数理解析研究所講究録
579巻 1985年 30-40

Moser type の非線型発展方程式

千葉大学工学部　河原田　秀夫 (Hideo kawarada)
千葉大学工学部　腰越　秀之 (Hideyuki koshigoe)

初期値問題

(1)　$dx/dt + F(t,x) = 0$, $0 \leqq t \leqq T$, $x(0) = x_0$

の(時間的)局所解の存在を，Newton 法によって考える。そのために，(1)を線型化した z についての線型方程式

(2)　$dz/dt + F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x = 0$, $0 \leqq t \leqq T$
$z(0) = x_0$

の解についての評価が必要である。ここで，$F'(\cdot,x)$ は $F(\cdot,x)$ の x における Fréchet 微分である。

以下，次の順序で報告する。

1. 線型方程式(2)の近似解の概念と M. Altman の結果
2. Banach scale の注意
3. 線型方程式(2)の近似解の構成

1. 線型方程式(2)の近似解の概念とM.Altmanの結果

(J. Moser [2]の意味での)近似解の定義を述べる前に，若干の記号を説明する。

- Banach scale $X_0 \supset X_s \supset X_p$, $0 < s < p$
- $V_0 \equiv \{ x \in X_p \ ; \ \|x - x_0\|_s < r \}$

  ここで，正数 r は固定する。 $x_0 \in X_p$ とする。
- $x \in G$ とは，$x \in C^1(0,T;X_0) \cap C(0,T;V_0(\|\cdot\|_p))$ かつ，$x(0) = x_0$ である。

<u>定義</u>　線型方程式(2)が(Moserの意味で) degree μ の近似解をもつとは，次が成り立つことである；

$\forall K \gg 1$, $\forall Q > 1$ をとる。このとき，

$x \in G$, $\|x\|_{\infty,p} \leqq K$

$\Longrightarrow$

$\exists\, y \in C(0,T;X_0)$ with $\|y\|_{\infty,0} \leqq K Q^{-\mu}$

$\exists\, z \in C^1(0,T;X_0) \cap C(0,T;X_p)$ with $\|z\|_{\infty,p} \leqq KQ$

かつ

$$dz/dt + F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x + y = 0 \ , \ 0 \leqq t \leqq T,$$

$$z(0) = x_0$$

を満たす。ここで，μ は $K, Q, x \in G$ に依らない定数である。

（注1）　線型方程式(2)を解くとき，$x \in G$ を与えても，(2)の解zは regularity loss のために，一般には，$C(0,T;X_p)$ に属さない。しかし，上の近似解の定義では，$z \in C(0,T;X_p)$ であることに注意すれば，Newton 法によって，近似解列 $\{z_n\}$ を作ることができる。

（M. Altman [1] の結果）

線型方程式(2)の degree μ の近似解の存在を仮定したもとで，$F(t,x)$，$F'(t,x)$ に関するいくつかの条件及び Moser's condition

(3)　$0 < \lambda+1 < (\mu+1)/2$ ，$s/p < \lambda/(\lambda+2)$

がある。

$\Longrightarrow$　非線型方程式(1)の（時間的）局所解は存在する。

（注2）　(3)における λ は，非線型方程式(1)の近似の order に用いられる定数である。

2. Banach scale の注意

1. より，非線型方程式(1)の局所解の存在を示すには，線型方程式(2)の degree μ の近似解が構成できれば

良い。 M. Altman は, Banach scale

(4) $X_0 \supset X_{m_1} \supset X_{m_2} \supset X_s \supset X_p$, $0 < m_1 < m_2 < s < p$

および, linear smoothing operator $\mathcal{S}_\theta$ を用いて, 近似解を作ろうとした。しかしながら, その構成には成功していない。その理由は, 次の命題である。

<u>命 題</u> Moser's condition (3) および 近似解を構成する時に用いる関係式

(5) $\mu = m/(p-m_2)$, $m = \min(m_1, m_2 - m_1)$

を満たす Banach scale (4) は, 存在しない。

証 明. (3), (5) を満たす Banach scale (4) が存在すると仮定する。 $\delta = m/m_2$ とおく。m のとり方から,

(6) $0 < \delta \leqq 1/2$

がわかる。 (5) より, $p/m_2 = 1 + \delta/\mu$.

これと (3), (4) とから,

$$1 + \delta/\mu = p/m_2 > p/s > (\lambda+2)/\lambda = 1 + 2/\lambda$$

を得る。したがって, $\delta/\mu > 2/\lambda$.

これに (3) を用いると

$$\delta > (2\mu)/\lambda > 2(2\lambda+1)/\lambda = 2(2 + 1/\lambda) > 4$$

となり, (6) と矛盾することがわかる。 ■

上の命題より，近似解の構成に必要な条件(5)と非線型発展方程式(1)の解の存在証明に必要な Moser's condition (3)を前提とする限り，$X_{m_2} \subset X_s$ と逆になる。
それ故に，我々は(3),(5)と整合する Banach scale

(7) $X_0 \supset X_{m_1} \supset X_s \supset X_{m_2} \supset X_{m_3} \supset X_p$, $0 < m_1 < s < m_2 < m_3 < p$

を inverted Banach scale と呼び，(4)のような Banach scale を normal Banach scale と呼ぶことにする。

〈例〉 inverted Banach scale の例

$\lambda = 53/10$, $\mu = 12$, $m_1 = 2$, $s = 3$, $m_2 = 4$,
$p = 25/6$, $4 < m_3 < 25/6$.

最後に，上の命題に注意して，線型方程式(2)の近似解を構成する方法として，次の二つの方法を提案する；

(A) 条件(3),(5)と整合する inverted Banach scale (7)を作り，このもとで，線型方程式(2)の解 z に，次の

$$\|z\|_{\infty,m_2} \leqq C(1 + \|x\|_{\infty,m_3}) \quad \text{for } x \in G$$

という評価を要請する方法。

(B) normal Banach scale (4) のもとで，線型方程式(2)に singular perturbation を導入し，次の方程式

$$dz_\eta/dt + H_\eta z_\eta + F'(t,x)z_\eta + F(t,x) - F'(t,x)x = 0 , \ 0 \leqq t \leqq T,$$
$$z_\eta(0) = 0$$

の解 x_η に smoothing operator を作用させる方法. ■

次の章では, 特に, inverted Banach scale の場合(A)に対して, 線型方程式(2)の近似解が構成できることを報告する。

3. 線型方程式(2)の近似解の構成

まず, 定義と仮定を述べる。

<u>定 義</u>　inverted Banach scale (7) は, 次の意味での linear operator $\mathcal{S}_\theta$ $(\theta \geqq 1)$ をもつとする;

$$\mathcal{S}_\theta : X_0 \longrightarrow X_p ,$$

$$(8)\quad \begin{aligned} &\|(I-\mathcal{S}_\theta)x\|_0 \leqq C\theta^{-m_1}\|x\|_{m_1} \quad \text{for } x \in X_{m_1}, \\ &\|(I-\mathcal{S}_\theta)x\|_{m_1} \leqq C\theta^{-(m_2-m_1)}\|x\|_{m_2} \quad \text{for } x \in X_{m_2}, \\ &\|\mathcal{S}_\theta x\|_p \leqq C\theta^{p-m_j}\|x\|_{m_j} \quad \text{for } x \in X_{m_j}\ (j=1,2,3). \end{aligned}$$

ただし, C は θ, x によらない定数である。

このとき, 上のような $\mathcal{S}_\theta$ を smoothing operator と呼び, smoothing operator をもつ Banach scale を tame な Banach scale という。

(注3)　tame な Banach scale は norm に関して logarithm convex property をもつ。特に,

$$(9) \qquad \|\cdot\|_{m_3} \leqq C \|\cdot\|_s^{(p-m_3)/(p-s)} \|\cdot\|_p^{(m_3-s)/(p-s)}$$

が成り立つ。ここで，Cは正定数である。

次に，線型作用素$F'(t,x)$についての仮定および線型方程式(2)の解に対する仮定を述べる。

<仮定 1>

$$(10) \quad \begin{aligned} &\|F'(t,x)h\|_0 \leqq L_1 \|h\|_{m_1} \quad \text{for } (t,x)\in[0,T]\times V_0,\ h\in X_{m_1}, \\ &\|F'(t,x)h\|_{m_1} \leqq L_1 \|h\|_{m_2} \quad \text{for } (t,x)\in[0,T]\times V_0,\ h\in X_{m_2}, \\ &\|F(t,x)-F'(t,x)x\|_{\infty,m_1} \leqq L_2 (1+\|x\|_{\infty,m_3}) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } x\in G \end{aligned}$$

<仮定 2> $x\in G$ に対して，線型方程式(2)は，解$z\in C^1(0,T;X_{m_1})\cap C(0,T;X_{m_2})$をもち，次の評価

$$(11) \qquad \|z\|_{\infty,m_2} \leqq L_3 (1+\|x\|_{\infty,m_3})$$

が成り立つ。

ただし，上の定数L_1, L_2, L_3はx, hに依らない定数である。

上の<仮定2>は，我々の方法において重要である。

(注4) (9), (10), (11)から，次のことが容易に導ける； $x\in G$, $\|x\|_{\infty,p}\leqq K$ のとき，

ある α $(0<\alpha<1)$ に対して，

(10)′ $\|F(t,x)-F'(t,x)x\|_{\infty,m_1} \leqq dK^{\alpha}$,

(11)′ $\|z\|_{\infty,m_2} \leqq DK^{\alpha}$

が成り立つ。ここで，d, D は x, K に依らない定数である。また，$\alpha = (m_3-s)/(p-s)$.

<u>定理</u> tame な inverted Banach scale (7) のもとで，仮定1，仮定2 が成り立つとする。このとき，

$$\mu = m/(p-m_2) \quad , \quad m = \min(m_1, m_2-m_1)$$

とおくと，線型方程式 (2) は，degree μ の近似解をもつ。

証明. 線型方程式なので，$x_0=0$ と仮定しても一般性を失なわない。今，$x \in G$, $\|x\|_{\infty,p} \leqq K$ をとる。仮定2より，線型方程式 (2) は解 $\bar{z}$ をもつ。$z = \mathcal{S}_\theta \bar{z}$ とおくとき，これが (2) の degree μ の近似解であることを以下に示そう。

(12) $-y = dz/dt + F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x$

とおく。このとき，$\bar{z}$ が (2) の解であることと $\mathcal{S}_\theta$ の性質を用いると，

$$\|y\|_{\infty,0} = \|dz/dt + F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x\|_{\infty,0}$$

$$\leqq \|d\bar{z}/dt + F'(t,x)\bar{z} + F(t,x) - F'(t,x)x\|_{\infty,0}$$

$$+ \|(I-\mathcal{S}_\theta)(d\bar{z}/dt)\|_{\infty,0} + \|F'(t,x)(I-\mathcal{S}_\theta)\bar{z}\|_{\infty,0}$$

$$= \|(I-\mathcal{S}_\theta)(d\bar{z}/dt)\|_{\infty,0} + \|F'(t,x)(I-\mathcal{S}_\theta)\bar{z}\|_{\infty,0}$$

$(\equiv I_1 + I_2$ とおく$)$。

仮定1，仮定2，$(10)'$，$(11)'$ を用いると

$$\begin{aligned} I_1 &\leqq \|(I-\mathcal{S}_\theta)[F'(t,x)\bar{z} + F(t,x) - F'(t,x)x]\|_{\infty,0} \\ &\leqq C\theta^{-m_1}\{\|F'(t,x)\bar{z}\|_{\infty,m_1} + \|F(t,x)-F'(t,x)x\|_{\infty,m_1}\} \\ &\leqq C\theta^{-m_1}(L_1\|\bar{z}\|_{\infty,m_2} + dK^\alpha) \\ &\leqq C\theta^{-m_1}(L_1D + d)K^\alpha \\ &\leqq \theta^{-m_1}K \qquad (\text{十分大きな}K\text{をとる}). \end{aligned}$$

また，仮定1，仮定2，$(11)'$ を用いると

$$\begin{aligned} I_2 &\leqq L_1\|(I-\mathcal{S}_\theta)\bar{z}\|_{\infty,m_1} \leqq L_1C\theta^{-(m_2-m_1)}\|\bar{z}\|_{\infty,m_2} \\ &\leqq L_1CD\theta^{-(m_2-m_1)}K^\alpha \\ &\leqq \theta^{-(m_2-m_1)}K \qquad (\text{十分大きな}K\text{をとる}). \end{aligned}$$

以上より，

$$(13) \qquad \|y\|_{\infty,0} \leqq \theta^{-m}K, \quad m = \min(m_1, m_2-m_1)$$

を得る。同様に，仮定2，$(11)'$を用いると，

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty,p} &= \|\mathcal{S}_\theta\bar{z}\|_{\infty,p} \leqq C\theta^{p-m_2}\|\bar{z}\|_{\infty,m_2} \\ &\leqq CD\theta^{p-m_2}K^\alpha \\ &\leqq \theta^{p-m_2}K \qquad (\text{十分大きな}K\text{をとる}). \end{aligned}$$

故に，

$$(14) \qquad \|z\|_{\infty,p} \leqq \theta^{p-m_2}K$$

を得る。

したがって，

$$Q = \theta^{p-m_2}$$

とおくと，$Q > 1$ かつ $\mu = m/(p-m_2)$ より，$\theta^{-m} = Q^{-\mu}$ を得る。それ故に，これと(13),(14)より

$$\|y\|_{\infty,0} \leqq KQ^{-\mu}, \quad \|z\|_{\infty,p} \leqq KQ$$

となる。しかも，(12) より

$$dz/dt + F'(t,x)z + F(t,x) - F'(t,x)x + y = 0, \quad 0 \leqq t \leqq T,$$

$$z(0) = 0$$

が成り立つ。故に，線型方程式(2)の近似解が構成された。 ∎

(注5)　上の定理および Moser's condition (3) によって，非線型発展方程式(1)の（時間的）局所解の存在がわかる（ 1. M. Altman の結果より ）。

参考文献

[1] M. Altman, Nonlinear equations of evolution in Banach spaces, Nonlinear Analysis 8, 491-499 (1984)

[2] J. Moser, A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations I, Annali Scu. norm. sup. Pisa 20, 265-315 (1966)

[3] H. Kawarada and H. Koshigoe, On a construction of an approximate solution of the linearized equation of Moser's type, Tech. Rep. Math. Sci. Chiba Univ. No. 5 (1985)