数理解析研究所講究録
580巻 1986年 107-123

Twisting 作用素について

奈良教育大 浅井照明
(Teruaki Asai)

§0 0.1. 序. 本稿の目的は、筆者が中心が連結の有限古典群の場合に示した結果が実は SL_n の場合にも成立することを示すことにある。

G. Lusztig [9] は、中心が連結な有限 reductive 群の既約表現達の分類の過程で既約指標を "family" にグループ分けし、更に各 "family" ごとにある有限群に associate した "Fourier 変換" なる概念を導入し、その Fourier 変換によって既約指標の次元公式及び半単純元における指標値の式を記述することに成功している。本稿で問題とする twisting 作用素 t_1^* とは、"指標の持ち上げ"(川中 [4])のノルム写像の定義の過程で導入された類関数の空間の上の線型作用素であり [1] において筆者は中心が連結な有限古典群の場合に、twisting 作用素の作用が実は上記の "family" の Fourier 変換の言葉で記述できることを示した。従って この両者の間に密接な関係があることがわかるのであるが この様な現象は SL_2 の指標表を見れば一般化できることが予測される。ここでは SL_n を取り扱う。

なお本稿の結果は、そのmotivationにおいて、川中([5], §4)の結果に一部影響を受けたものである。

又、現在、中心が連結でない有限 reductive 群の既約指標の分類に関しては、G. Lusztig が "Character Sheaves I-V" において、予測的理論を展開している。本稿において導入される "family" は G. Lusztig の "Character Sheaves" の "family" と同じものと推察される。

0.2 記号その他。

G は常に有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された連結 reductive 群とし、Frobenius 写像は F で記し、又 F は G に左から作用すると定める。G^F を G の F-固定点の全点とする。G^F は有限群であり、その共役類 $G^F/\sim$ の間には次の様な 1-1 対応があり、

$$t_1 : G^F/\sim \longrightarrow G^F/\sim \quad (x = \alpha^{-1}\,{}^F\alpha \longmapsto {}^F\alpha\,\alpha^{-1},\ \alpha \in G)$$

これは、G^F の類関数の空間 $C(G^F/\sim)$ の上に線型作用素 t_1^* を定める。

$$t_1^* : C(G^F/\sim) \longrightarrow C(G^F/\sim) \quad (f \longmapsto f \circ t_1)$$

これを twisting 作用素と呼ぶ。

§1. Deligne-Lusztig [2] からの予備知識。

1.1 G, F は 0.2 のものとし、G^* を G の dual 群とする。G の F-不変な極大トーラス T と T^F の一次の

指標θを考える。(T, θ) (のG^F-共役)から、G^*のF-不変な極大トーラスT^*と$s \in (T^*)^F$のpair (T^*, s)が(G^{*F}-共役を除いて)定まる。(T^*, s)を(T, θ)のdual pairと呼ぶことにする。

$$(T, \theta) \longmapsto (T^*, s)$$

この対応から、(T, θ)に対してG^*のF-不変な半単純共役類$\{s\}$が定まり、G^Fの既約指標達(or 既約表現の同値類達) $\widehat{G^F}$はまず次の様に分割する。

$$\widehat{G^F} = \bigcup_{\{s\}} \mathcal{E}(G^F, \{s\}) \quad (\text{disjoint})$$

但し$\{s\}$はG^*のF-不変な半単純共役類を走り、又

$$\mathcal{E}(G^F, \{s\}) = \left\{ \rho \in \widehat{G^F} \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle \rho, R_T^\theta \rangle \neq 0 \\ (T, \theta) \mapsto \{s\} \end{array} \right\}$$

であり、R_T^θはDeligne-Lusztigの一般指標である。もしも、Gの中心が連結である時は、次の様な形の既約表現ρ_sが$\mathcal{E}(G^F, \{s\})$に属している。

$$\rho_s = \sum_{\substack{(T, \theta)/\sim \\ (T, \theta) \mapsto \{s\}}} \frac{(-1)^{\sigma(G) - \sigma(T)}}{\langle R_T^\theta, R_T^\theta \rangle} R_T^\theta$$

但しσはsemisimple rank.

1.2 さて以後、Gの中心は、必らずしも連結でないとする。この時、次の様な$\mathbb{F}_q$上定義された連結reductive群$\tilde{G}$

が 存在する。

(i) $G \hookrightarrow \tilde{G}$ $(/\mathbb{F}_q)$

(ii) $\tilde{G}$ の中心は連結。

(iii) $DG = D\tilde{G}$.

但し, DG 及び $D\tilde{G}$ は G 及び $\tilde{G}$ の derived group である。G 及び $\tilde{G}$ の dual group をそれぞれ G^* 及び $\tilde{G}^*$ とすれば 埋め込み

$$\iota : G \hookrightarrow \tilde{G}$$

によって全射

$$\iota^* : \tilde{G}^* \longrightarrow G^*$$

が誘導される。さて $\tilde{T}$ を $\tilde{G}$ の F-不変な極大トーラスとし, $\tilde{\theta} \in (\tilde{T}^F)^\wedge$ を定め,

$$T = \tilde{T} \cap G \quad , \quad \theta = \tilde{\theta}|T^F \in (T^F)^\wedge$$

とする。$(\tilde{T}^*, \tilde{s})$ を $(\tilde{T}, \tilde{\theta})$ の dual pair とし,
(T^*, s) を (T, θ) の dual pair とする時

$$\iota^*(\{\tilde{s}\}) = \{s\}$$

であり, $\iota^*(\tilde{s}) = s$ と 思って差しつかえない。
Wを$\tilde{T}$の Weyl 群とすれば $T, \tilde{T}^*, T^*$ の Weyl 群とも同一視できる。 Wの部分群を次の様に定める。

$$W_{\tilde{s}} = \{ w \in W \mid \mathrm{ad}\, w(\tilde{s}) = \tilde{s} \}$$

$$W_s = \{ w \in W \mid \mathrm{ad}\, w(s) = s \}$$

(但し ad は adjoint 作用である: $\mathrm{ad}\,w(t) = w t w^{-1}$) W_s は次の様にも書ける。

$$W_s = \{ w \in W \mid \mathrm{ad}\,w(\tilde{s}) = \tilde{s} z \text{ for some } z \in \mathrm{Ker}\,\pi^* \}$$

従って $W_{\tilde{s}}$ は W_s の部分群である。$\tilde{G}$ は中心が連結であるから, $\tilde{G}^*$ の derived group は単連結であり, 従って $\tilde{s}$ の中心化群 $Z_{\tilde{G}^*}(\tilde{s})$ は連結であり、連結な reductive 群となる。その Weyl 群は $W_{\tilde{s}}$ である。又 s の中心化群 $Z_{G^*}(s)$ の単位元成分を $Z_{G^*}(s)^0$ とすれば,

$$Z_{G^*}(s) / Z_{G^*}(s)^0 \cong W_s / W_{\tilde{s}}$$

さて、ここで, $Z_{G^*}(s)^0$ の T^* に関しての root 系 Φ_s を考え、その F-不変な positive set Φ_s^+ を定めよう。$W_{\tilde{s}}$ は Φ_s に関しての Weyl 群であり, 又 W_s は自然に Φ_s に作用する。そこで,

$$\Gamma = \{ w \in W_s \mid w \Phi_s^+ = \Phi_s^+ \}$$

によって, Wの部分群Γ を定めれば,

$$W_s = W_{\tilde{s}} \cdot \Gamma \quad (\text{半直積})$$

になる. 従って特に

$$Z_{G^*}(s) / Z_{G^*}(s)^0 \cong \Gamma$$

である。又 Γは, F-不変であるから, 上の同型は Fの作用と compatible となる 一方で,

$$W_s \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\iota^* \quad (w \longmapsto w\hat{s}w^{-1}\hat{s}^{-1})$$

は、Fの作用と可換な準同型で、その核は$W_{\hat{s}}$である。よって、その像は、Γと同型である。従って Γは（Fの作用を込めて）$\mathrm{Ker}\,\iota^*$の部分群と同型である。次の様に書ける。

$$\Gamma = \{ z \in \mathrm{Ker}\,\iota^* \mid \hat{s} と \hat{s}z は共役 \}$$

§2. Gelfand-Graev 表現に関連する既約表現。

2.1. Key lemma.

さて、Deligne-Lusztig [2] により次の対応が、定まる。

$$\left\{ (T', \theta') \;\middle|\; \begin{array}{l} T' : G の F\text{-}不変な極大トーラス \\ \theta' \in (T'^F)^\wedge \\ (T', \theta') と (T, \theta) は閉体上共役 \\ \qquad\qquad (\text{geo. conj.}) \end{array} \right\} \Big/ \underset{G^F}{\sim}$$

$$\xrightarrow{1-1} W_s / \underset{F}{\sim}$$

上の対応で

$$(T_w, \theta_w) \longmapsto \{w\} \in W_s / \underset{F}{\sim}$$

となる様に、F-不変な極大トーラス T_w と $\theta_w \in (T_w^F)^\wedge$ を定める。（G^F-共役を除いて定まる。）以上の下に次の定理が成立する。

<u>定理2.1.1.</u>　Fが　Gの中心Zの　component 群 Z/Z° へ、identity で作用するとする。その時．

① FのΓへの作用は identity.

② $^\forall w \in W_s$ に対して、$\varphi_w \in (Z^F)^\wedge$ が定まり、次の性質が満たされる。

(i) $W_s \ni w \longmapsto \varphi_w \in (Z^F)^\wedge$

は準同型で核は $W_{\tilde{s}}$ に一致。

(ii) $^\forall z \in Z^F$ に対して．

$$\theta_w(z) = \varphi_w(z)\,\theta(z)$$

証明は単にルーチンであり、省略することにする。

<u>2.2.</u> 今後Fは Z/Z° に identity で作用するとする。従って定理2.1.1からFのΓへの作用は identity である。さて、$Z_{G^*}(s)/Z_{G^*}(s)^\circ \simeq \Gamma$ であるから、

$$\{s' \in G^{*F} \mid s' \underset{G^*}{\sim} s\} / \underset{G^{*F}}{\sim} \simeq \Gamma/_F = \Gamma$$

が成立する。そこで $w \in \Gamma$ に対して、G^{*F} の半単純元 s_w で閉体上 s と共役で、上の対応で

$$s_w \longleftrightarrow w \in \Gamma$$

となるものを選ぶ。

$$\iota : G \longrightarrow \tilde{G}$$

が、injective であるから、s_w の G^{*F}–共役類 $\{s_w\}$ は、ある $\tilde{G}^{*F}$–共役類 $\{\tilde{s}_w\}$ の i^* による像となっている。そこで

$$i^*(\tilde{s}_w) = s_w$$

と取って差しつかえない。明らかに $\{s_w \mid w \in \Gamma\}$ は、

$$\{\tilde{s}' \mid \tilde{G}^* \text{の半単純元},\ i^*(\tilde{s}') \underset{G^*}{\sim} s\}$$

を $\tilde{G}^{*F}$–共役に分けた時の mod $(\mathrm{Ker}\, i^*)^F$ の代表である。1.1 で $\mathcal{E}(\tilde{G}^F, \{\tilde{s}_w\})$ に属する $\tilde{G}^F$ の既約表現 $\rho_{\tilde{s}_w}$ を定義した。以後簡単の為

$$\tilde{\rho}_w = \rho_{\tilde{s}_w}$$

と置く。そして、

$$\rho_w = \tilde{\rho}_w \mid G^F$$

と置く。ρ_w は $\{s_w\}$ のみに依存する G^F の表現である。さて

$$\{\rho_w \mid w \in \Gamma\}$$

の既約分解を考えよう。その為に、

$$\tau = \theta \mid Z^F$$

と置き、U を G の F–不変な極大巾単群とし、χ を U^F の general position の（一次の）指標とする。$w \in \Gamma$ に対して、次の誘導表現を考えよう。

$$I_w = \mathrm{Ind}_{Z^F \times U^F}^{G^F} (\varphi_w \tau) \otimes \chi$$

但し $\varphi_w \tau$ は Z^F の一次の指標で

$$\varphi_w \tau : z \longmapsto \varphi_w(z)\tau(z)$$

となるものである（φ_w は 2.1.1 のもの）。
この時、定理 2.1.1,② を使用することによって 容易に次が示せる。

<u>命題 2.2.1</u> $\forall w, w' \in \Gamma$ に対して、

$$\langle I_w, \rho_{w'} \rangle_{G^F} = \begin{cases} 1 & \text{if } w = w', \\ 0 & \text{if otherwise}. \end{cases}$$

命題 2.2.1 より、$\forall w \in \Gamma$ に対して、ρ_w は ある既約表現 を multiplicity 1 で 含む。ところが ρ_w は $\tilde{G}^F$ の既約表現の制限であり、従って その既約成分 は $\tilde{G}^F$ の元の adjoint 作用で移り合う。よって

<u>命題 2.2.2</u> $\forall w \in \Gamma$ に対して、ρ_w は multiplicity free である。

<u>2.3.</u> <u>1.2</u> によって、Γ は $\mathrm{Ker}\,\tau^*$ の部分群と同一視

できて

$$\mathcal{P}=\{z\in \operatorname{Ker}\iota^* \mid \tilde{s} \text{ と } \tilde{s}z \text{ は共役}\}$$

であった。$\iota^*(\tilde{s})$ と $\iota^*(\tilde{s}_w)$ は閉体上共役であるから、

$$\mathcal{P}=\{z\in \operatorname{Ker}\iota^* \mid \tilde{s}_w \text{ と } \tilde{s}_w z \text{ は共役}\}$$

である。さて $\tilde{G}^F/G^F$ はアーベル群であり、ρ_w $(w\in\mathcal{P})$ は $\tilde{G}^F$ の既約表現 $\tilde{\rho}_w$ の制限である。従って、

$$\langle \rho_w, \rho_w \rangle = \#\{\alpha\in(\tilde{G}^F/G^F)^\wedge \mid \tilde{\rho}_w \cong \tilde{\rho}_w\otimes\alpha\}$$

である。dualization によって $\alpha\in(\tilde{G}^F/G^F)^\wedge$ は $z_\alpha\in(\operatorname{Ker}\iota^*)^F$ に対応する。又

$$\tilde{\rho}_w\otimes\alpha = \rho_{\tilde{s}_w}\otimes\alpha = \rho_{\tilde{s}_w z_\alpha}$$

であり、次が成立。

$$\tilde{\rho}_w \cong \tilde{\rho}_w\otimes\alpha$$
$$\iff \tilde{s}_w \text{ と } \tilde{s}_w z_\alpha \text{ が } \tilde{G} \text{ で共役}$$
$$\iff z_\alpha \in \mathcal{P} \quad (\hookrightarrow \operatorname{Ker}\iota^*)$$

$$\therefore \quad \langle \rho_w, \rho_w \rangle = \#\{z\in\mathcal{P} \mid {}^F z = z\}$$

定理2.1.1.① より F は $\mathcal{P}$ に identity で作用。
よって

命題2.3.1　$\forall w\in\mathcal{P}$ に対して

① $\langle \rho_w, \rho_w \rangle = |\Gamma|$

② 次は群として同型。

$$\{\alpha \in (\tilde{G}^F/G^F)^\wedge \mid \tilde{\rho}_w = \tilde{\rho}_w \otimes \alpha\} \xrightarrow{\sim} \Gamma \quad (\alpha \mapsto z_\alpha)$$

<u>2.4.</u> $\Gamma \subset \mathrm{Ker}\,\psi^*$ と思う。$w \in \Gamma$に対応する $\tilde{G}^F/G^F$ の一次の指標を ψ_w で記そう。

$$w \in \Gamma \longmapsto \psi_w$$

は命題2.3.1,② の逆写像である。さて $\tilde{G}^F$ の部分群 K を

$$K = \bigcap_{w \in \Gamma} \mathrm{Ker}\,\psi_w$$

で定義する。

$$\tilde{G}^F \rhd K \rhd G^F$$

であり、$\tilde{G}^F/K$ がアーベル群であり、又

$$\{\psi_w \mid w \in \Gamma\}$$

が $\tilde{G}^F/K$ の相異なる指標全てを与えることから

<u>命題2.4.1</u> $\tilde{G}^F/K \xrightarrow{\sim} \Gamma$

<u>2.5</u> ρ_w $(w \in \Gamma)$ の既約成分の1つを今、仮に、ρ_0 とすれば、<u>命題2.2.2</u> 及び <u>2.4</u> より

$$K = \{g \in \tilde{G}^F \mid \rho_0 \cong \rho_0 \cdot \mathrm{ad}\, g^{-1}\}$$

$$\|$$

である。今 命題2.4.1 の同型 を固定し、
$w' \in \Gamma \cong G^F/K$ に対して、G^F における代表元を $\dot{w}'$ とする。その時、命題2.2.1 によって定まる I_w, ρ_w の共通の既約成分を $\rho_{(w,e)}$ とすれば、ρ_w の既約成分は

$$\{\rho_{(w,e)}\cdot \mathrm{ad}\,\dot{w}'^{-1} \mid w' \in \Gamma\}$$

となる。(cf. 命題2.2.2)

$$\rho_{(w,w')} = \rho_{(w,e)}\cdot \mathrm{ad}\,\dot{w}'^{-1} \quad (w, w' \in \Gamma)$$

と置く。明らかに

命題2.5.1 $\{\rho_{(w,w')} \mid w, w' \in \Gamma\}$ は互いに同値でない G^F の既約表現を与え、

$$\rho_w = \sum_{w' \in \Gamma} \rho_{(w,w')} \qquad {}^\forall w \in \Gamma$$

$$\rho_{(w,w')}\circ \mathrm{ad}\,\dot{w}''^{-1} = \rho_{(w,w''w')} \qquad {}^\forall w, w', w'' \in \Gamma$$

が成立する。

2.6. さて有限群 Γ に対して、次の集合及び pairing を Lusztig [8] に従って導入する。

(i) $M(\Gamma) = \{(x, \sigma) \mid x \in \Gamma,\ \sigma \in Z(x)^\wedge\}/\sim$

(ii) $\{(x,\sigma),(y,\tau)\}$

$$= \sum_{g\in\Gamma} |Z(x)|^{-1}|Z(y)|^{-1}\,\overline{\varphi_1(g^{-1}xg,\tau)}\,\varphi_1(gyg^{-1},\sigma)$$

$x(gyg^{-1}) = (gyg^{-1})x$

$\forall (x,\sigma),\ (y,\tau)\in M(\Gamma)$

今、我々の考察の対象となっているΓは、アーベル群である。
この時

(i) $M(\Gamma)=\{(x,\sigma)\mid x\in\Gamma,\ \sigma\in\hat{\Gamma}\}$

(ii) $\{(x,\sigma),(y,\tau)\} = |\Gamma|^{-1}\,\overline{\tau(x)}\,\sigma(y)$

$\forall (x,\sigma),\ (y,\tau)\in M(\Gamma)$

である。今 同型

$$\Gamma \xrightarrow{\sim} \hat{\Gamma} \qquad (w \longmapsto \tau_w)$$

を固定する。その時 命題2.5.1の記号の下で、

$$\rho(i,\tau_j) = \rho(i,j) \qquad (i,j\in\Gamma)$$

とおく。そして $(i,j)\in\Gamma$ に対し、

$$\hat{\rho}(i,j) \underset{df}{=} \sum_{i',j'\in\Gamma}\{(i,\tau_j),(i',\tau_{j'})\}\,\rho(i',j')$$

と定義する。この時、次が成立する。

<u>命題2.6.1</u> p = good prime とする。

$$\langle I_k,\ t_i^*\,\hat{\rho}(i,j)\rangle = \langle I_k,\ \tau_j(i)\,\hat{\rho}(i,j)\rangle$$

$\forall i,j,k\in\Gamma$

$p=$ good prime とする理由は. $\mathcal{X}_1^*(zu)$ $(z\in Z^F,$ u : unip) が. zu にある $\tilde{G}^F$ の元の adjoint 作用させたものの形に書ける為である. 証明は省略する。

さて. 次の (center に指標つきの) Gelfand-Graev 表現を考えよう。

$$I_k\circ \mathrm{ad}\, w^{-1} = \mathrm{Ind}_{Z^F\times U^F}^{G^F}(\phi_k\tau)\otimes(\chi\circ \mathrm{ad}\, w^{-1})$$

$$k,\ w \in \Gamma \qquad (\Gamma \simeq \tilde{G}^F/K)$$

twisting 作用素 $\mathcal{X}_1^*$ は $\tilde{G}^F$ による adjoint 作用と可換であることから, 命題 2.6.1 は

$$\{I_k\circ \mathrm{ad}\, w^{-1} \mid k,\ w\in\Gamma\}$$

の生成する $|\Gamma|^2$-次元の空間と.

$$\{\rho_{ij} \mid i,j\in\Gamma\}$$

の生成する $|\Gamma|^2$-次元の空間 の基底の間の内積関係を与える。これより 容易に次が示せる。

<u>定理 2.6.2</u> ($p=$ good prime)

$\mathcal{E}(G^F,\{s\})$ に属する G^F の既約表現の指標が張る線型空間が. twisting 作用素 $\mathcal{X}_1^*$ で 固定されると仮定する。すると 次が成立。

$$\mathcal{X}_1^*\,\hat{\rho}_{(i,j)} = \zeta_j(i)\,\hat{\rho}_{(i,j)} \qquad {}^\forall i,j\in\Gamma$$

§3. SL_n

3.1 主定理 $G=SL_n$ とし $n \mid q-1$ とする。
(従って F は Z/Z° に identity で作用する。)
$\{s\}$ を F-不変な G^* の半単純共役類 とし W_s° を $Z_{G^*}(s)$ の Weyl 群とし $\Gamma = Z_{G^*}(s)/Z_{G^*}(s)^\circ$ とする。その時

$$\mathcal{E}(G^F, \{s\}) = \coprod_{\chi\in \widehat{W_s^\circ}^{F}} \mathcal{F}_\chi$$

と分割する。但し χ は W_s° の F-不変な既約指標全てを走る。$\mathcal{F}_\chi$ に次の有限群 Γ_χ を associate させる

$$\Gamma_\chi = \{ i \in \Gamma \mid \chi \circ \mathrm{ad}\, i \simeq \chi \}$$

その時

$$\mathcal{F}_\chi \longleftrightarrow M(\Gamma_\chi)$$

$$\rho_{(x,\sigma)} \longleftrightarrow (x,\sigma)$$

となる既約表現の parametrization を与えることが出来。

$$\hat{\rho}_{(x,\sigma)} = \sum_{(y,\tau)\in M(\Gamma)} \{(x,\sigma),(y,\tau)\}\, \rho_{(y,\tau)}$$

と定義すれば

$$T_1^* \hat{\rho}_{(x,\sigma)} = \sigma(x)\, \hat{\rho}_{(x,\sigma)} \qquad \forall (x,\sigma)\in M(\Gamma)$$

が成立する。

証明は、

$$Z_{G^*}(s) \subsetneq H^* \subset G^*$$

となる F-不変な regular subgr $H \subset G$ (i.e. parabolic の Levi subgr.) がある時は、H に帰着する。あとは定理2.6.2の繰り返しの適用のみでよい。定理2.6.2のみで σ^* の作用が決定できるのは SL_n が type A (cf. proof in [11]) であることによるが、詳細は省略する。

References

[1] T. Asai: On the twisting operators on the finite classical groups, preprint.

[2] P. Deligne and G. Lusztig: Representations of reductive groups over finite fields, Ann. of Math. (2) 103 (1976), 103-161.

[3] M. T. Karkar and J. A. Green, A therorem on the restriction of group characters and its applications to the character theory of SL(n, q), Math. Ann. 215 (1975), 131-134.

[4] N, Kawanaka, Liftings of irreducible characters of finite classical groups I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 28 (1982), 851-861, II, ibid., 30 (1984), 499-516.

[5] N. Kawanaka, Generalized Gelfand-Graev representations of exceptional simple algebraic groups over a finite field, preprint.

[6] G. I. Lehrer, The characters of the finite special linear groups, J. Alg. 26 (1973), 564-583.

[7] G. I. Lehrer, On the values of characters of semisimple groups over finite fields, Osaka J. Math. 15 (1978), 77-99.

[8] G. Lusztig, Unipotent representations of a finite Chevalley groups of type E_8, Quat. J. Math. Oxford 30 (1979), 315-338.

[9] G. Lusztig, Characters of reductive groups over a finite field, Ann. Math. Study 107, Princeton.

[10] G. Lusztig, Character Sheaves, I-V, preprint.

[11] G. Lusztig and B. Srinivasan, The characters of the finite unitary groups, J. Alg. 49 (1977), 167-171.

[12] T. A. Springer and R. Steinberg, Conjugacy classes, in Springer Lecture Notes 131.