数理解析研究所講究録
579巻 1985年 17-29

放物型方程式 $\frac{du}{dt}(t)+\partial\varphi(u(t))\ni f(t)$ の周期解

芝浦工大　大河内広子 (Hiroko Okochi)

1. 結果

Hを実ヒルベルト空間とし、その内積を $(\cdot,\cdot)$ で表わす。次の形の方程式の周期解の存在を考える。

(E; φ, f)　$\frac{du}{dt}(t)+\partial\varphi(u(t))\ni f(t)$,　$t\in\mathbb{R}$

ここにおいて、φ は $H\to(-\infty,\infty]$ なる適正下半連続な凸関数, $\partial\varphi$ は φ の劣微分を表わす。更に

(1)　$f\in L^2_{loc}(\mathbb{R};H)$　かつ　$f(t+2\pi)=f(t)$, $t\in\mathbb{R}$

とする。

次の結果を得た。

定理1. 次の (2) (3) を仮定する.

(2)　φ: even　(すなわち $\varphi(-x)=\varphi(x)$, $x\in H$).

(3)　$f(t+\pi)=-f(t)$,　$t\in\mathbb{R}$

このとき (E) は 2π-周期解 $u\in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R};H)$ をもつ。

注1. 周期解の一意性に関して、以下が知られている。
φ が狭義凸 $\Rightarrow$ $(E;\varphi,f)$ の解 $u,v\in W^{1,2}_{loc}((0,\infty):\mathbb{R})$ について $\|u(t+\varepsilon)-v(t+\varepsilon)\|<\|u(t)-v(t)\|$ が成立
$\Rightarrow$ $(E;\varphi,f)$ の周期解は存在すれば一意.

$(E;\varphi,f)$ (又は $(E;\varphi^t,f)$) が (1) のもとで 2π-周期解をもつための十分条件として、得られているものは以下のタイプと思われる。

(A) ([4; Corollary 11 in Lecture 20])

i) $\partial\varphi$ が線型 (従って $\partial\varphi$ は自己共役作用素)

ii) $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \in \mathcal{R}(\partial\varphi)$.

(B) (Haraux [3] 又は [4; Theorem 1 in Lecture 21])

$$(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \in \operatorname{Int}[\mathcal{R}(\partial\varphi)]$$

(この条件は次の不等式と同値である:

$$\liminf_{\|x\|\to\infty}\frac{\varphi(x)-\langle F,x\rangle}{\|x\|}>0 \tag{4}$$

ここにおいて、$F=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$.)

(C) (Benilan & Brezis [2], Yamada [6])

$\{\varphi^t\}$ は以下を満たす。

i) $\varphi^{t+2\pi}=\varphi^t$, $t\in\mathbb{R}$

ii) 各 $u_0 \in \overline{D(\varphi^0)}$ に対し、初期値 $u(0)=u_0$ を満たす $(E;\varphi^t,f)$ の解 $u \in C([0,\infty);H) \cap W^{1,2}_{loc}((0,\infty);H)$ が存在する.

iii) $\displaystyle\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{\varphi^t(x)-\varphi^t(0)}{\|x\|} = +\infty$, unif. in $t \in [0,2\pi)$.

(A) は Fourier 変換を用いて証明される。定理1や(B)(C)は、(E)が周期解を持つことと同値な次の(5)を示すことによって証明される。(Browder-Petryshyn の不動点定理)

(5) 各 $u_0 \in \overline{D(\varphi)}$ [又は $\overline{D(\varphi^0)}$] に対し、初期値 $u(0)=u_0$ を満たす $(E;\varphi,f)$ [又は $(E;\varphi^t,f)$] の解 $u \in C([0,\infty);H) \cap W^{1,2}_{loc}((0,\infty);H)$ が存在して、$\{u(t);t\geq 0\}$ が有界.

条件(B) [又は(C)] における(4) [又は iii)] は、遠方での φ [又は φ^t] の傾きを規定しているので、$\{u(t);t\geq 0\}$ が有界になるための十分条件になっている。一方、定理1の条件(2)は次の事実に由来する([5]):

"φ が even であれば

$(E;\varphi,0)$ $\quad \dfrac{dw}{dt}(t) + \partial\varphi(w(t)) \ni 0$

の解 $w \in W^{1,2}_{loc}((0,\infty);H)$ は $t\to\infty$ のとき強収束し

(6) $\quad s\text{-}\displaystyle\lim_{t\to\infty} w(t) \in (\partial\varphi)^{-1}(0)$

が成立する。"

（従って(2)は「外力項が無いとき、解の軌跡がもつれと共にHの適当な元のまわりに縮まっていく」性質を与えている。）

ところで収束(6)は次の(2)′のもとでも成立する（[5]）。

(2)′ $\exists \varepsilon > 0 : \quad \varphi(-\varepsilon x) \leqq \varphi(x), \quad x \in H$

従って、性質(5)を、(2)より弱い(2)′のもとでも得られそうな印象を受ける。しかし、以下を得た。

命題1 (1)(2)′(3)を満たす$\{\varphi, f\}$で、$(E; \varphi, f)$が周期解をもたない例がある。

次に条件(3)について考えよう。まず、次の必要条件に注意しておく（[3]）；

$(E; \varphi, f)$が2π-周期解をもつならば

(7) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \in \overline{\mathcal{R}(\partial\varphi)}$$

が成立する。

(7)は、2π-周期解を$(E; \varphi, f)$に代入した式を区間$[0, 2\pi]$で積分して、$\mathcal{R}(\partial\varphi)$が凸集合である事に注意すれば簡単に得られる。

(7)は仮定(2)(3)から直接に得られる。実際、図式的に書

くと、以下が成立する：

$$\left.\begin{array}{l}(2) \Rightarrow 0 \in \partial\varphi(0) \subset \mathcal{R}(\partial\varphi) \\ (3) \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \in \mathcal{R}(\partial\varphi)$$

従って、(3)より弱い条件

(3)′ $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$

のもとで、定理1が成立する事を期待したくなる。しかし、以下を得た。

命題2．(1)(2)(3)′をみたす$\{\varphi, f\}$で、$(E;\varphi,f)$が周期解をもたない例がある。

最後に、放物型ではない方程式

(E)′ $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$

について、定理1と同様のことが成立しない事を注意しておく。実際、次の例がある。

$$H = \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{bmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

このとき、$-A$は(解析的でない)半群の生成作用素であり、Aとfは

$$A(-x) = -Ax,\ x \in H, \quad f(t+\pi) = -f(t),\ t \in \mathbb{R}$$

を満たす。しかし、(E)′の解$u \in W^{1,2}_{loc}((0,\infty);H)$の軌跡

$\{u(t) : t \geq 0\}$ は非有界になるので、(E)′ は周期解をもたない。

2、一般化されたLinの方程式への応用

定理1での仮定(2)は、位相的な仮定(B)や(C)とは全く異なるタイプの条件である。従って、Poincareや Sobolevの不等式等を適用できないような非線型放物型方程式を考える際に、定理1の持ち味があろう。

例えば、$\partial\varphi$ の代表的な例として

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \quad + \text{適当な境界条件}$$

がある。(ただし $p \geqq 2$)。このとき、考えている領域 Ω $(\subset \mathbb{R}^n)$ が有界で、Dirichlet境界条件の時のみ、φ は(B)(又は(C)の(ii))を満たす。一方(2)は、Ω が有界・非有界を問わずに成立している。

ここでは、次の方程式への定理1の適用を考える。

$$(L)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,t) + \triangle w(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial n}(x,t) + g[w(x,t) - h(x,t)] = 0, & (x,t) \in \Gamma \times \mathbb{R} \end{cases}$$

ここにおいて、Ω は $\mathbb{R}^n$ の(外部)領域で、その境界 Γ は滑らかでコンパクトとする。n は Γ における外向き法線ベクトル

を表わす。

定理1を適用すると以下を得る。

命題3. 以下を仮定する。

(g1) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は非減少な可測関数

(g2) $g(-r) = -g(r)$, $r \in \mathbb{R}$

(h1) $h(\cdot, t) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}; C^2(\Gamma))$

(h2) $h(\cdot, t+\pi) = -h(\cdot, t)$, $t \in \mathbb{R}$

このとき (L) は 2π-周期の解 $w(\cdot, t) \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ を一意にもつ。

注2. 方程式 (L) は、文献[1]で $n=1$ (従って $\Omega=(0,\omega)$, $\Gamma=\{0\}$) の場合が論じられている。既知関数 h, g は以下の様に述べられている。

変数 $w(0,t)-h(t)$ をもつ関数 g は Lin の問題では

$$c_1[w(0,t)-c_2 \sin t]^3$$

の形であり、放射問題ではべき関数である。ほとんどの物理的な状況では g と h は連続関数であり、しばしば h は周期性をもち、パルス状のエネルギー源を表わしている。

[1]では、(L)を積分方程式に帰着させて逐次近似で解いている。(~~多~~微分作用素論は使っていない。)

命題3は以下の様に証明される。

$h(\cdot,\cdot)$を$\bar{\Omega}\times\mathbb{R}$に拡張して

$$h(\cdot,t)\in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R};L^2(\Omega))\cap L^2_{loc}(\mathbb{R};H^2(\Omega))$$

$$h(\cdot,t+\pi)=-h(\cdot,t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

$$(\partial/\partial n)h(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\Gamma\times\mathbb{R}$$

とする。関数u, fを

$$u(x,t)=w(x,t)-h(x,t)$$

$$f(x,t)=(\partial/\partial t)h(x,t)-\Delta h(x,t)$$

とおくと、(L)は次の形になる:

$$(L)'\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\Delta u(x,t)=f(x,t), & (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R},\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x,t)+g[u(x,t)]=0, & (x,t)\in\Gamma\times\mathbb{R}.\end{cases}$$

$L^2(\Omega)$上の関数φを以下で定義する:

$$\varphi(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega|\nabla u(x)|^2dx+\int_\Gamma G(u(\eta))ds, & u\in D(\varphi)\\ +\infty, & u\in L^2(\Omega)\setminus D(\varphi).\end{cases}$$

$$D(\varphi)=\left\{u\in H^1(\Omega):\int_\Gamma G(u(\eta))ds\ \text{が有界}\right\}.$$

ここにおいて $G(r)=\int_0^r g(\rho)d\rho$, $r\in\mathbb{R}$ とした。仮定(g1)

より G は $\mathbb{R}$ 上の凸関数となるので、φ は $L^2(\Omega)$ 上の適正下半連続な凸関数である。φ の劣微分 $\partial\varphi$ は以下で定まる。

$$\partial\varphi(u) = \{-\Delta u\}$$
$$D(\partial\varphi) = \{u \in H^2(\Omega) \cap D(\varphi) ; \frac{\partial u}{\partial n}(\eta) + g[u(\eta)] = 0\}$$

従って、$(L)'$ は方程式 $(E; \varphi, f)$ に帰着され、定理1を適用できるので、$(L)'$ の（故に (L) の）周期解が存在する。周期解の一意性は、注1を用いれば良い。

3. 定理1の証明

$u \in W^{1,2}_{loc}((0,\infty) : H)$ を $(E; \varphi, f)$ の任意の解とする。Browder-Petryshyn の不動点定理により、集合 $\{u(2n\pi)\}_{n\geq 1}$ が有界である事を示せば十分である。以下、補題によって軌跡 $\{u(t) : t \geq 0\}$ の有界性を示す。

補題1. 極大単調作用素 $A : H \to H$ が odd（$A(-x) = -Ax$, $x \in D(A)$, かつ $-D(A) = D(A)$）で、f は(1)(3)を満たすとする。このとき $u \in W^{1,1}_{loc}((0,\infty) : H)$ が

(E)′ $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t)$

の解ならば、以下が成立する。

(8) $\|u(t+\pi)+u(t)\| \leqq \|u(\pi)+u(0)\| \ (=C_1)$

(9) $\|u(t+\pi)\| - \|u(t)\| \leqq \int_0^{2\pi} \|f(s)\|\,ds \ (=C_2)$.

注3. φ が even であれば $\partial\varphi$ は odd である。従って上の仮定は成立している。

補題1の証明. 簡単のため $u'(t)=(d/dt)u(t)$ と書き、Aが一価であるかの様にも書く。Aが odd なので、

$$u'(t) - f(t) \in -A(u(t)) = A(-u(t)), \quad \text{a.e. } t>0.$$

従って(3)より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t+\pi)+u(t)\|^2 &= 2\langle u'(t+\pi)+u'(t),\ u(t+\pi)+u(t)\rangle \\ &= 2\langle u'(t+\pi)-f(t+\pi)+u'(t)+f(t),\ u(t+\pi)+u(t)\rangle \\ &= 2\langle -A(u(t+\pi))+A(-u(t)),\ u(t+\pi)-(-u(t))\rangle \\ &\leqq 0, \qquad \text{a.e. } t>0.\end{aligned}$$

故に(8)を得る。次に、Aの単調性と $0\in A0$ に注意すれば、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\| &= \|u(t)\|^{-1}\langle u'(t),\ u(t)\rangle \\ &= \|u(t)\|^{-1}\{\langle -Au(t)+A0,\ u(t)-0\rangle + \langle f(t), u(t)\rangle\} \\ &\leqq \|u(t)\|^{-1}\{0+\|f(t)\|\cdot\|u(t)\|\} = \|f(t)\|.\end{aligned}$$

この不等式を区間 $[t, t+\pi]$ で積分すれば(9)を得る。

補題2. (1)(2)(3)の下で、$\{u(t) : t\geq 0\}$ は有界である。

注4. 補題2は、(2)を(2)′にゆるめても同様に証明できる。

補題2の証明. $\{u(t) : t \geq 0\}$ が有界でないとする。

$$t_n = \inf\{t > 0 ; \|u(t)\| \geq n\}$$

と置くと、十分大きな n に対して、$t_n > 0$ で

(10) $\|u(s)\| < \|u(t_n)\| = n, \quad 0 \leq s < t_n.$

が成立する。更に(9)に注意すれば、$t_n \uparrow +\infty$ as $n \to \infty$.

$t_n > \pi$ なる n を任意に固定する。$v \in W^{1,2}_{loc}([t_n - \pi, \infty); H)$ を次の初期値問題の解とする。

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) + \partial\varphi(v(t)) \ni 0, & t \geq t_n - \pi, \\ v(t_n - \pi) = u(t_n - \pi). \end{cases}$$

このとき以下が成立している:

(11) $\|v(t_n) - u(t_n)\| \leqq \displaystyle\int_{t_n-\pi}^{t_n} \|f(s)\| ds \leqq \int_0^{2\pi} \|f(s)\| ds \ (= C_2).$

(12) $\varphi(v(t_n)) \leqq \varphi(v(t)), \quad t \in [t_n - \pi, t_n).$

劣微分の定義と(2),(12)より.

$$\langle -v'(s), -v(t_n) - v(s) \rangle \leqq \varphi(-v(t_n)) - \varphi(v(s))$$
$$= \varphi(v(t_n)) - \varphi(v(s)) \leqq 0$$

又は

$$\langle v'(s), v(t_n) \rangle \leqq -\langle v'(s), v(s) \rangle$$

が a.e $s \in [t_n - \pi, t_n)$ で成立している。従って(10)より

$$\langle v(t_n)-v(t_n-\pi),\ v(t_n)\rangle = \int_{t_n-\pi}^{t_n}\langle v'(s),\ v(t_n)\rangle ds$$

(13) $$\leqq \int_{t_n-\pi}^{t_n}\langle -v'(s),\ v(s)\rangle ds = \frac{1}{2}\left\{\|v(t_n-\pi)\|^2-\|v(t_n)\|^2\right\}$$

$$\leqq \frac{1}{2}\|v(t_n-\pi)\|^2 = \frac{1}{2}\|u(t_n-\pi)\|^2 \leqq \frac{n^2}{2}.$$

一方、$y=v(t_n-\pi)+u(t_n)\ \left(=u(t_n-\pi)+u(t_n)\right)$, $z=v(t_n)-u(t_n)$ とおくと、(8)(11)より、$\|y\|\leqq c_1$, $\|z\|\leqq c_2$。従って

$$\langle v(t_n)-v(t_n-\pi),\ v(t_n)\rangle$$

(14) $$= \langle u(t_n)+z+u(t_n)+y,\ u(t_n)+z\rangle$$

$$\geqq 2\|u(t_n)\|^2-(c_1+c_2)\|u(t_n)\|-c_2(c_1+c_2)$$

$$= 2n^2-(c_1+c_2)n-c_2(c_1+c_2)$$

を得る。

(13)(14)より

$$\frac{n^2}{2} \geqq 2n^2-(c_1+c_2)n-c_2(c_1+c_2).$$

これは、nが任意であり、c_1, c_2がnに依存しない定数であった事に矛盾する。従って$\{u(t);\ t\geqq 0\}$は有界である。

References

[1] W. F. Amwes, Nonlinear partial differencial equations in engineering, Academic Press, New York, 1965.

[2] P. Benilan and H. Brezis, Solutions fables d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert, Ann. Inst. Fourier, Grenble 22 (1972), 311-329.

[3] A. Haraux, Equations d'evolution nonlineaires: solutions lineaires et periodiques, Ann. Inst. Furier, 28, 2 (1978), 201-220.

[4] A. Haraux, Nonlinear evolution equations, Lecture Notes in Math., 841, Springer-Verlag, Berlin-Heiderberg-New York, 1981.

[5] H. Okochi, A note on asymptotic strong convergence of nonlinear contraction semigroups, Proc. Japan Acad., 56 (1980), 83-84.

[6] Y. Yamada, Periodic solutions of certain nonlinear parabolic differential equations in domains with periodicaly moving boundaries, Nagoya Math. J., 70 (1978), 111-123.