数理解析研究所講究録
580巻 1986年 1-15

Multiplicative η-products について

東大教養 近藤 武 (Takeshi Kondo)

本講は，実例に関する話で理論的なものではない。紙数の関係で，保型関数論的な説明は省略し，とくに§2で定義する2つの変換については，極めて形式的に論ずる。詳しくは文献[5]を参照されたい。

§1. Multiplicative η-products の基本的実例.

1.1 便宜のため，次の記号を用いる。シンボル

$$\pi = \prod_{t=1}^{\infty} t^{r_t} \qquad (r_t \in \mathbb{Z})$$

は，有限個の t を除いて $r_t = 0$ のとき，generalized permutation と呼ばれる。

$$\deg(\pi) = \sum_t t r_t$$
$$\operatorname{ord}(\pi) = \text{L.C.M of } \{t \mid r_t \neq 0\} \text{ 最小公倍数}$$
$$wt(\pi) = \frac{1}{2}\sum_t r_t$$

とおく。$wt(\pi)$ は，integer あるいは half-integer である。gen. perm. $\pi = \prod_t t^{r_t}$ に対して，有理式 $\prod_t (x^t - 1)^{r_t}$

を対応させ，これが多項式となるとき，π は Frame shape ~~である~~ と呼ばれる。この多項式は，明らかに有理整係数で最高次の係数は1，しかも根は全て1のべき根である。逆にこのような多項式は，$\prod_t (x^t-1)^{r_t}$ の形に（一意的に）書き表され，したがって Frame shape $\prod_t t^{r_t}$ が対応する。

1.2. $\eta(z)$ を Dedekind η-関数とする：

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \qquad q=e^{2\pi i z}$$

gen. perm. $\pi = \prod_t t^{r_t}$ に対して

$$\eta_\pi(z) = \prod_t \eta(tz)^{r_t}$$

とおく。π が

(1) $\deg(\pi) = 0$ or 24

(2) $\mathrm{wt}(\pi)$ が正の整数

をみたすとする。(1) により，$\eta_\pi(z)$ は

$$\eta_\pi(z) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots \qquad (a_n \in \mathbb{Z})$$

と，q のべき級数に展開されるが

(3) $a_1 \neq 0$

(4) $(m,n)=1 \Longrightarrow a_1 a_{mn} = a_m a_n$

をみたすとき，$\eta_\pi(z)$ は multiplicative η-product と呼ばれる。簡単のため "π が multiplicative" などと

いう云い方もする。

1.3. 注目すべきことは，Leech lattice の自己同型群 $\cdot 0$ から，次のようにして mult. η-products の実例が得られることである。Leech lattice は，24次元ユークリッド空間の lattice だから，$\cdot 0$ は自然な $\mathbb{Q}$ 上の24次元表現 ρ_0 をもつ。$\cdot 0 \ni \sigma$ に対して，固有多項式 $\det(xI - \rho_0(\sigma))$ を考えると，この多項式に 1.1 で説明したようにして，Frame shape $\prod_t t^{r_t}$ が対応する。あまり厳密な書き方ではないが，便宜のため

$$\sigma = \prod_t t^{r_t}$$

のような書き方をする。さて，$\cdot 0$ は 164 個の共役類をもつが，異なる形の Frame shape は 160 個出てくる。そのうち 90 個は，$wt(\sigma) = 0$ (i.e. $\sum r_t = 0$) であるが，他の 70 個は，$wt(\sigma)$ が正整数 (i.e. $\sum_t r_t$ が正の偶数) となる。$\cdot 0$ の Frame shape は，[4] の Table I で与えられているので参照されたい。ここで著しい事実は，次の定理が成立することである。

定理. (1) $wt(\sigma) = 0$ とする。$\eta_\sigma(z) = \prod_t \eta(tz)^{r_t}$ は次の性質をもつ：或る $\Gamma_0(N)$ を含む genus 0 の Fuchs 群が存在して，$\eta_\sigma(z)$ は対応する函数体の生成元である。

(2) $wt(\sigma) > 0$ ならば，$\eta_\sigma(z)$ は multiplicative であ

る。

(1) については、以下本講ではふれないが、明らかに有限群の "moonshines" と密接に関係している。(cf. [1], [4])。(2) の主張は、部分的には何人かの人によって知られていたが、全部をきちんと確めたのは、小池正夫氏である (cf [3])。

参考のため、(2) の内容をもう少し説明しよう。$wt(\sigma) > 0$ なる $\cdot 0$ の元 σ の Frame shape $\sigma = \prod_t t^{r_t}$ は、

$$r_t \geqq 0 \quad (\forall t) \Longrightarrow \text{Type C}$$
$$r_t < 0 \quad (\exists t) \longrightarrow \text{Type E}$$

と呼ばれる。Type C の Frame shape は、25個存在するが、そのうち21個は、24次 Mathieu 群の元を cycle 分割したものに対応する：

1^{24}, $1^8 2^8$, 2^{12}, $1^6 3^6$, 3^8, $1^4 2^2 4^4$, $2^4 4^4$, 4^6, $1^4 5^4$, $1^2 2^2 3^2 6^2$, 6^4, $1^3 7^3$, $1^2.2.4.8^2$, $2^2 10^2$, $1^2 11^2$, $2.4.6.12$, 12^2, $1.2.7.14$, $1.3.5.15$, 3.21, 1.23 (以上 21 個)

他の 4 個は、

$2^3.6^3$, $4^2 8^2$, 4.20, 2.22

である。これら 25 個の $\eta_\sigma(z)$ は primitive cusp form となり、とくに multiplicative である (cf Koike[2])。Type E の Frame shape は 45 (=70−25) 個存在する

が，これらは全て具体的な Eisenstein series と同一視され，これから $\eta_\sigma(z)$ が multiplicative であることが分る (cf [3] の Table I)。例えば $\sigma = 2^{16}/1^8$ とすると，

$$\eta_\sigma(z) = E(z) - E(2z)$$
$$E(z) = \frac{1}{240} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \qquad a_n = \sum_{d|n} d^3$$

である。

1.4. ・0 の元の Frame shape に対応するもののほかに mult. η-products の実例は，文献の中に多数見出される。

例1. $3^2 9^2$, 6.18, 8.16

$4^{16}/2^4 8^4$　$8^8/4^2 16^2$，$4^5 8^5/2^2 16^2$

最初の3つは，Jacobi 以来知られていたようであり，上で引用した Koike [2] でも扱われている。5，6番目のものもその中に見出される。最後のものは，本年1月小池氏に指摘されたものである。今までの例は，全て degree が24のものであるが，$\deg(\pi) = 0$ なる例を1つあげておこう：

例2. $\pi = 2^{10}/1^4 4^4$ とすると

$$\eta_\pi(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

ここで a_n は，$x^2+y^2=n$ の整数解の数で

$$a_n = \sum_{\substack{d|n \\ d\ \mathrm{odd}}} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$$

と書ける。これから $\eta_\pi(z)$ が mult. η-product であることが分る。なお，上の等式で最初の等式は，古典的な公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = \theta_3(2z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2$$

を変形したもので，第二の等式は自明である。

このほかにも，mult. η-products の実例は多数存在するが，それらと ·0 の元の Frame shape に対応するものとの関係を観察するのが，本講の目的である。

§2. W-変換と T-変換.

2.1. 上記の目的のため，2種類の変換を考える。一般に，gen. perm $\pi = \prod_t t^{r_t}$ と正整数 Q において，

(5) $$\pi * Q = \prod_t \left(\frac{Qt}{(Q,t)^2}\right)^{r_t}$$

とおく。(Q, t) は Q と t の最大公約数を表す。π が (1), (2) をみたすとき，(i.e. $\deg(\pi)=0$ または 24 で $wt(\pi)=$ 正整数) 次の条件をみたす最小の自然数 N をとる：

(6) $ord(\pi) \mid N$ i.e. $t \mid N$ if $r_t \neq 0$

(7) $\sum_t \frac{N}{t} r_t \equiv 0 \mod 24$

(8) $D_\pi \mid N$。 D_π は，体 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(-1)^{wt(\pi)}\prod_t t^{r_t}}\right)$ の判別式を表す。ここで $\prod_t t^{r_t}$ は有理数と見て

いる。

Nの約数 $Q>1$ で $(Q, \frac{N}{Q})=1$ をみたす Q に対して変換(5)
を考える。このとき

$$\pi * Q = \pi * W_{Q,N}$$

と書く。このような変換をW-変換という。これは、保型関数論で Atkin-Lehner の変換と呼ばれるものであるが、それについては、[1], [4], [5] を参照。

注意. $wt(\sigma)>0$ なる $\mathcal{O}$ の元 σ に対して、$\sigma * W_{Q,N}$ は再び $\mathcal{O}$ の元の Frame shape であるが、$\deg(\sigma * W_{Q,N})=0$ である。また次の定理が成立すると思われる：

"定理" π を(1), (2)をみたす gen. perm とする。$\eta_\pi(z)$ が multiplicative ならば、$\eta_{\pi * W_{Q,N}}(z)$ も multiplicative.

この命題は、現在の所証明されていないが、本稿で扱われる実例に対しては正しい。なお [5; Th 2.2] と本稿の §3.4 を参照。

さらにもう一つの変換を考える。gen. perm. $\pi=\prod_t t^{r_t}$ に対して、非負整数 e を次のように定める：

$$2^e \mid t \qquad (\forall t \text{ with } r_t \neq 0)$$
$$2^{e+1} \nmid t \qquad (\exists t \text{ with } r_t \neq 0)。$$

このとき、

$$\pi * T = \prod_{2^{e+1} \mid t} t^{r_t} \cdot \prod_{2^{e+1} \nmid t} \frac{(2t)^{3r_t}}{t^{r_t}(4t)^{r_t}}$$

とおく。このとき、

$$\eta_{\pi * T}(z) = c\,\eta_{\pi}\left(z + \frac{1}{2^{e+1}}\right) \quad (c\text{は定数})$$

が容易に示され、これを用いて次の定理が得られる。

定理　$\eta_{\pi}(z)$ が multiplicative ならば、$\eta_{\pi * T}(z)$ もそうである。

注意。上で定義したW-変換とT-変換は、ともに involutive な変換である：$\pi * W^2 = \pi * T^2 = \pi$。

2.2. ここで注意したいことは、mult. η-products の知られている実例の殆んど全ては、$\cdot 0$ の元の Frame shape に W-変換、T-変換をほどこして得られると云うことである。

例3. (1) $\sigma = 1^2.2.4.8^2$ (M_{24}の元) とする。

$$1^2.2.4.8^2 \xrightarrow{T} \frac{2^7 8^2}{1^2 4} \xrightarrow{W_{16,16}} \frac{2^2 8^7}{4.16^2} \xrightarrow{T} \frac{4^5 8^5}{2^2 16^2}$$

となり、§1.4 例1 であげた $4^5 8^5 / 2^2 16^2$ が $\cdot 0$ の元 $1^2 2 4 8^2$ から得られる。なお σ に W-, T-変換をほどこして得られ

るのは，これら4つだけであることに注意されたい。

(2) ·0の元として $\sigma = 8^4/4^2$ をとると，

$$8^4/4^2 \xrightarrow{W_{8,8}} 1^4/2^2 \xrightarrow{T} 2^{10}/1^4 4^4$$

となり，§1.4 例2であげた $2^{10}/1^4 4^4$ が·0の元 $8^4/4^2$ から得られる。なお

$$8^4/4^2 \xrightarrow{T} \frac{4^2 16^2}{8^2}$$

も mult. η-product を与え，$8^4/4^2$ に W-, T-変換をほどこして得られるのは，ここに現われた4つだけである。

注意. ·0の元 σ ($wt(\sigma) > 0$) に W-, T-変換をほどこして得られる gen. perm は有限個である。このようにして，·0の元の Frame shape に対応する mult. η-products から，226個の mult. η-products の実例が得られ，知られた例の殆んど全ては，この中に見出される。これらの226個を ·0 に associate した mult. η-product と呼ぶことにしよう。

§3. ·0の元に associate しない mult. η-products

3.1 ·0の元に associate しない mult. η-products の例としては，§1.4 例1であげた

$3^2.9^2$, 6.18, 8.16

がそのようなものである。これらは，・0の元から，W-，T-変換をほどこしては得られないが，

$$(3^2 9^2)^3 = (6.18)^6 = 1^6 3^6, \quad (8.16)^8 = 1^8 2^8$$

（置換としてのべきをとっている）

で，$1^8 2^8$，$1^6 3^6$ は M_{24} の元の cycle 分解であるから，形の上では・0の元に密接に関係している。

3.2. 上の3つのほかに，・0に associate しない mult. η-products があるかどうかを調べるために次の問題を考える：

問題。Π_{24} を degree 24 の Frame shape 全体の集合（i.e. 次数24で有理整係数，根が全て1のべき根であるような多項式の全体）とする。$\Pi_{24} \ni \pi = \prod_t t^{r_t}$ に対して $\eta_\pi(z) = \prod_t \eta(tz)^{r_t}$ が mult. η-product となるのはどんな π か？

この問題に対する答は，次の定理である。

定理. $\eta_\pi(z)$ $(\pi \in \Pi_{24})$ が multiplicative とする。

I. $wt(\pi)$ が整数ならば，次の1つが成立つ：

(i) π は・0の元の Frame shape か，それに associate したもの

(ii) π は，$3^2 9^2$，8.16，6.18 のどれか.

(iii) πは、次の6つのうちのどれか：

$1^3 6^5/2^3 . 3 \sim 2^5 . 12^3/4 . 6^3$

$2^2 . 3^2 18^2/1 . 6^2 . 9$

$3^3 . 18^2/6^2 . 9 \sim 2^2 . 12^3/4 . 6^2$

$1 . 3 . 4^4 24^2/2^2 8^2 12^2$

ここで、～は W_-, T-変換でお互いに移れることを示す。

II $wt(\pi)$がhalf-integerならば、πは次の9つのうちのどれか：

$6^5/3^2 \sim 3^2 . 12^2/6$, 8^3

$16^2/8 \sim 8 . 32^2/16$, 24

$3 . 18^2/6 . 9 \sim 6^2 . 9 . 36/3 . 12 . 18 \sim 8^2 . 48/16 . 24$

この定理の証明は、計算機を用いて行われた。もともとは、パソコン（NEC-PC9801 F2）を用いて、$ord(\pi) < 100$ ($\pi \in \Pi_{24}$) なるπにおいて上の定理が成り立つことを確めたのであるが、一橋大学の山田裕理氏が大型計算機を用いて、全ての$\pi \in \Pi_{24}$に対して上の定理が成立することを証明した。なお、$|\Pi_{24}| = 195,966$で、そのうち$ord(\pi) < 100$なるものは60,914個である。またmultiplicative η-productsを与える$\pi \in \Pi_{24}$ (i.e. 上の定理に現われるもの)は、全部で101個である。

3.3. 証明の概要を述べる。自然数 n に対して，π_n を 1 の原始 n 乗根を根とする円分多項式の Frame shape とする。良く知られているように

$$\deg(\pi_n) = \varphi(n)$$

$$\pi_n = \prod_{t \mid n} t^{\mu(\frac{n}{t})}$$

である。ここで φ, μ は Euler 関数，Möbius 関数である。さて，次の不定方程式を考える：

$$\sum_{n=1}^{90} \varphi(n) u_n = 24$$

ここで $\varphi(n) \leq 24$ ならば $n \leq 90$ であることに注意されたい。この方程式の非負整数解 $(u_1, u_2, \ldots, u_{90})$ に対して

(*) $\pi = \pi(u_1, u_2, \ldots, u_{90}) = \pi_1^{u_1} \pi_2^{u_2} \cdots \pi_{90}^{u_{90}}$

とおくと，$\pi \in \Pi_{24}$ であり，逆に $\pi \in \Pi_{24}$ の Frame shape π は，全てこのようにして得られる。(*) によって得られた π に対して，$\eta_\pi(z)$ を作り，そのフーリエ展開

$$\eta_\pi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \qquad (a_1 = 1)$$

の係数 a_n を $1 \leq n \leq 21$ に対して計算し，

(**) $a_{mn} = a_m a_n \qquad (m, n) = 1, \quad 1 \leq m, n \leq 21$

が成り立つような π を探す。もちろん，このような $\eta_\pi(z)$ は mult. η-product の候補者にしか過ぎないが，これらが実際

に，mult. η-products を与えるかどうかは，次のようにして確める。なお，幸いなことにこのような候補者の数は，115,966個の Π_{24} の元のうち，189個にしか過ぎない。さて，これらの189個の元に対して，次の条件をみたすかどうかを確めるのが有益である：

(#) $\mathrm{ord}(\pi) \mid N$ なるある自然数 N が存在して，$Q>1$，$(Q, \frac{N}{Q})=1$ なる N の任意の約数 Q に対して，

$$\deg(\pi * Q) = 0 \text{ または } 24.$$

この条件(#)は，一般の gen. perm（$\deg(\pi)=0$ 又は 24 で $\mathrm{wt}(\pi)=$ 正整数）に対して，$\eta_\pi(z)$ が multiplicative であるための必要条件であると思われる。すなわち次の定理が成り立つと思われる：

"定理" $\eta_\pi(z)$ が multiplicative ならば，π は (#) をみたす。（cf. [5] Th 2.2）

これは証明されているわけではないが，(**) をみたす $\pi \in \Pi_{24}$ が，(#) をみたさないときは，$n > 21$ なる a_n を計算して見ると，必ずどこかで（これもパソコンの助けを借りるが）係数の乗法性 $a_{mn}=a_m a_n$ が成立しなくなることが確められる。$\pi \in \Pi_{24}$ が (#) をみたせば，それは既知のものか定理の(iii) であげたものであり，後者は具体的な Eisenstein series と同一視出来て，それから multiplicative であることが分る。詳しくは，[5]の§3を参照されたい。

3.4. 最後に §2.1 (p.7) と上で述べた2つの"定理"(予想)について注意しておく。これらの予想は，次の問と密接に関連している：

問題. π を (1), (2) をみたす gen. perm. で $\eta_\pi(z)$ が multiplicative とする。このとき $\eta_\pi(z)$ は cusps (i.e. 有理点 $z \in \mathbb{Q}$) で holomorphic か?

この問題が真ならば，上の2つの予想が正しいことは，小池正夫氏により確められている。なお，(1), (2) をみたす (multiplicative とは限らない) gen. perm. π に対して N を (6), (7), (8) で定めると

$$\eta_\pi\left(\frac{az+b}{cNz+d}\right) = \chi(d)(cz+d)^{wt(\pi)}\eta_\pi(z)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

χ は体 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(-1)^{wt(\pi)}\prod_t t^{r_t}}\right)$ の Dirichlet 指標

(cf. [5] Th 2.1)

が成り立つが，一般にはこの $\eta_\pi(z)$ が $\Gamma_0(N)$ の cusp で (meromorphic ではあるが) holomorphic とは限らない。上の問題は，「$\eta_\pi(z)$ が multiplicative ならば，

$\Gamma_0(N)$の各cuspでholomorphicか」従って「$\eta_\pi(z)$は (level N, weight wt(π), character χの) modular form か?」と云う問である。

文献

[1] J.H. Conway and S.P. Norton, Monstrous moonshine, Bull London Math. Soc., 11 (1979), 308–339

[2] M. Koike, On Mackay's conjecture, Nagoya Math. J., 95 (1984), 85–90.

[3] M. Koike, Moonshines of $PSL_2(\mathbb{F}_8)$ and the automorphism group of Leech lattice, to appear in Japanese Journal.

[4] T. Kondo, The automorphism group of Leech lattice and elliptic modular functions, J. Math. Soc. Japan, 37 (1985), 337–362

[5] T. Kondo, Examples of multiplicative η-products, 東大教養紀要 近刊.