数理解析研究所講究録
580巻 1986年 158-168

Defect群の normal subgroup とイデアルについて

北大 理学部 池田 正 (Tadashi Ikeda)

1. 準備と定義

Gを有限群，pを素数，kを標数pの代数的閉体とする。以下，すべてのk-多元環Aはk上有限次元とし，すべてのA-加群はk上有限次元の左A-加群とする。ここでの目的は，群環（又はブロック代数）の両側イデアル，又はそれと双対的な商環の性質を調べることである。我々の主な研究対象は，以下の，epimorphic local interior G-algebra（以下，略して e.l.i G-algebra）である。

<u>定義</u> 群環kGからk-多元環Aへのk-多元環準同型な全射 $\rho : kG \twoheadrightarrow A$ が与えられた時，組(A, ρ)を epimorphic interior G-algebra とよび，さらにAの中心$Z(A)$が局所環になった時，組(A, ρ)を epimorphic local interior G-algebra とよぶ。

e.i. G-algebra (A, ρ) と $H \leq G$ に対し、$A^H = \{a \in A \mid \rho(h) a \rho(h^{-1}) = a$ for $\forall h \in H\}$ とすると A^H は A の部分環になる。A^H から A^G への k-線型写像 $Tr_H^G : A^H \longrightarrow A^G$ を $Tr_H^G(a) = \sum_{g \in [G/H]} \rho(g) a \rho(g^{-1})$ で定義する。ただし、$[G/H]$ は G の左-coset の代表系とする。この時、像 $Tr_H^G(A^H)$ は A^G 内の両側イデアルになる。そこで、e.l.i G-algebra (A, ρ) に対し $A^G = Tr_H^G(A^H)$ をみたす G の部分群 H の中で、極小のものをとると、それは、G の p-部分群で、かつ G-共役を除いて一意的に定まる。これを e.l.i G-algebra の defect 群とよぶ。

今、$B = kGe$ (e は kG の中心的原始巾等元) とすると、B は e を単位元とする k-多元環になり、$\rho_B : x \longmapsto xe$ によって、(B, ρ_B) は e.l.i G-algebra になる。これをブロック B から作られた e.l.i G-algebra とよぶ。この defect 群は古典的なブロックの defect 群になる。また、e.l.i G-algebra (A, ρ) に対し $\rho(B) \neq 0$ となるとき、(A, ρ) は B に属すという。

e.i. G-algebra (A, ρ) は、$A \ni a$, $(g, h) \in G \times G$ に対し、

$$(g, h) a = \rho(g) a \rho(h^{-1})$$

とすることによって、A は $G \times G$-加群とみなすことができる。そこで、以下の性質が示される [1]。

補題1　e. i. G-algebra (A, P) に対し、$G\times G$-加群 A が、直既約になるための必要十分条件は、(A, P) が、e. l. i G-algebra となることである。

そこで、$G\times G$-加群 A の vertex について調べてみると、次の定理をえる。[1]。

定理2　defect群が D となる e. l. i. G-algebra (A, P) に対し、$G\times G$-加群 A の vertex $vtx_{G\times G}A$ は、

$$D^{\Delta} \underset{G\times G}{\leq} vtx_{G\times G}A \underset{G\times G}{\leq} D\times D \qquad (1)$$

をみたす。ここで $D^{\Delta}=\{(d, d)\in D\times D \mid d\in D\}$ で、$\leq_{G\times G}$ は $G\times G$-共役で含まれるものとする。

定理2の(1)の式において、実は 適当に共役をとることによって、$D^{\Delta}\leq vtx_{G\times G}A\leq D\times D$ となることが示される。そこで、$(vtx_{G\times G}A)_1=\{d\in D \mid (d, 1)\in vtx_{G\times G}A\}$ とおくと、$(vtx_{G\times G}A)_1$ は、D の正規部分群となり 定理2より、容易に次の系を導くことができる。

系3　(A, P) を e. l. i. G-algebra とし その1つの defect群 D を固定する。この時、D の正規部分群 $(vtx_{G\times G}A)_1$ は、$N_G(D)$-

共役を除いて、一意的に定まる。

我々の目標は、この正規部分群 $(vtx_{G\times G}A)_1$ の性質を調べることである。

2. e.l.i G-algebra の性質(defect群について)

2つの、e.i. G-algebra (A, ρ) と (A', ρ') について、A から A' への k-多元環準同型 φ があって、図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] & & A' \\ & kG \arrow[ul, "\rho"] \arrow[ur, "\rho'"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするとき、φ を morphism とよぶ。次の事実は、容易に示される。

<u>補題</u>4. (A, ρ) と (A', ρ') を2つの e.l.i G-algebra とする。もし、(A, ρ) から (A', ρ') への morphism が存在すれば、(A, ρ) の defect群は (A', ρ') の defect群を G-共役を除いて含む。

次の性質は、e.l.i G-algebra 固有の性質である。

<u>補題</u>5. (A, ρ) をブロック B に属する defect 群が D となる e.l.i G-algebra とする。この時、B に属する単純 kG-加群 V

が存在して $vtx_G V \leq_G D$ となる。

証明. $I = \{x \in kG \mid \rho(x) = 0\}$ とする。すると I は kG の両側イデアルとなる。今, I を含む極大両側イデアルを I_M とすると, B に属する e.l.i G-algebra $(kG/I_M, \rho_{I_M})$ をえる。但し, ρ_{I_M} は canonical な map とする。明らかに (A, ρ) から $(kG/I_M, \rho_{I_M})$ へ morphism が存在するので, D は $(kG/I_M, \rho_{I_M})$ の defect 群を含む。一方 I_M は極大なので, $(kG/I_M, \rho_{I_M})$ の defect 群はある単純 kG-加群の vertex と一致して, 上の補題をえる。

この補題より、次の定理をえる。

<u>定理</u> 6. B を defect 群が D となるブロックとする。この時 B に属するすべての e.l.i G-algebra の defect 群がすべて D となるための必要十分条件は、B に属するすべての単純 kG-加群の vertex がすべて D となることである。

<u>系</u> 7. Q を G の正規 p-部分群とした時, 任意の e.l.i G-algebra (A, ρ) の defect 群は Q を必ず含む。

系8. P を p-群とする。この時、すべての e.i. P-algebra は、必ず e.l.i. P-algebra で、その defect 群は P となる。

3. e.l.i. G-algebra の性質（$(\mathrm{vtx}_{G\times G}A)_1$ について）

次の定理は、$(\mathrm{vtx}_{G\times G}A)_1 = \langle 1\rangle$ となる場合の特徴付けで、本質的には [ ] の Theorem である。

定理9. ブロック B に属する e.l.i G-algebra (A, ρ) について、以下は同値である。

(i) $(\mathrm{vtx}_{G\times G}A)_1 = \langle 1\rangle$。

(ii) 制限 $A\downarrow_{G\times\langle 1\rangle}$ は projective $G\times\langle 1\rangle$-加群である。

(iii) ρ の制限 $\rho|_B : B \longrightarrow A$ は k-多元環同型である。

証明 [1] 又は [2] を参照。

以下、商群との関係を調べてみる。$N \triangleleft G$ とし $G^0 = G/N$ とする。この時、canonical map $G \longrightarrow G^0$ は、k-algebra homomorphism $kG \longrightarrow kG^0$ を誘導し、これを通して、e.i. G^0-algebra (e.l.i. G^0-algebra) (A, ρ^0) は e.i G-algebra (e.l.i. G-algebra) とみなすことができる。この節の前半の目標は、次の定理を証明することである。

__定理__ 10. $N \lhd G$ とし、$N \le K \le H \le G$ とする。今、(A, P^0) を e.l.i. G^0-algebra で、その defect 群が H^0、$(vtx_{G \times G^0} A)_1 = K^0$ とした時、(A, P^0) から誘導される e.l.i. G-algebra (A, P) に対し、その defect 群は H の p-Sylow 部分群で、$(vtx_{G \times G} A)_1$ は K の p-Sylow 部分群となる。

この定理を示すために、次のいくつかの補題を用意する。証明は容易である。

__補題__ 11 $N \lhd G$ とし、S を N の p-Sylow 部分群とする。また H を H/N が p-群となる $N \le H \le G$ とする。今 S を含む H の p-部分群 Q が $QN = H$ をみたせば、Q は H の p-Sylow 部分群となる。

__補題__ 12 $N \lhd G$, $N \le K \le G$ とする。e.i. G^0-algebra (A, P^0) とそれから誘導された e.i. G-algebra (A, P) に対し、$A^G = Tr_K^G(A^K)$ となるための条件は、$A^{G^0} = Tr_{K^0}^{G^0}(A^{K^0})$ となることである。

この2つの補題と、defect 群の定義を用ることによって、次の補題が示される。

<u>補題</u>13　$N \triangleleft G$. $N \le H \le G$ とし、(A, φ^0) を defect 群が H^0 となる e.l.i. G^0-algebra とする。(A, φ^0) より誘導された e.l.i. G-algebra (A, φ) の defect 群は H の p-Sylow 部分群になる。全く同様に、V を vertex が H^0 となる直既約 G^0-加群とした時、それから誘導される直既約 G-加群の vertex は H の p-Sylow 部分群になる。

定理10の証明.　前半は、補題13より自明. そこで、後半を示す。まず、$L \le G \times G$ で $N \times N \le L$ とし、$vtx_{G^0 \times G^0} A = L/N \times N$ とする。補題13より $vtx_{G \times G} A$ は L の p-Sylow部分群である。一方 $(vtx_{G^0 \times G^0} A)_1 = (L/N \times N)_1 = K^0$ より、位数を比較して、$|L| = |H| \cdot |K|$ となる。一方 H の p-Sylow 群を Q, K の p-Sylow群を P として、$P_{-1} = \{(gh, h) \in Q \times Q \mid g \in P,\ h \in Q\}$ とすると $(P_{-1})_1 = P$ となり $|P_{-1}| = |P| \cdot |Q|$ よって P_{-1} は L の p-Sylow 群である。よって、補題13より後半が示される。

次に $(vtx_{G \times G} A)_1$ が巡回群になる場合を考えてみる。そのため、1つ記号を導入する。D が G の p-部分群で、Q を D の正規部分群とする。この時 $\mathfrak{A}(D, Q)$ を defect 群が D となり、$(vtx_{G \times G} A)_1$ が Q となる e.l.i G-algebra (A, φ) 全体の同型類の作る族とする。この時、次の定理が成立する。

<u>定理</u>14　D, Q と $\mathfrak{A}(D, Q)$ を上のとおりとする。もし Q が巡廻群ならば、$\{A \mid (A, \rho) \in \mathfrak{A}(D, Q)\}$ の同型類の個数は有限個である。

証明. $(A, \rho) \in \mathfrak{A}(D, Q)$ とする。すると $A\downarrow_{Q\times\langle 1\rangle}$ は Q-projective になる。よって $A\downarrow_{G\times\langle 1\rangle} \mid A\downarrow_{Q\times\langle 1\rangle}\uparrow^{G\times\langle 1\rangle}$ で Q が巡廻群より、

$\dim_k A \leq |G|$ から $A\downarrow_{G\times\langle 1\rangle}$ の同型類の個数は有限個である。従って、定理を示すためには、2つの e.l.i G-algebra (A, ρ) と (A', ρ') で、$G\times\langle 1\rangle$-加群 $A\downarrow_{G\times\langle 1\rangle}$ と $A'\downarrow_{G\times\langle 1\rangle}$ が $G\times\langle 1\rangle$-加群として同型ならば、A と A' が k-多元環として同型であることを示せばよい。ところが、ρ, ρ' が全射より

$$
\begin{aligned}
& A\downarrow_{G\times\langle 1\rangle} \simeq A'\downarrow_{G\times\langle 1\rangle} && (G\times\langle 1\rangle\text{-加群として}) \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{End}_{G\times\langle 1\rangle}(A) \simeq \mathrm{End}_{G\times\langle 1\rangle}(A') && (k\text{-多元環として}) \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{End}_A({}_AA) \simeq \mathrm{End}_{A'}({}_{A'}A') && (\quad " \quad) \\
\Leftrightarrow\ & A \simeq A' && (\quad " \quad)
\end{aligned}
$$

となるから、A と A' は k-多元環として同型になる。

4. 例

この節では、G が位数が p^n の巡廻群と klein の4群の時に $(\mathcal{V}tx_{G\times G}A)_1$ を決定しておく。

例 15　$P = \langle g \rangle$ ：位数 p^n の巡回群

kP は uniserial より、$1 \leq l \leq p^n$ に対し、$\dim_k A_l = l$

となる e.l.i. P-algebra $(A_l : P_l)$ が一意的にある。

$P_l \leq P$ で $|P : P_l| = p^l$ とする。

この時、

$$(vtx_{P\times P} A_l)_1 = \begin{cases} P_1 & l = p^n \\ P_2 & p^{n-1} \parallel l \\ P_3 & p^{n-2} \parallel l \\ \vdots & \vdots \\ P & p \nmid l \end{cases}$$

となる。

例 16　$P = \langle g \rangle \times \langle h \rangle$ ：klein の4群、$p = 2$

kP の左イデアルの同型類は次で与えられる。

$2(\gamma)$; $g \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2(\infty)$: $g \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3 ; $g \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$1\ ;\ g \longrightarrow (1)\ ,\quad h \longmapsto (1)$$

ここで、$\gamma \in k$ である。これに応じて、e.l.i p-algebra を $(A_{2(\gamma)}, p_{2(\gamma)})$, $(A_{2(\infty)}, p_{2(\infty)})$, (A_3, p_3), (A_1, p_1) とする。この時

$$(vtx_{p\times p} A_{2(\gamma)})_1 = \begin{cases} P & \gamma \neq 0, 1, \infty \\ \langle g \rangle & \gamma = \infty \\ \langle h \rangle & \gamma = 0 \\ \langle gh \rangle & \gamma = 1 \end{cases}$$

$$(vtx_{p\times p} A_3)_1 = P$$

$$(vtx_{p\times p} A_1)_1 = P$$

となる。

（参考文献）

1. T. Ikeda, A characterization of blocks with vertices, to appear.

2. 〃 , Block 代数の直既約な商環について、「代数的組合せ論および群論」報告集 1985

3. L. Puig, Pointed groups and construction of characters, Math. Z 176 (1981), 265-292.