, v_1, v_2, v_3, s)$,

$$A_0(U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma} e^{-s/\gamma} I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_j(U) = \begin{pmatrix} v_j & \frac{\gamma-1}{2} w e_j & 0 \\ \frac{\gamma-1}{2} w^t e_j & \frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma} e^{-s/\gamma} v_j I_3 & 0 \\ 0 & 0 & v_j \end{pmatrix} \quad (j=1,2,3).$$

On voit que les matrices $A_j(U)$, $j=0,1,2,3$, sont symétriques et de C^∞ en U . De plus $A_0(U)$ est défini positif

uniformément autant que s est borné. En effet, étant fixé σ assez grand, on a

$$(A_0(U)\Xi, \Xi) \geq \frac{\gamma-1}{4\gamma} e^{-\sigma/\gamma} |\Xi|^2 \quad (\Xi \in \mathbb{R}^4)$$

pour chaque $s \geq -\sigma$. Donc on peut appliquer le théorème II de [1] au (6)(7) sans restriction sur $\inf w^0$. On a le:

Lemme 1. — Soit m un entier ≥ 0 . Etant donné $U^0 = (w^0, v^0, s^0) \in H^{3+m}$, il existe une constante $T > 0$ et une solution $U = (w, v, s)$ unique du problème (6)(7) telle que

$$U \in C([0, T]; H^{3+m}) \cap C^1([0, T]; H^{2+m}).$$

De plus si $w^0(x) \geq 0$ partout, alors $w(t, x) \geq 0$ pour toutes t et x .

Ici et dans la suite $H^\ell = H^\ell(\mathbb{R}^3)$ désigne l'espace de Sobolev usuel muni de la norm

$$\|u\|_{H^\ell} = \|(1 - \Delta)^{\ell/2} u\|_{L^2},$$

et donc le théorème de Sobolev nous garantit que

$$(8) \quad H^{2+m} \subset C^m(\mathbb{R}^3).$$

$C^m([0, T]; H^{\ell})$ est l'ensemble des fonctions $u: [0, T] \rightarrow H^{\ell}$ m fois continûment différentiables.

Démonstration du lemme 1. L'existence et l'unicité de la solution sont une conséquence immédiate du théorème II de [1].

Montrons que $w(t) \geq 0$ sous l'hypothèse $w^0 \geq 0$.

Soit (τ, ξ) un point dans $[0, T] \times R^3$. Considérons le problème

$$\frac{dx}{dt} = v(t, x), \quad x|_{t=\tau} = \xi.$$

Comme $v \in C([0, T]; H^3)$ est borné et continûment différentiable par rapport à x , on a une solution $x = \psi(t) \in C^1([0, T]; R^3)$ unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz de la théorie des équations différentielles ordinaires. De l'équation (6) on a

$$\frac{d}{dt} w(t, \psi(t)) = - \frac{\gamma-1}{2} \left(\sum \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) w,$$

d'où, en l'intégrant de $t=0$ à $t=\tau$, on a

$$w(\tau, \xi) = w(0, \psi(0)) \exp \left(- \frac{\gamma-1}{2} \int_0^{\tau} \left(\sum \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) (t, \psi(t)) dt \right),$$

d'où $w(\tau, \xi) \geq 0$ si $w(0, \psi(0)) \geq 0$. Le lemme est démontré.

Revenons maintenant au problème (1)(2)(3).

Théorème 1. — Supposons que $1 < \gamma \leq 3$, $\rho^0 \in C^1(R^3)$, $\rho^0 \geq 0$ et

$$U^0 = ((\rho^0)^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}s^0}, v^0, s^0) \in H^3.$$

Alors il existe un nombre positif T et une solution $(\rho, v, s) \in C^1([0, T] \times R^3)$ unique du problème (1)(2)(3) telle que la fonction

$$U = (\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}s}, v, s)$$

appartient à $C([0, T]; H^3) \cap C^1([0, T]; H^2)$ et vérifie (6).

De plus supposons que $U^0 \in H^{3+m}$ avec un entier $m \geq 1$.

i) Si $1 < \gamma \leq (5+m)/(3+m)$, alors la solution (ρ, v, s) appartient à $C([0, T]; H^{3+m}) \cap C^1([0, T]; H^{2+m})$. ii) Si $1 < \gamma \leq 3$ et $\rho^0 \in H^{2+m}$, alors (ρ, v, s) appartient à $C([0, T]; H^{2+m}) \cap C^1([0, T]; H^{1+m})$.

Démonstration. Appliquant le lemme 1, on voit qu'il existe une solution $U = (w, v, s)$ de (6)(7) telle que $U \in C([0, T]; H^3) \cap C^1([0, T]; H^2)$ et $w \geq 0$. Posons

$$\rho(t, x) = w(t, x)^{\frac{2}{\gamma-1}} e^{-\frac{1}{\gamma}s(t, x)}.$$

On note que, comme $\frac{2}{\gamma-1} \geq 1$ pour $1 < \gamma \leq 3$, l'application

$w \rightarrow (\text{sign } w) |w|^{\frac{2}{\gamma-1}}$ est continûment différentiable sur $|w| < +\infty$. Puisque $w, s \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ d'après (8), on voit qu'il en est de même de la fonction $\rho(t, x)$, comme la fonction composée.

Multipliant l'équation

$$(6-0) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \sum v_j \frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{\gamma-1}{2} \left(\sum \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) w = 0$$

par

$$\frac{\partial}{\partial w} \rho(w, s) = \frac{2}{\gamma-1} e^{-\frac{s}{\gamma} w^{\frac{2}{\gamma-1}-1}} \in C([0, T] \times \mathbb{R}^3),$$

on obtient l'équation (1-0). Les équations de (6)

$$(6-i) \quad \frac{(\gamma-1)^2}{4\gamma} e^{-s/\gamma} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\gamma-1}{2} w \frac{\partial w}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

multipliées par

$$\frac{4\gamma}{(\gamma-1)^2} w^{\frac{2}{\gamma-1}} \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^3)$$

donnent les équations (1-1), -2), -3). Donc (ρ, v, s) est une solution classique du problème (1)(2)(3).

Supposons maintenant que $U^0 \in H^{3+m}$ où $m \geq 1$.

i) Cas où $1 < \gamma \leq (5+m)/(3+m)$. Alors $2/(\gamma-1) \geq 3+m$.

Donc lorsque $w(t, x) \in C([0, T]; H^{3+m}) \cap C^1([0, T]; H^{2+m})$, la

la fonction $\rho(t, x)$ comme cela composée appartient à $C([0, T]; H^{3+m}) \cap C^1([0, T]; H^{2+m})$.

ii) Cas où $1 < \gamma \leq 3$ et $\rho^0 \in H^{2+m}$. On peut regarder la fonction $\rho(t, x)$ comme la solution du problème

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \left(\sum \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \rho = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho^0(x),$$

où les coefficients $v_j(t, x)$, $j=1,2,3$, et $\sum \partial v_j / \partial x_j$ sont de class $C([0, T]; H^{2+m})$ puisque $U \in C([0, T]; H^{3+m})$.

Grâce au théorème I de [1] de l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du problème linéaire, on a

$$\rho(t, x) \in C([0, T]; H^{2+m}) \cap C^1([0, T]; H^{1+m}).$$

Le théorème est démontré.

2. Le support de la solution régulière

Dans ce paragraphe nous montrons que le support d'une solution régulière ne s'étend pas.

D'abord il faut préciser la définition de la solution régulière.

Définition. — Une fonction (ρ, v, s) sera appelée une

solution régulière de (1)(2) si elle vérifie les conditions suivantes

i) $(\rho, v, s) \in C^1([0, T) \times R^3)$, $\rho \geq 0$ et (ρ, v, s) vérifie (1)(2) dans $0 \leq t < T$ et $x \in R^3$;

ii) $\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \in C^1([0, T) \times R^3)$ et les équations

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad (i=1,2,3)$$

sont satisfaites dans l'extérieur du support de ρ .

On dit que la solution régulière est globale si $T = +\infty$.

Il est évident que si (ρ, v, s) est une solution régulière,

$$U = (\rho(t, x)^{\frac{\gamma-1}{2}} e^{\frac{\gamma-1}{2\gamma} s(t, x)}, v(t, x), s(t, x))$$

est de class $C^1([0, T) \times R^3)$ et vérifie (6) dans $[0, T) \times R^3$.

D'autre part la solution dont nous avons établi l'existence dans le paragraphe précédent est régulière.

Théorème 2. — Soit $(\rho(t), v(t), s(t))$ une solution régulière sur $[0, T)$. Si $(\rho(0), v(0))$ est à support compact, alors le support de $(\rho(t), v(t))$ ne s'étend pas, c'est-à-dire,

$$\text{Supp}(\rho(t), v(t)) \subset \text{Supp}(\rho(0), v(0))$$

pour tout $t \in [0, T)$.

Démonstration. Nous avons déjà remarqué que $U(t) = (w(t), v(t), s(t))$ est de class C^1 et une solution du système (6), qui entraîne

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum a_j(u, s) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

où $u = {}^t(w, v_1, v_2, v_3)$ et

$$a_j(u, s) = \begin{pmatrix} v_j & \frac{\gamma-1}{2} w e_j \\ \frac{2}{\gamma-1} e^{s/\gamma w t} e_j & v_j I_3 \end{pmatrix}.$$

Soit (τ, ξ) un point dans $[0, T) \times \mathbb{R}^3$. On voit qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$|a_j(u, s(t, x))| \leq C|u|$$

le long de la ligne $L: 0 \leq t \leq \tau, x = \xi$, car $s(t, x)$ est borné sur L . D'autre part

$$C' = \sup_{(t, x) \in L, j=1,2,3} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(t, x) \right|$$

est évidemment un nombre fini. Alors on déduit

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| \leq 3CC' |u|$$

le long de L , d'où $u(\tau, \xi) = 0$ si $u(0, \xi) = 0$. Le théorème est démontré.

3. Non-existence des solutions globales

Le théorème 2 entraîne une condition suffisante pour non-existence des solutions régulières globales.

D'abord on écrit les équations (1-1), (2), (3) sous la forme d'un système des lois de conservation:

$$(1-0)' \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0,$$

$$(1-i)' \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \sum \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, 3).$$

Théorème 3. — Soit $(\rho(t), v(t), s(t))$ une solution régulière sur $[0, T)$. Si $(\rho(0), v(0))$ est à support compact et s'il existe une fonction $h \in H^2_{loc}(R^3)$ dont le hessien $(\partial^2 h / \partial x_i \partial x_j)$ est non-négatif presque partout telle que

$$\int_{R^3} \sum v_j(0, x) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) \rho(0, x) dx > 0,$$

alors la solution ne peut pas être globale, i.e., $T < +\infty$.

Démonstration. Posons

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^3} h(x) \rho(t, x) dx.$$

D'après l'équation (1-0)' une integration par parties montre que

$$\begin{aligned} H'(t) &= \int h \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = - \int h \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) dx = \\ &= \int \sum_j v_j \frac{\partial h}{\partial x_j} \rho dx. \end{aligned}$$

De plus, d'après (1-1)', (1-2)', (1-3)' on a

$$\begin{aligned} H''(t) &= \int \sum_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) \frac{\partial h}{\partial x_j} dx = \\ &= - \int \left(\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_j v_k) + \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} dx = \\ &= \int \left(\rho \sum_j v_j v_k \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_k} + p \sum_j \frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Comme on suppose que le hessien de $h(x)$ est non-negatif, il vient $H''(t) \geq 0$, d'où $H'(t) \geq H'(0)$ et donc

$$H(t) \geq H(0) + H'(0)t,$$

où $H'(0) > 0$ par l'hypothèse.

D'autre part on peut vérifier que $H(t)$ est bornée. En effet d'après l'équation $(1-0)'$ qui représente la conservation de la masse, on voit que

$$M = \int \rho(t, x) dx = \int \rho(0, x) dx$$

ne dépend pas de t . Grâce au théorème 2,

$$B(t) \equiv \sup_{x \in \text{supp}(\rho(t), v(t))} |h(x)| \leq B(0).$$

Donc

$$H(t) = \int h(x) \rho(t, x) dx \leq B(t) \int \rho(t, x) dx \leq B(0)M.$$

Par conséquent on obtient la estimation

$$t \leq (B(0)M - H(0))/H'(0)$$

qui est valable autant que la solution reste régulière. Le théorème est démontré.

Corollaire. — Toute solution régulière $(\rho(t), v(t), s(t))$ de (1)(2) vérifiante

$$\int v(0, x) \rho(0, x) dx \neq 0$$

ne peut pas être globale.

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$I = \int v_1(0, x) \rho(0, x) dx \neq 0.$$

On n'a qu'à appliquer le théorème 3 avec $h(x) = x_1$ si $I > 0$ et $h(x) = -x_1$ si $I < 0$.

4. Remarques

1) Tout d'abord, si une solution n'admet aucun prolongement régulière au-delà de $[0, T)$, on se demanderait : Qu'est-ce qui arrive pour $t \geq T$?

Comme le théorème 3 a été démontré par l'absurde, il ne peut pas répondre à cette question. On pourrait espérer qu'une discontinuité des vitesses, c'est-à-dire, une onde de choc se développe, peut-être, sur la frontière du support, un sujet d'étude, analytique ou numérique, à l'avenir.

2) Il y a une conjecture: Aucune solution régulière nontriviale n'est jamais globales.

Mais nous ne savons pas encore de vérification. Même si $\int v(0)\rho(0)dx = 0$, la solution n'est pas globale si

$$\int_{\alpha \leq x_1} v_1(0, x)\rho(0, x)dx = - \int_{x_1 \leq \alpha} v_1(0, x)\rho(0, x)dx > 0,$$

avec un $\alpha \in \mathbb{R}$, car le théorème 3 reste toujours valable avec $h(x) = |x_1 - \alpha|$. D'autre part il n'existe pas de tel $h(x)$ au cas où

$$\int_{\alpha \leq x_1} v_1(0, x)\rho(0, x) = - \int_{x_1 \leq \alpha} v_1(0, x)\rho(0, x)dx < 0.$$

3) Finalement il est désirable de supprimer la condition ii) dans la définition des solutions régulières, car elle est une condition technique pour symétriser l'équation (1)(2). Pour la nécessité de cette amélioration on renvoie à §6 de [3].

References

- [1] T. Kato, The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, Arch. Rational Mech. Anal., 58 (1975), 181-205.
- [2] S. Klainerman and A. Majda, Compressible and incompressible fluids, Comm. Pure Appl. Math., 35(1982), 629-651.
- [3] P. D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves, SIAM Reg. Conf. Lecture #11, Philadelphia, 1973.
- [4] A. Majda, Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables, Appl. Math. Sci. 53 Springer-Verlag, 1984
- [5] T. Makino, On a local existence theorem for the evolution equation of gaseous stars, à paraître
- [6] T. Sideris, Formation of singularities in solutions to nonlinear hyperbolic equations, Arch. Rational Mech. Anal., 86(1984), 369-381.
- [7] T. Sideris, à paraître.

M.T.

Department of Liberal Arts
Osaka Industrial University
3-1-1 Nakagaito, Daito
Osaka 574

S.U.

Department of Applied Physics
Osaka City University
3-3-138 Sugimoto, Sumiyoshi
Osaka 558